

USEAN MUUTTUJAN FUNKTIOT II

Kari Ylinen

2010

Sisältö

I	Avaruuden $\mathbb{R}^n$ rakenteesta ja kuvauksista	1
I.1	Avaruuden $\mathbb{R}^n$ lineaarinen ja metrinen rakenne	1
I.2	Jonon suppeneminen	2
I.3	Topologisia peruskäsitteitä	3
I.4	Kuvauksen jatkuvuus	6
I.5	Kompaktit joukot	9
I.6	Kompaktius ja jatkuvuus	11
I.7	Lineaarikuvauksen matriisiesitys ja normi	14
II	Differentiaalilaskentaa	16
II.1	Osittaisderivaatoista	16
II.2	Differentioituvuus ja lineaarinen derivaatta	19
II.3	Jatkuvasti differentioituvat ja C^p -luokan funktiot	24
II.4	Suunnattu derivaatta ja sen yhteys gradienttiin	25
II.5	Yhdistetyn kuvauksen differentioituvuus ja derivaatta	27
II.6	Divergenssi ja roottori	29
II.7	Väliarvolause ja sen soveltaminen virheen arviointiin	30
II.8	Funktion suurimman ja pienimmän arvon etsiminen	31
III	Usean muuttujan funktion Riemannin integraali	34
III.1	Integraali yli $\mathbb{R}^n$:n kompaktin välin	34
III.2	Integraali yli väliä yleisemmän rajoitetun joukon	36
III.3	Iteroidut integraalit	42
III.4	Napakoordinaattimuunnoksen käyttö integroinnissa	45
IV	Käyräintegraalit	48
IV.1	Polku, käyrä ja suoristuvuus	48
IV.2	Jatkuvasti derivoituvan polun pituus	50
IV.3	Vektorifunktion käyräintegraali	51
IV.4	Integraali kaarenpituuden suhteen	54
V	Implisiittifunktiolauseen sovelluksia	57
V.1	Implisiittifunktiolauseen geometrisia sovelluksia	57
V.2	Sidotut ääriarvot	62
VI	Taylorin lause ja sen sovelluksia	66
VI.1	Korkeammat derivaatat ja Taylorin lause	66
VI.2	Taylorin lauseen soveltaminen paikallisten ääriarvojen tutkimiseen	70
VI.3	Taylorin lause ja absoluuttiset ääriarvot	74
VII	Lisää moniulotteisista integraaleista	75
VII.1	Sijoitus moniulotteiseen integraaliin	75
VII.2	Integraalilla määritellyn funktion derivointi, Leibnizin sääntö . .	77
VIII	Vektorikentän potentiaali ja sen yhteys käyräinteraaleihin	80
VIII.1	Potentiaali ja integraalin riippumattomuus tiestä	80
VIII.2	Potentiaalin olemassaolo ja konstruointi	83

IX Greenin, Stokesin ja Gaussin lauseet	86
IX.1 Greenin lause singulaariselle 2-kuutiolle tasossa	86
IX.2 Greenin lause Jordanin alueelle	91
IX.3 Vektoritulo	92
IX.4 Säännöllinen pinnanpala, pinta-ala ja integraali pinta-alan suhteen	93
IX.5 Vektorikentän pintaintegraali	96
IX.6 Vektorikentän integrointi yli singulaarisen 2- tai 3-kuution reunan	99
IX.7 Stokesin ja Gaussin lauseet singulaarisille 2- ja 3-kuutioille	100

I Avaruuden $\mathbb{R}^n$ rakenteesta ja kuvauksista

I.1 Avaruuden $\mathbb{R}^n$ lineaarinen ja metrinen rakenne

Palautamme mieleen lineaarialgebrasta tutun merkinnän $\mathbb{R}^n$, jolla tarkoitetaan n :n pituisten reaalityöjonojen muodostamaa vektoriavaruutta, $n \in \mathbb{N}$. Joukko-

$$\mathbb{R}^n = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R} \text{ kaikilla } j = 1, \dots, n \},$$

ja vektoriavaruuden laskutoimitukset yhteenlasku ja skalaarilla (eli tässä tapauksessa reaalityöluvulla) kertominen on määritelty luonnolliseen tapaan koordinaateittain eli komponenteittain. Merkitsemme $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.

Merkitsemme $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$. Nämä $\mathbb{R}^n$:n *perusvektorit* muodostavat sen *luonnollisen kannan*. Jos on tarpeen korostaa, että kyse on nimenomaan n -ulotteisen avaruuden luonnollisen kannan alkioista, kirjoitamme $\mathbf{e}_j^n$ merkinnän $\mathbf{e}_j$ sijasta.

Sen lisäksi, että $\mathbb{R}^n$ on vektoriavaruus, siinä on luonnollinen tapa määritellä kahden alkion välinen etäisyys. (Edellä sanoimme avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioita vektoreiksi, mutta toisesta näkökulmasta niitä voidaan sanoa myös pisteiksi.) Määrittelemme seuraavassa etäisyyden sisätulon avulla. Kahden vektorin $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ *sisätulo* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ määritellään lukuna $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$. Sisätulosta käytetään myös nimityksiä *skalaaritulo* ja *pistetulo*. Jälkimmäisen nimityksen yhteydessä merkintänä yleensä on $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Vektorin $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ *normi* eli *pituus* $\|\mathbf{x}\|$ määritellään sisätulon avulla kaavalla

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Selvästi $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Välittömästi nähdään myös, että aina $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, ja $\|\mathbf{x}\| = 0$, jos ja vain jos $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Lause I.1.1. Olkoot $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Silloin

- (a) $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ (Cauchyn-Schwarzin epäyhtälö);
- (b) $||\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (kolmioepäyhtälö);
- (c) $\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq \|\mathbf{x}\| \leq |x_1| + \dots + |x_n| \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\| \leq n \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

TODISTUS. (a): Jokaisella $\lambda \in \mathbb{R}$ on

$$0 \leq (\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Jos $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \neq 0$, valitaan $\lambda = -\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}$, jolloin

$$0 \leq \|\mathbf{x}\|^2 - 2 \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{y}\|^2} + \|\mathbf{y}\|^2 \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{y}\|^4}$$

eli

$$\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \geq (\mathbf{x}, \mathbf{y})^2.$$

Jos taas $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$, on $y_1 = \dots = y_n = 0$, joten väite pätee.

Kohdat (b) ja (c) jätämme harjoitustehtäviksi. (Kohdan (c) toiseksi viimeisessä epäyhtälössä käytetään Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä vektoreihin $(1, \dots, 1)$ ja $(|x_1|, \dots, |x_n|)$).

□

Tutkimalla, milloin edellä kohdan (a) todistuksessa voi esiintyä yhtälö, voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että Cauchyn-Schwarzin epäyhtälössä on voimassa yhtäsuuruus, jos ja vain jos $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat lineaarisesti riippuvat. Kahden alkion $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ välinen *etäisyys*, jolle käytämme toisinaan merkintää $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, määritellään lukuna $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Lause I.1.2. *Olkoot $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Silloin*

- (a) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$;
- (b) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, jos ja vain jos $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
- (c) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
- (d) $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

TODISTUS. Kohta (d) seuraa heti lauseen I.1.1 kohdasta (b), ja muut lauseen väitteet ovat ilmeisiä. $\square$

Huomautus I.1.3. Lause I.1.2 voidaan ilmaista sanomalla, että edellä määritelly kuvaus $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on $\mathbb{R}^n$:n *metriikka*; $\mathbb{R}^n$ on sen suhteen *metriksen avaruus*. Monet tarkastelut jatkossa riippuvat ainoastaan lauseessa I.1.2 luetelluista metriikan d ominaisuuksista ja pätisivät siis sellaisinaan yleisessä metrisessä avaruudessa.

I.2 Jonon suppeneminen

Lukujonon käsitteen yleistykseenä sanomme kuvausta $k \mapsto \mathbf{x}_k$ luonnollisen lukujen joukosta $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ avaruuteen $\mathbb{R}^n$ *jonoksi* ($\mathbb{R}^n$:ssä); sille käytetään myös nimityksiä *vektori-jono* ja *pistejono* sekä merkintää $(\mathbf{x}_k)$. Lukujonon raja-arvon määritelmää käyttäen saadaan lyhyt tapa määrittellä jonon suppeneminen avaruudessa $\mathbb{R}^n$:

Määritelmä I.2.1. Olkoon $(\mathbf{x}_k)$ jono $\mathbb{R}^n$:ssä ja $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Jos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) = 0,$$

sanotaan, että jono $(\mathbf{x}_k)$ *suppenee* kohti alkia $\mathbf{x}_0$. Tällöin merkitään

$$\mathbf{x}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k$$

tai $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$ ja sanotaan, että $\mathbf{x}_0$ on jonon $(\mathbf{x}_k)$ *raja-arvo*.

Toisin sanoen $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$, jos ja vain jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ aina, kun $k \geq k_\varepsilon$. Tarkkaan ottaen menimme tässä määritelmässä hiukan asioiden edelle käyttämällä funktionaalista merkintää $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k$ ja siihen liittyvää yhtäläisyysmerkkiä ennen raja-arvon yksikäsitteisyyden todistamista. Korjaamme heti tämän puutteen:

Lause I.2.2. (a) *Jono voi $\mathbb{R}^n$:ssä supeta korkeintaan yhtä pistettä kohti, ts. jonon raja-arvo on yksikäsitteinen, jos se on olemassa.*

(b) *Määritelmän I.2.1 merkinnöin*

$$\mathbf{x}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k,$$

jos ja vain jos

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_k, \mathbf{e}_j)$$

jokaisella $j = 1, \dots, n$.

TODISTUS. (a) Tehdään vasta oletus, että jono $(\mathbf{x}_k)$ suppenee kohti sekä pistettä $\mathbf{x}$ että pistettä $\mathbf{y}$, missä $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Merkitään $\varepsilon = \frac{1}{2}d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Silloin voidaan valita luvut $k_1 \in \mathbf{N}$ ja $k_2 \in \mathbf{N}$ siten, että $d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) < \varepsilon$, kun $k \geq k_1$, ja $d(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}) < \varepsilon$, kun $k \geq k_2$. Jos k on suurempi luvuista k_1 ja k_2 , on siis

$$2\varepsilon = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k) + d(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Tämä ristiriita osoittaa vasta oletuksen mahdottomaksi, joten raja-arvo on yksikäsitteinen.

(b) Oletetaan, että $(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_k, \mathbf{e}_j)$ jokaisella $j = 1, \dots, n$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Jokaista $j = 1, \dots, n$ vastaa sellainen $k_j \in \mathbf{N}$, että

$$|(\mathbf{x}_k, \mathbf{e}_j) - (\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_j)| < \frac{\varepsilon}{n}$$

aina, kun $k \geq k_j$. Olkoon k_0 suurin luvuista $k_1, \dots, k_n$. Jos $k \geq k_0$, on lauseen I.1.1 (c) nojalla

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| \leq \sum_{j=1}^n |(\mathbf{x}_k, \mathbf{e}_j) - (\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_j)| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

Siis $\mathbf{x}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k$. Käänteinen implikaatio seuraa heti epäyhtälöstä

$$|(\mathbf{x}_k, \mathbf{e}_j) - (\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_j)| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\|. \quad \square$$

Jos $(\mathbf{x}_k)$ on jono $\mathbb{R}^n$:ssä ja $p \mapsto k_p$ on sellainen jono $\mathbf{N}$:ssä, että $k_{p+1} > k_p$ kaikilla $p \in \mathbf{N}$, niin yhdistettyä kuvausta $p \mapsto \mathbf{x}_{k_p}$ eli jonoa $(\mathbf{x}_{k_p})$ sanotaan jonon $(\mathbf{x}_k)$ *osajonoksi*. Koska (helpon induktiotodistuksen nojalla) tässä aina $k_p \geq p$, jonon suppenemisen määritelmästä näkyy, että suppenevan jonon jokainen osajono suppenee kohti alkuperäisen jonon raja-arvoa.

I.3 Topologia peruskäsitteitä

Topologia on matematiikan haara, jossa avoin joukko on keskeisenä käsitteenä. Tässä jaksossa määrittelemme avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimen joukon ja muita topologia käsitteitä. Avoin joukko liittyy läheisesti kuvauksen jatkuvuuteen, jota käsitellään seuraavassa jaksossa.

Määritelmä I.3.1. (a) Olkoon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Joukkoa

$$B(\mathbf{x}, r) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r \}$$

sanotaan pisteen $\mathbf{x}$ (*avoimeksi*) r -*säteiseksi palloympäristöksi*.

(b) Piste $\mathbf{x}$ on joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *sisäpiste*, jos jollakin $r > 0$ on voimassa $B(\mathbf{x}, r) \subset A$. Joukon A sisäpisteiden joukkoa sanotaan A :n *sisäosaksi*, ja sille käytetään merkintää A° .

(c) Piste $\mathbf{x}$ on joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *ulkopiste*, jos se on A :n komplementin $\mathbb{R}^n \setminus A$ sisäpiste.

(d) Piste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ *reunapiste*, jos se ei ole A :n sisä- eikä ulkopiste. Joukon A reunapisteiden joukkoa sanotaan A :n *reunaksi*, ja sille käytetään merkintää ∂A .

(e) Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *avoin*, jos sen jokainen piste on sisäpiste.

(f) Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *suljettu*, jos sen komplementti $\mathbb{R}^n \setminus A$ on avoin.

Esimerkki I.3.2. (a) Osoitamme, että $B(\mathbf{x}, r)$ on avoin joukko aina, kun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Olkoon $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$, jolloin määritelmän mukaan

$$\delta = r - d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0.$$

Jos $\mathbf{z} \in B(\mathbf{y}, \delta)$, on

$$d(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) < \delta + (r - \delta) = r.$$

Näin ollen $B(\mathbf{y}, \delta) \subset B(\mathbf{x}, r)$, ja siis $\mathbf{y}$ on $B(\mathbf{x}, r)$:n sisäpiste.

(b) Tyhjä joukko $\emptyset$ ja $\mathbb{R}^n$ ovat sekä avoimia että suljettuja joukkoja.

(c) Olkoon $a < b$. Avoimet reaalilukuvälit (a, b) , $(-\infty, a)$, (a, ∞) ovat $\mathbb{R}$:n avoimia osajoukkoja. Välit $[a, b]$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ ovat suljettuja joukkoja. Puoliavoin väli $[a, b)$, $a < b$, ei ole avoin eikä suljettu joukko. Kunkin välin (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ reuna on joukko $\{a, b\}$. Nämä väitteet seuraavat välittömästi määritelmästä.

(d) Olkoon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $r \geq 0$. Osoitamme, että joukko

$$\overline{B}(\mathbf{x}, r) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r \}$$

on suljettu. Määritelmän mukaan tämä nähdään todistamalla sen komplementti $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(\mathbf{x}, r)$ avoimeksi. Olkoon sitä varten $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(\mathbf{x}, r)$. Silloin

$$\delta = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - r > 0.$$

Jos $\mathbf{z} \in B(\mathbf{y}, \delta)$, on kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \geq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) > d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \delta = r,$$

joten $\mathbf{z} \notin \overline{B}(\mathbf{x}, r)$. Siis

$$B(\mathbf{y}, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(\mathbf{x}, r).$$

(e) Valitsemalla (d):ssä $r = 0$ nähdään erityisesti, että jokainen yhden pisteen joukko $\{\mathbf{x}\}$ on suljettu.

(f) Olkoon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Sekä $B(\mathbf{x}, r)$:n että $\overline{B}(\mathbf{x}, r)$:n reuna on $\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r \}$. Perustelu: Kohdista (a) ja (d) seuraa, että $\mathbf{y}$ on kummankin joukon sisäpiste, mikäli $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r$, ja $\mathbf{y}$ on kummankin joukon ulkopiste, mikäli $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > r$. Toisaalta, jos $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r$, niin jokaisella $\delta > 0$ joukko $B(\mathbf{y}, \delta)$ sisältää kummankin joukon ja sen komplementin pisteitä, sillä jonot $(\mathbf{x} + \frac{n}{n+1}(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$ ja $(\mathbf{x} + \frac{n+1}{n}(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$ suppenevat kohti pistettä $\mathbf{y}$.

(g) Olkoon $A_k = (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Kukin A_k on avoin joukko. Leikkaus

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{0\}$$

ei ole avoin, sillä sen ainoa piste ei selvästikään ole sisäpiste. Siis avoimien joukkojen leikkauksen ei tarvitse olla avoin. Sen sijaan on voimassa seuraava lause.

Lause I.3.3. (a) Jos $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ on mielivaltainen perhe avoimia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja, niin unioni $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ on avoin.

(b) Jos $(A_i)_{i=1}^p$ on äärellinen perhe avoimia $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja, niin leikkaus $\bigcap_{i=1}^p A_i$ on avoin.

(c) Jos $(B_i)_{i \in \mathcal{I}}$ on mielivaltainen perhe suljettuja $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja, niin leikkaus $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} B_i$ on suljettu.

(d) Jos $(B_i)_{i=1}^p$ on äärellinen perhe suljettuja $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja, niin unioni $\bigcup_{i=1}^p B_i$ on suljettu.

TODISTUS. Todistamme avoimia joukkoja koskevat väitteet (a) ja (b). De Morganin kaavojen

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{R}^n \setminus A_i$$

ja

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{R}^n \setminus A_i$$

avulla suljettuja joukkoja koskevat väitteet (c) ja (d) voidaan palauttaa näihin (harjoitustehtävä).

(a): Olkoon $\mathbf{x} \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$. Silloin $\mathbf{x} \in A_{i_0}$ jollakin $i_0 \in \mathcal{I}$. Koska A_{i_0} on avoin, on olemassa sellainen luku $r > 0$, että $B(\mathbf{x}, r) \subset A_{i_0}$, jolloin myös $B(\mathbf{x}, r) \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$.

(c): Olkoon $\mathbf{x} \in \bigcap_{i=1}^p A_i$. Silloin $\mathbf{x} \in A_i$ jokaisella $i = 1, \dots, p$. Koska kukin A_i on avoin, on olemassa sellaiset luvut $r_i > 0$, $i = 1, \dots, p$, että $B(\mathbf{x}, r_i) \subset A_i$ jokaisella $i = 1, \dots, p$. Koska lukuja $r_1, \dots, r_p$ on vain äärellinen määrä, on olemassa $r = \min_{1 \leq i \leq p} r_i > 0$. Nyt

$$B(\mathbf{x}, r) \subset \bigcap_{i=1}^p B(\mathbf{x}, r_i) \subset \bigcap_{i=1}^p A_i. \quad \square$$

Esimerkki I.3.4. (a) Esimerkin I.3.2 (e) ja lauseen I.3.3 nojalla jokainen $\mathbb{R}^n$:n äärellinen osajoukko on suljettu.

(b) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Lauseen I.3.3 (c) nojalla kaikkien A :n sisältävien suljettujen joukkojen leikkaus on suljettu. Selvästi se on suppein A :n sisältävä suljettu joukko. Sitä sanotaan joukon A *sulkeumaksi*, ja sille käytetään merkintää $\bar{A}$. Selvästi joukko A on suljettu, jos ja vain jos $A = \bar{A}$.

Lause I.3.5. Joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) A on suljettu;

(ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k \in A$ aina, kun $(\mathbf{x}_k)$ on suppeneva jono ja $\mathbf{x}_k \in A$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

TODISTUS. (i) $\implies$ (ii): Olkoon A suljettu ja $(\mathbf{x}_k)$ A :n pisteiden jono, jolla on raja-arvona $\mathbf{x}$. Tehdään vastaoletus: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Koska $\mathbb{R}^n \setminus A$ on avoin, on olemassa $\varepsilon > 0$, jolle $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Kun k on kyllin suuri, on $d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}) < \varepsilon$ eli $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Tämä ristiriita osoittaa, että $\mathbf{x} \in A$.

(ii) $\implies$ (i): Oletetaan (ii) ja osoitetaan, että $\mathbb{R}^n \setminus A$ on avoin. Tehdään vastaoletus: On olemassa $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus A$, joka ei ole joukon $\mathbb{R}^n \setminus A$ sisäpiste. Eri-tyisesti jostaista $k \in \mathbb{N}$ vastaa jokin $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}, \frac{1}{k}) \cap A$. Silloin $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$, joten oletuksen mukaan $\mathbf{x} \in A$. Tämä ristiriita todistaa väitteen. $\square$

Esimerkki I.3.6. Osoitetaan, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikköpallon pinta

$$A = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1 \}$$

on suljettu. Olkoon $\mathbf{x}_k \in A$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$. Oletetaan, että jono $(\mathbf{x}_k)$ suppenee kohti jotakin $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Koska

$$|\|\mathbf{x}_k\| - \|\mathbf{x}\|| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|,$$

on $\|\mathbf{x}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k\| = 1$, joten $\mathbf{x} \in A$. Lauseesta I.3.5 seuraa siis, että A on suljettu.

Lause I.3.7. *Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ sulkeuma on sama kuin A :n pisteiden suppenevien jonojen raja-arvojen joukko.*

TODISTUS. Jos $(\mathbf{x}_k)$ on jono A :ssa, sen jäsenet ovat myös suljetussa joukossa $\overline{A}$, joten lauseen I.3.5 nojalla sen raja-arvo on $\overline{A}$:ssa, mikäli jono suppenee. Olkoon toisaalta $\mathbf{y} \in \overline{A}$. Jokaisella $k \in \mathbf{N}$ on olemassa jokin $\mathbf{y}_k \in B(\mathbf{y}, \frac{1}{k})$, sillä muuten $\mathbb{R}^n \setminus B(\mathbf{y}, \frac{1}{k})$ olisi A :n ja siis myös $\overline{A}$:n sisältävä suljettu joukko vastoin oletusta $\mathbf{y} \in \overline{A}$. Tällöin $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{y}$. $\square$

I.4 Kuvauksen jatkuvuus

Seuraava määritelmä yleistää tutun yhden reaalimuuttujan funktioiden jatkuvuuden käsitteen.

Määritelmä I.4.1. Olkoon $\mathbf{x}_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$. Kuvaus $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on *jatkuva* pisteessä $\mathbf{x}_0$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(A \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset B(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon)$$

(eli $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ aina, kun $\mathbf{x} \in A$ ja $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$).

Kuvaus $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuva A :ssa, jos se on jatkuva jokaisessa A :n pisteessä.

Esimerkki I.4.2. Normifunktio $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ on jatkuva $\mathbb{R}^n$:ssä. Sillä lauseen I.1.1 (b) nojalla $|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}_0\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$, joten δ :ksi kelpaa ε .

Lause I.4.3. *Olkoot $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow \mathbb{R}^k$ kuvauksia, missä $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $B \subset \mathbb{R}^m$. Jos f on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}_0 \in A$ ja g on jatkuva pisteessä $f(\mathbf{x}_0)$, niin yhdistetty kuvaus $g \circ f$ on jatkuva $\mathbf{x}_0$:ssa.*

TODISTUS. Harjoitustehtävä.

Lause I.4.4. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kuvaus. Merkitään*

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})),$$

$\mathbf{x} \in A$, eli $f = (f_1, \dots, f_m)$. Kuvaus f on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}_0 \in A$, jos ja vain jos jokainen funktio f_i , $i = 1, \dots, m$, on jatkuva $\mathbf{x}_0$:ssa.

TODISTUS. Väite voidaan todistaa analogisesti lauseen I.2.2 (b) todistuksen kanssa. Se seuraa myös heti lauseesta I.2.2 (b) ja seuraavassa lauseessa todistettavasta periaatteesta, jonka mukaan jatkuvuuden tutkiminen voidaan palauttaa jonojen raja-arvotarkasteluihin. $\square$

Lause I.4.5. Olkoon $\mathbf{x}_0 \in A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kuvaus. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- (i) kuvaus f on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}_0$;
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_0)$ aina, kun $(\mathbf{x}_k)$ on jono, jolle $\mathbf{x}_k \in A$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$.

TODISTUS. (i) $\implies$ (ii): Olkoon f jatkuva $\mathbf{x}_0$:ssa ja $(\mathbf{x}_k)$ A :ssa jono, joka suppenee kohti $\mathbf{x}_0$:aa. Olkoon $\varepsilon > 0$. Jollekin $\delta > 0$

$$f(A \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset B(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

Jonon raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{N}$, että $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$, kun $k \geq k_0$. Silloin $f(\mathbf{x}_k) \in B(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon)$, kun $k \geq k_0$.

(ii) $\implies$ (i): Oletetaan (ii) ja tehdään väitteelle (i) vastaoetus: f ei ole jatkuva $\mathbf{x}_0$:ssa. Määritelmän mukaan on silloin olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että millekään $\delta > 0$ ei ole voimassa $f(A \cap B(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset B(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon)$. Erityisesti jostaista $k \in \mathbb{N}$ vastaa sellainen $\mathbf{x}_k \in A \cap B(\mathbf{x}_0, \frac{1}{k})$, että $f(\mathbf{x}_k) \notin B(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon)$. Nyt $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$, mutta jono $(f(\mathbf{x}_k))$ ei voi supeta kohti $f(\mathbf{x}_0)$:aa. Tämä ristiriita oletuksen kanssa todistaa väitteen. $\square$

Seuraava lause voitaisiin helposti todistaa suoraan määritelmän avulla, mutta käytämme sen sijaan lausetta I.4.5.

Lause I.4.6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, ja olkoot kuvaukset $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvia pisteessä $\mathbf{x}_0$.

- (a) Funktio $\lambda f + \mu g$ on jatkuva $\mathbf{x}_0$:ssa kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- (b) Funktio fg on jatkuva $\mathbf{x}_0$:ssa.
- (c) Jos $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, niin funktio $\frac{f}{g}$ on jatkuva $\mathbf{x}_0$:ssa.

TODISTUS. Todistamme vain kohdan (c); muut kohdat voidaan käsitellä samaan tapaan. Funktio $\frac{f}{g}$ on määritelty joukossa $B = \{\mathbf{x} \in A \mid g(\mathbf{x}) \neq 0\}$. Olkoon $(\mathbf{x}_k)$ mielivaltainen jono, jolle $\mathbf{x}_k \in B$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$. Lauseen I.4.5 nojalla $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_0)$ ja $\lim_{k \rightarrow \infty} g(\mathbf{x}_k) = g(\mathbf{x}_0)$, joten tunnetun reaalilukujonon raja-arvoa koskevan lauseen nojalla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(\mathbf{x}_k)}{g(\mathbf{x}_k)} = \frac{f(\mathbf{x}_0)}{g(\mathbf{x}_0)}.$$

Koska tämä pätee jokaiselle tällaiselle jonolle $(\mathbf{x}_k)$, lauseesta I.4.5 seuraa funktion $\frac{f}{g}$ jatkuvuus pisteessä $\mathbf{x}_0$. $\square$

Lauseiden I.4.6 ja I.4.4 seurauksena saataisiin vektoriarvoisia funktioita sekä vektori- ja skalaariarvoisia funktioita yhdessä koskevia jatkuvuustuloksia (jotka on helppo todistaa suoraankin). Nämä tulokset ovat niin ilmeisiä, että emme niitä muotoile erikseen, vaikka käytämmekin tarvittaessa.

Esimerkki I.4.7. Olkoon

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + \sin(x^3 y^2)}{x^2 + y^2},$$

kun $(x, y) \neq (0, 0)$. Silloin f on jatkuva $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:ssa lauseiden I.4.5 ja I.4.6 nojalla. Sillä funktiot $(x, y) \mapsto x$ ja $(x, y) \mapsto y$ ovat jatkuvia, koska esim. $|x_1 - x_2| \leq \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$, ja siis edelleen $(x, y) \mapsto \sin(x^3 y^2)$ on jatkuva jne. Sen sijaan f :ää ei voida määritellä origossa siten, että f tulisi siinä jatkuvaksi, sillä

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = 1 \neq -1 = \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(0, \frac{1}{k}\right).$$

Seuraava lause (erityisesti sen erikoistapaus I.4.9) tulee usein käyttöön todistettaessa jotakin joukkoa avoimeksi tai suljetuksi.

Lause I.4.8. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Kuvaukselle $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- (i) f on jatkuva;
- (ii) jokaiselle avoimelle joukolle $G \subset \mathbb{R}^m$ alkukuva

$$f^{-1}(G) (= \{ \mathbf{x} \in A \mid f(\mathbf{x}) \in G \})$$

on muotoa $A \cap U$, missä $U \subset \mathbb{R}^n$ on avoin;

(iii) jokaiselle suljetulle joukolle $F \subset \mathbb{R}^m$ alkukuva $f^{-1}(F)$ on muotoa $A \cap S$, missä $S \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu.

TODISTUS. (i) $\implies$ (ii): Olkoon f jatkuva ja $G \subset \mathbb{R}^m$ avoin. Olkoon $\mathbf{x} \in f^{-1}(G)$. Koska $f(\mathbf{x}) \in G$ ja G on avoin, on olemassa $\varepsilon_{\mathbf{x}} > 0$, jolle $B(f(\mathbf{x}), \varepsilon_{\mathbf{x}}) \subset G$. Jatkuvuuden nojalla on olemassa sellainen $\delta_{\mathbf{x}} > 0$, että

$$f(A \cap B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}})) \subset B(f(\mathbf{x}), \varepsilon_{\mathbf{x}}).$$

Suoritetaan samat valinnat jokaiselle $\mathbf{x} \in f^{-1}(G)$. Merkitään

$$U = \bigcup_{\mathbf{x} \in f^{-1}(G)} B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}}).$$

Esimerkin I.3.2 (a) ja lauseen I.3.3 (a) nojalla U on avoin, ja selvästi $f^{-1}(G) = A \cap U$.

(ii) $\iff$ (iii): Koska joukko on avoin, jos ja vain jos sen komplementti on suljettu, ja toisaalta alkukuvan muodostus säilyttää joukko-opilliset operaatiot, nähdään heti, että (ii) ja (iii) ovat yhtäpitävät.

(ii) $\implies$ (i): Oletetaan (ii). Olkoon $\mathbf{x} \in A$. Osoitetaan, että f on jatkuva $\mathbf{x}$:ssä. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $B(f(\mathbf{x}), \varepsilon)$ on avoin, oletuksen mukaan sen alkukuva kuvauksessa f on muotoa $A \cap U$, missä $U \subset \mathbb{R}^n$ on avoin. Erityisesti jollakin $\delta > 0$ $B(\mathbf{x}, \delta) \subset U$. Mutta tämä merkitsee sitä, että

$$f(A \cap B(\mathbf{x}, \delta)) \subset B(f(\mathbf{x}), \varepsilon). \quad \square$$

Seuraus I.4.9. Kuvaukselle $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- (i) f on jatkuva;
- (ii) jokaisen avoimen joukon alkukuva kuvauksessa f on avoin;
- (iii) jokaisen suljetun joukon alkukuva kuvauksessa f on suljettu.

Esimerkki I.4.10. (a) Joukko $A = \{ \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1 \}$ on suljettu, sillä $A = f^{-1}(\{1\})$, missä f on jatkuva funktio $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$. (Todistimme tämän toisella tavalla esimerkissä I.3.6.)

(b) Joukko $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0 \}$ on avoin, koska funktio $(x, y) \mapsto xy$ on jatkuva ja $(-\infty, 0) \mathbb{R}$:n avoin osajoukko. Sama näkyy luonnollisesti heti avoimen joukon määritelmästä.

Esimerkki I.4.11. Osoitetaan, että joukko

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 1 + xy^2 \leq x^4 + y^4 \leq 4 \}$$

on suljettu. Koska funktio $(x, y) \mapsto 1 + xy^2$ on jatkuva, joukko

$$A_1 = \{ (x, y) \mid 0 \leq 1 + xy^2 \}$$

on suljetun joukon $[0, \infty)$ alkukuvana tässä kuvauksessa suljettu. Vastaavasti joukot

$$A_2 = \{ (x, y) \mid 0 \leq x^4 + y^4 - 1 - xy^2 \}$$

ja

$$A_3 = \{ (x, y) \mid 0 \leq 4 - x^4 - y^4 \}$$

ovat suljettuja. Siis näiden kolmen suljetun joukon leikkauksena A on suljettu.

Mainitsemme vielä yhden tärkeän jatkuvuuteen liittyvän käsitteen.

Määritelmä I.4.12. Olkoon $f : A \rightarrow B$ bijektio (eli injektio ja surjektio), missä $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $B \subset \mathbb{R}^m$. Jos f ja sen käänteiskuvaus $f^{-1} : B \rightarrow A$ ovat jatkuvia, sanotaan, että f on *homeomorfismi*. Joukkoja A ja B sanotaan keskenään *homeomorfisiksi*, jos on olemassa homeomorfismi $f : A \rightarrow B$.

I.5 Kompaktit joukot

Yhden reaalimuuttujan funktioiden teoriasta on tuttu tärkeä lause, jonka mukaan välillä $[a, b]$, missä $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, jatkuva reaalifunktio saa suurimman ja pienimmän arvon joissakin välin pisteissä. Selvästikään tässä ei ole oleellista, että määrittelyjoukko on nimenomaan väli (kun jatkuvuus määritellään edellä esitetyllä tavalla väliä yleisempien joukkojen tapauksessa). Mutta jos joukko $\Delta \subset \mathbb{R}$ on rajoittamaton, ts. sen alkioiden itseisrvojen joukko ei ole ylhäältä rajoitettu, esimerkiksi siinä määritelty identtinen kuvaus $x \mapsto x$ on rajoittamaton. Samoin, jos $\Delta \subset \mathbb{R}$ ei ole suljettu, siinä voidaan määritellä jatkuva rajoittamaton funktio. Sillä tällöin komplementissa $\mathbb{R} \setminus \Delta$ on piste a , joka ei ole sen sisäpiste. Määritellään $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla $f(x) = |x - a|^{-1}$. Funktio f on jatkuva, mutta ei rajoitettu, sillä koska a ei ole joukon $\mathbb{R} \setminus \Delta$ sisäpiste, jokaista $k \in \mathbb{N}$ vastaa sellainen $x_k \in \Delta$, että $|x_k - a| < \frac{1}{k}$, ja siis $f(x_k) > k$.

Sanomme, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *rajoitettu*, jos on sellainen luku $r > 0$, että $A \subset B(\mathbf{0}, r)$. Edellä esitetty päättely toimii ilmeisin muutoksin myös korkeammissa dimensioissa: jotta jokainen epätyhjässä joukossa $K \subset \mathbb{R}^n$ määritelty jatkuva reaalifunktio saisi suurimman ja pienimmän arvon (tai olisi edes rajoitettu), on välttämätöntä, että K on suljettu ja rajoitettu. Osoittautuu, että nämä ehdot myös riittävät. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljetut ja rajoitetut osajoukot voidaan karakterisoida tavalla, jolla yleisemmissäkin yhteyksissä määritellään ns. kompaktit joukot. Näin tehdään lauseessa I.5.4. Otamme käyttöön seuraavat sanonnat.

Määritelmä I.5.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko ja $(P_i)_{i \in \mathcal{I}}$ perhe $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja. Jos $A \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} P_i$, perhe $(P_i)_{i \in \mathcal{I}}$ on joukon A *peite*. Jos tässä $\mathcal{H} \subset \mathcal{I}$ ja myös $A \subset \bigcup_{i \in \mathcal{H}} P_i$, sanotaan, että $(P_i)_{i \in \mathcal{H}}$ on peitteen $(P_i)_{i \in \mathcal{I}}$ *osapeite* (joukolle A). Peite $(P_i)_{i \in \mathcal{I}}$ on *äärellinen*, jos indeksijoukko $\mathcal{I}$ on äärellinen. Joukon A peitettä $(P_i)_{i \in \mathcal{I}}$ sanotaan A :n *avoimeksi peitteeksi*, jos jokainen P_i on avoin.

Määritelmä I.5.2. Joukko $K \subset \mathbb{R}^n$ on *kompakti*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Esimerkki I.5.3. (a) Olkoon $(\mathbf{x}_k) \mathbb{R}^n$:ssä kohti pistettä $\mathbf{x}$ suppeneva jono. Näytetään, että joukko $A = \{\mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{x}\}$ on kompakti. Olkoon $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ A :n avoin peite. Erityisesti $\mathbf{x} \in U_{i_0}$ jollakin $i_0 \in \mathcal{I}$. Koska U_{i_0} on avoin, on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{N}$, että $\mathbf{x}_n \in U_{i_0}$ aina, kun $k \geq k_0$. Valitaan kutakin $k \in \{1, \dots, k_0 - 1\}$ kohti $i_k \in \mathcal{I}$ siten, että $x_k \in U_{i_k}$. Silloin

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{k_0-1} U_{i_k},$$

joten alkuperäisestä peitteestä saatiin äärellinen osapeite.

(b) Joukko $B = \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ ei ole kompakti. Sillä jos $U_k = (\frac{1}{2k}, \frac{1}{k})$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$, $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ on A :n avoin peite (aina $\frac{1}{k} \in U_k$), jolla ei ole äärellistä osapeitettä. Sillä jos $\{k_1, \dots, k_q\} \subset \mathbb{N}$ ja $m = \max_{1 \leq p \leq q} k_p$, niin $\frac{1}{2m} \notin \bigcup_{p=1}^q U_{n_p}$.

Tässä kumpikin joukoista A, B on rajoitettu. Joukko B ei ole suljettu, sillä 0 on siihen kuulumaton piste, jota kohti suppenee jono B pisteitä. Joukko A on vähällä vaivalla nähtävissä suljetuksi suoraan määritelmän nojalla. Se, että A on suljettu, mutta B ei ole, näkyy edellisen esimerkin nojalla myös seuraavasta keskeisestä lauseesta.

Lause I.5.4. Joukolle $K \subset \mathbb{R}^n$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- (i) K on kompakti;
- (ii) K on suljettu ja rajoitettu.

TODISTUS. (i) $\implies$ (ii): Oletetaan (i): Koska joukon K avoimella peitteellä $(B(\mathbf{0}, p))_{p \in \mathbb{N}}$ on äärellinen osapeite, on olemassa sellainen $p \in \mathbb{N}$, että $K \subset B(\mathbf{0}, p)$, joten K on rajoitettu. Jos taas K ei ole suljettu eli $\mathbb{R}^n \setminus K$ ei ole avoin, on olemassa komplementin $\mathbb{R}^n \setminus K$ piste $\mathbf{a}$, joka ei ole sen sisäpiste. Koska $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{B}(\mathbf{a}, \frac{1}{p}) = \{\mathbf{a}\}$, De Morganin lauseen mukaan perhe $(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(\mathbf{a}, \frac{1}{p}))_{p \in \mathbb{N}}$ on K :n avoin peite, joten sillä on äärellinen osapeite, mistä seuraa, että jollakin $p \in \mathbb{N}$, $\overline{B}(\mathbf{a}, \frac{1}{p}) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$, joten $\mathbf{a}$ onkin joukon $\mathbb{R}^n \setminus K$ sisäpiste. Tämä ristiriita osoittaa, että K on suljettu.

(ii) $\implies$ (i): Oletetaan (ii). Olkoon $(P_i)_{i \in \mathcal{I}}$ K :n avoin peite. Tehdään vastaoletus, että tällä ei ole K :n äärellistä osapeitettä. Koska K on rajoitettu, on olemassa sellaiset luvut $a_j \leq b_j$, että $K \subset [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Merkitään $I_j^{(1,0)} = [a_j, \frac{1}{2}(a_j + b_j)]$ ja $I_j^{(1,1)} = [\frac{1}{2}(a_j + b_j), b_j]$. Vastaoletuksesta seuraa, että joillakin $\alpha_j \in \{0, 1\}$ joukolla $K \cap (I_1^{(1,\alpha_1)} \times \dots \times I_n^{(1,\alpha_n)})$ ei ole alkuperäisestä peitteestä saatavaa äärellistä osapeitettä. Toistetaan tämä päättely puolittamalla nyt välit $I_j^{(1,\alpha_j)}$, jolloin saadaan välit $I_j^{(2,0)}$ ja $I_j^{(2,1)}$, $j = 1, \dots, n$. Taas joillakin $\alpha_j \in \{0, 1\}$ joukolla $K \cap (I_1^{(2,\alpha_1)} \times \dots \times I_n^{(2,\alpha_n)})$ ei ole alkuperäisestä peitteestä saatavaa äärellistä osapeitettä. Näin jatkaen saadaan induktiolla sellaiset nousevat lukujonot $(a_j^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ ja laskevat lukujonot $(b_j^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, että joillakin $\mathbf{x}_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \in K$ on voimassa $a_j^{(k)} \leq x_j^{(k)} \leq b_j^{(k)}$ ja $\lim_{k \rightarrow \infty} (b_j^{(k)} - a_j^{(k)}) = 0$, eikä millään $k \in \mathbb{N}$ joukolla $K \cap ([a_1^{(k)}, b_1^{(k)}] \times \dots \times [a_n^{(k)}, b_n^{(k)}])$ ole alkuperäisestä peitteestä saatavaa äärellistä osapeitettä. Reaalilukujen täydellisyysaksiooman tunnetun seurauksen mukaan jonot $(a_j^{(k)})$ ja $(b_j^{(k)})$ suppenevat, ja edellä todetun

nojalla nähdään, että $\lim_{k \rightarrow \infty} a_j^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_j^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)}$, $j = 1, \dots, n$. Olkoon x_j tämä yhteinen raja-arvo, ja merkitään $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Koska K on suljettu, lauseen I.3.5 mukaan $\mathbf{x} \in K$. Voidaan valita sellainen $i_0 \in \mathcal{I}$, että $\mathbf{x} \in P_{i_0}$. Koska P_{i_0} on avoin, riittävän suurella k :n arvolla se sisältää joukon $[a_1^{(k)}, b_1^{(k)}] \times \dots \times [a_n^{(k)}, b_n^{(k)}]$, mikä on ristiriidassa konstruktion kanssa. Siis vasta oletus on mahdoton. $\square$

Huomautus I.5.5. Edellistä lausetta sanotaan *Heinen-Borelin lauseeksi*.

Esimerkki I.5.6. (a) Avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikköpallon pinta

$$A = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1 \}$$

on kompakti. Sillä selvästi A on rajoitettu, ja se nähtiin suljetuksi esimerkeissä I.3.6 ja I.4.10.

(b) Esimerkissä I.4.11 nähtiin, että joukko

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 1 + xy^2 \leq x^4 + y^4 \leq 4 \}$$

on suljettu. Joukko A on rajoitettu, sillä jos $(x, y) \in A$, on $x^4 \leq 4$ ja $y^4 \leq 4$, joten $x^2 + y^2 \leq 2 + 2 = 4$. Koska A siis on suljettu ja rajoitettu, se on kompakti.

Myös seuraava kompaktiuden karakterisointi on toisinaan hyödyllinen.

Lause I.5.7. *Joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

- (i) A on kompakti;
- (ii) jokaisella jonolla joukossa A on kohti A :n pistettä suppeneva osajono.

TODISTUS. (i) $\implies$ (ii): Oletetaan (i). Olkoon $\mathbf{x}_k \in A$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tehdään vasta oletus: Mikään piste $\mathbf{x} \in A$ ei ole jonon $(\mathbf{x}_k)$ minkään osajonon raja-arvo. Silloin jokaista $\mathbf{x} \in A$ vastaa sellainen luku $\delta_{\mathbf{x}} > 0$, että palloympäristössä $B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}})$ on vain äärellinen määrä joukon $\{ \mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ pisteitä. (Perustelu: Jos jonkin pisteen $\mathbf{x} \in A$ jokaisessa palloympäristössä $B(\mathbf{x}, \delta)$ olisi ääretön määrä joukon $\{ \mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ pisteitä, voitaisiin valita $k_1 \in \mathbb{N}$ siten, että $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{k_1}) < 1$, ja yleisesti induktiolla $k_{p+1} > k_p$ siten, että $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{k_{p+1}}) < \frac{1}{p+1}$, jolloin saataisiin kohti pistettä $\mathbf{x}$ suppeneva osajono $(\mathbf{x}_{k_p})$ vastoin vasta oletusta.) Koska A on kompakti, on olemassa sellainen äärellinen joukko $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\} \subset A$, että $A \subset \bigcup_{i=1}^p B(\mathbf{y}_i, \delta_{\mathbf{y}_i})$. Tästä seuraa, että jonon $(\mathbf{x}_k)$ arvojen joukko on äärellinen, joten jokin arvo saadaan äärettömän monella indeksillä. Siis jonolle $(\mathbf{x}_k)$ saatiinkin suppeneva (vakio)osajono.

(ii) $\implies$ (i): Oletetaan (ii). Joukko A on rajoitettu, sillä muuten saataisiin A :n pistejono $(\mathbf{x}_k)$, jolle $\|\mathbf{x}_k\| \geq k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, ja tällaisella jonolla ei voi olla suppenevaa osajonoa. Olkoon nyt $(\mathbf{y}_k)$ suppeneva jono joukon A pisteitä ja $\mathbf{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{y}_k$. Oletuksen mukaan jokin jonon $(\mathbf{y}_k)$ osajono $(\mathbf{y}_{k_p})$ suppenee kohti A :n pistettä. Mutta osajonon raja-arvo on sama kuin alkuperäisen jonon raja-arvo, joten $\mathbf{y} \in A$. Lauseen I.3.5 nojalla A on suljettu. Koska A on suljettu ja rajoitettu, se on Heinen-Borelin lauseen I.5.4 mukaan kompakti. $\square$

I.6 Kompaktius ja jatkuvuus

Osoitamme ensin, että kompaktius säilyy jatkuvassa kuvauksessa.

Lause I.6.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti joukko. Jos $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on jatkuva kuvaus, niin A :n kuva $f(A)$ on kompakti.

TODISTUS. Olkoon $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ $f(A)$:n avoin peite. Jokainen $f^{-1}(U_i)$ on f :n jatkuvuuden nojalla avoin ja $A \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} f^{-1}(U_i)$, joten $(f^{-1}(U_i))_{i \in \mathcal{I}}$ on A :n avoin peite. Koska A on kompakti, on olemassa äärellinen $\mathcal{H} \subset \mathcal{I}$, jolle

$$A \subset \bigcup_{i \in \mathcal{H}} f^{-1}(U_i).$$

Tällöin $f(A) \subset \bigcup_{i \in \mathcal{H}} U_i$. Siis $f(A)$ on kompakti. $\square$

Välittömänä seurauksena saadaan:

Lause I.6.2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti joukko, $B \subset \mathbb{R}^m$ joukko ja $f : A \rightarrow B$ jatkuva bijektio. Silloin f on homeomorfismi.

TODISTUS. Osoitetaan lauseen I.4.8 avulla, että f :n käänteiskuvaus $f^{-1} : B \rightarrow A$ on jatkuva. Olkoon sitä varten $F \subset \mathbb{R}^n$ suljettu. Sen alkukuva kuvauksessa f^{-1} on sama kuin kompaktin joukon $F \cap A$ kuva kuvauksessa f . Lauseen I.6.1 nojalla $f(F \cap A)$ on kompakti ja siis suljettu. $\square$

Seuraava tulos on keskeisessä asemassa monissa sovelluksissa.

Lause I.6.3. Joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- (i) A on kompakti;
- (ii) jokainen jatkuva funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ saa pienimmän ja suurimman arvon, ts. on olemassa $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ joille $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{b})$ kaikilla $\mathbf{x} \in A$;
- (iii) jokainen jatkuva funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on rajoitettu, ts. $f(A)$ on $\mathbb{R}$:n rajoitettu osajoukko.

TODISTUS. (i) $\implies$ (ii): Oletetaan (i). Olkoon $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Lauseen I.6.1 nojalla $f(A)$ on kompakti ja siis lauseen I.5.4 nojalla suljettu ja rajoitettu. Olkoon $M = \sup f(A)$. Silloin $M \in f(A)$, sillä muuten vastoin supremumin ε -kriteeriä jollakin $\varepsilon > 0$ olisi $(M - \varepsilon, M + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus f(A)$ (koska $\mathbb{R} \setminus f(A)$ on avoin). Vastaavasti $\inf f(A) \in f(A)$.

Selvästi (ii) $\implies$ (iii).

(iii) $\implies$ (i): Oletetaan (iii). Osoitetaan, että A on suljettu ja rajoitettu, jolloin (i) seuraa lauseesta I.5.4. Jos A ei ole suljettu, on lauseen I.3.5 mukaan olemassa sellainen suppeneva jono $(\mathbf{x}_k)$ A :n pisteitä, että $\mathbf{x}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k \notin A$. Määritellään (selvästi jatkuva) funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{-1}$. Nyt $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = \infty$, joten f vastoin ehtoa (iii) on rajoittamaton. Jos taas A ei ole rajoitettu, kaavalla $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ määritelty jatkuva funktio on vastoin ehtoa (iii) rajoittamaton. $\square$

Huomautus I.6.4. Yleensä joukolle $A \subset \mathbb{R}^n$ jatkuva funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ voi luonnollisesti olla rajoitettu ilman, että se saa suurinta tai pienintä arvoa: olkoon vaikkapa $A = (0, 1)$ ja $f(x) = x$. Edellisessä lauseessa nähtiin, että jos jokainen jatkuva funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on rajoitettu, niin jokainen jatkuva funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ saa suurimman ja pienimmän arvon. Tämä seikka nähdään helposti suoraankin seuraavasti: Jos jatkuva funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ (joka siis oletuksen mukaan on rajoitettu) ei saa esim. suurinta arvoa, niin kaavalla $g(\mathbf{x}) = [M - f(\mathbf{x})]^{-1}$, missä $M = \sup\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A\}$, määritelty funktio on jatkuva olematta kuitenkaan rajoitettu, koska supremumin ε -kriteerin nojalla funktio $\mathbf{x} \mapsto M - f(\mathbf{x})$ saa mitä tahansa $\varepsilon > 0$ pienempiä positiivisia arvoja.

Esimerkki I.6.5. Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla

$$f(x, y) = \frac{\sin(x + e^{xy^2})}{1 + x^2 + y^4}.$$

Nyt $f(0, 0) = \sin 1 > 0$, ja koska osoittajan itseisarvo on aina korkeintaan 1, on $|f(x, y)| < \sin 1$, kun $x^2 + y^4 > (\sin 1)^{-1}$. Joukko

$$A = \{ (x, y) \mid x^2 + y^4 \leq (\sin 1)^{-1} \}$$

on kompakti, koska se on selvästi rajoitettu, ja se on suljettu suljetun joukon alkukuvana jatkuvassa kuvauksessa. Jatkuvana funktiona f saa A :ssa lauseen I.6.3 nojalla suurimman arvon. Tämä suurin arvo on vähintään $f(0, 0) = \sin 1$, joten se on samalla f :n suurin arvo koko $\mathbb{R}^2$:ssa.

Käsitlemme vielä eräitä myöhempiä teoreettisia tarkasteluja varten lyhyesti funktion tasaista jatkuvuutta.

Määritelmä I.6.6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on *tasaisesti jatkuva*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon$ aina, kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ ovat sellaisia, että $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$.

Selvästi tasaisesta jatkuvuudesta seuraa jatkuvuus. Seuraavassa esimerkissä nähdään, että käänteinen implikaatio ei yleisesti päde.

Esimerkki I.6.7. Määritellään jatkuva funktio $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Osoitetaan, että esim. lukua $\varepsilon = 1$ kohti ei ole olemassa tasaisen jatkuvuuden määritelmässä vaadittua lukua $\delta > 0$. Olkoon $\delta > 0$; osoitamme siis, että se ei kelpaa. Valitaan $k \in \mathbb{N}$ siten, että $(2k\pi + \frac{\pi}{2})^{-1} < \delta$, jolloin $|(2k\pi + \frac{\pi}{2})^{-1} - (2k\pi + 3\frac{\pi}{2})^{-1}| < (2k\pi + \frac{\pi}{2})^{-1} < \delta$, mutta $|f(2k\pi + \frac{\pi}{2})^{-1} - f(2k\pi + 3\frac{\pi}{2})^{-1}| = |1 - (-1)| > \varepsilon$.

Kuitenkin jokainen kompaktissa joukossa jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva. Tämä nähdään seuraavan hieman yleisemmän tuloksen avulla lauseessa I.6.9.

Lause I.6.8. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ jatkuva kuvaus. Olkoon $K \subset A$ kompakti joukko, jonka jokaisessa pisteessä f on jatkuva. Silloin jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon$ aina, kun $\mathbf{x} \in K$ ja $\mathbf{y} \in A$ ovat sellaisia, että $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$.

TODISTUS. Olkoon $\varepsilon > 0$. Jatkuvuuden nojalla jokaista $\mathbf{x} \in K$ vastaa sellainen $\delta_{\mathbf{x}} > 0$, että $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \frac{\varepsilon}{2}$ kun $\mathbf{y} \in A$ ja $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta_{\mathbf{x}}$. Koska K on kompakti, on olemassa äärellinen joukko $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\} \subset K$, jolle $K \subset \bigcup_{i=1}^p B(\mathbf{x}_i, \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_i})$. Merkitään $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_{\mathbf{x}_1}, \dots, \delta_{\mathbf{x}_p}\}$. Olkoot $\mathbf{x} \in K$ ja $\mathbf{y} \in A$ mitä tahansa pisteitä, joille $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. On olemassa sellainen $i \in \{1, \dots, p\}$, että $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_i, \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_i})$, ja koska myös

$$\|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_i} + \delta \leq \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_i} + \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_i} = \delta_{\mathbf{x}_i},$$

on

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_i)\| + \|f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{y})\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Lause I.6.9. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti joukko ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ jatkuva kuvaus. Silloin f on tasaisesti jatkuva.

TODISTUS. Väite seuraa heti edellisestä lauseesta.

□

I.7 Lineaarikuvausten matriisiesitys ja normi

Kuvausta $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sanotaan tunnetusti *lineaariseksi*, jos

$$T(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda T\mathbf{x} + \mu T\mathbf{y}$$

aina, kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Kaikkien lineaarikuvausten $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ joukolla käytämme merkintää $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ja merkitsemme $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = L(\mathbb{R}^n)$.

Olkoon $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Kirjoitamme $\mathbb{R}^n$:n j :nnen perusvektorin $\mathbf{e}_j^n$ kuvan muodossa

$$T\mathbf{e}_j^n = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{e}_i^m = (a_{1j}, \dots, a_{mj}).$$

Muodostamme tässä esiintyvistä (selvästi yksikäsitteisesti määräytyistä) luvuista a_{ij} matriisin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Näin määriteltä matriisia A sanotaan *lineaarikuvausten T matriisiksi*. Matriisin A pystyriveinä (eli pystyvektoreina) ovat määritelmän mukaan $\mathbb{R}^n$:n luonnollisen kannan alkioiden kuvat kuvauksessa T . (Muistammehan, että matriisimerkinnässä edellinen indeksi viittaa vaakariviin ja jälkimmäinen pystyriviin; erityisesti $m \times n$ -matriisissa on aina m vaaka- ja n pystyriviä.) Selvästi $\mathbb{R}^n$:n vektorit voidaan samastaa joko matriisien kanssa, joissa on vain yksi vaakarivi tai sellaisten kanssa, joissa on vain yksi pystyrivi. Periaatteessa kumpikin samastus on mahdollinen, mutta käytännön syistä valitsemme jälkimmäisen tavan, jolloin vektori $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ siis tulkitaan matriisiksi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

(Huomattakoon, että vektori $(x_1, \dots, x_n)$ on eri asia kuin matriisi $(x_1 \dots x_n)$, jonka merkinnässä ei käytetä pilkkuja. Pikkutarkasti ottaen edellinen on kuvaus joukosta $\{1, \dots, n\}$ $\mathbb{R}$:ään, kun taas jälkimmäinen on kuvaus joukosta $\{1\} \times \{1, \dots, n\}$ $\mathbb{R}$:ään.) Sopimuksestamme on mm. se etu, että lineaarikuvauksen soveltaminen vektoriin voidaan muodollisesti kirjoittaa kuvauksen matriisin ja matriisiksi tulkitun vektorin tulona. Siis

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

jos $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ on vektorin $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ kuva lineaarikuvauksessa T , jonka matriisi on

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Jos nimittäin $\mathbf{x}$:nä on perusvektori $\mathbf{e}_j^n$, tämä seikka näkyy heti T :n matriisin määritelmästä, ja yleinen tapaus seuraa T :n lineaarisuudesta ja siitä, että matriisilla kertominen on myös lineaarinen kuvaus. Tunnettua on, että lineaarikuvausten $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ja $S \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ yhdistetyn kuvauksen ST matriisi on kuvausten S ja T matriisien tulo (samassa järjestyksessä); itse asiassahan tämä seikka motivoi matriisitulon määritelmän.

Aikaisemmin on todettu, että $\mathbb{R}^n$:ssä määritellyllä normifunktiolla $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ on seuraavat ominaisuudet:

- (i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;
- (ii) $\|\mathbf{x}\| = 0$, jos ja vain jos $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- (iii) $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$ aina, kun $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$;
- (iv) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Missä tahansa vektoriavaruudessa määriteltyä nämä ehdot täyttävää funktiota sanotaan myös normiksi. Joukolla $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ nähdään helposti olevan vektoriavaruuden rakenne, kun reaalityyppillä kertominen ja lineaarikuvausten yhteenlasku määritellään luonnollisella tavalla:

$$(\lambda T)\mathbf{x} = \lambda(T\mathbf{x}),$$

$$(S + T)(\mathbf{x}) = S\mathbf{x} + T\mathbf{x}$$

kaikilla $S, T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Määrittelemme tässä jaksossa luonnollisen normin vektoriavaruuteen $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Aloitamme apulauseella.

Lemma I.7.1. Jos $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, ja (a_{ij}) on T :n matriisi, niin

$$\|T\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

aina, kun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}\| \leq 1$.

TODISTUS. Olkoon $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}\| \leq 1$. Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\|T\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \right],$$

joten

$$\|T\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}. \quad \square$$

Lemma I.7.1 osoittaa, että jokaista $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vastaa luku

$$\|T\| = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|T\mathbf{x}\|;$$

sanomme tätä lukua T :n normiksi. Määritelmästä seuraa välittömästi epäyhtälö

$$\|T\mathbf{x}\| \leq \|T\| \|\mathbf{x}\|$$

kaikille $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, onhan $\left\| T \left(\|\mathbf{x}\|^{-1} \mathbf{x} \right) \right\| \leq \|T\|$, kun $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ja nollavektorille epäyhtälö on ilmeinen.

Lause I.7.2. Olkoon (a_{ij}) lineaarikuvauksen $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ matriisi. Silloin

$$\max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}| \leq \|T\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

TODISTUS. Jälkimmäinen epäyhtälö seuraa heti lemmasta I.7.1 Edellisen todistamiseksi valitaan mielivaltainen $\mathbb{R}^n$:n luonnollisen kannan alkio $\mathbf{e}_j$ ja todetaan, että kaikilla $i = 1, \dots, m$

$$|a_{ij}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_{ij}^2} = \|T\mathbf{e}_j\| \leq \|T\|. \quad \square$$

Jätämme harjoitustehtäväksi sen todistamisen, että kuvaus $T \mapsto \|T\|$ todella on normi $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$:ssä, ts. täyttää jakson alussa luetellut ehdot (i) – (iv).

II Differentiaalilaskentaa

II.1 Osittaisderivaatoista

Yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisen funktion derivaatalla on erilaisia yleistyksiä. Tarkastelemme aluksi usean muuttujan funktion osittaisderivaattaa.

Määritelmä II.1.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ A :n sisäpiste. Jos kuvaukselle $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on olemassa raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(\mathbf{x})],$$

sitä sanotaan f :n *osittaisderivaataksi* j :nnen muuttujan x_j suhteen pisteessä $\mathbf{x}$.

Sille käytetään merkintöjä $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$, $f_{x_j}(\mathbf{x})$, $D_{x_j}f(\mathbf{x})$, $D_jf(\mathbf{x})$, $\partial_j f(\mathbf{x})$.

Huomautus II.1.2. Olkoot A ja $\mathbf{x}$ kuten edellisessä määritelmässä. Jos $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on kuvaus, jonka jokaisella komponentilla f_i $i = 1, \dots, m$, osittaisderivaatta $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ on olemassa, merkitsemme

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right)$$

ja sanomme tätä vektoria f :n osittaisderivaataksi j :nnen muuttujan x_j suhteen pisteessä $\mathbf{x}$. Muitakin edellisen määritelmän mukaisia merkintöjä voidaan käyttää myös vektorifunktion tapauksessa. Rajoitamme jatkossa osittaisderivaattojen tarkastelun yleensä tapaukseen $m = 1$.

Määritelmä II.1.3. Jos funktiolla $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on jollakin $\delta > 0$ jokaisessa joukon $B(\mathbf{a}, \delta) \subset A$ pisteessä $\mathbf{x}$ osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$, tulee $B(\mathbf{a}, \delta)$:ssa määritellyksi funktio $D_jf : B(\mathbf{a}, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ (eli f_{x_j} , $D_{x_j}f$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$). Jos tällöin funktiolla D_jf on jonkin muuttujan x_i suhteen osittaisderivaatta pisteessä $\mathbf{a}$, sitä

sanotaan f :n toiseksi eli toisen kertaluvun osittaisderivaataksi ja merkitään

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (\mathbf{a}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\mathbf{a}) = f_{x_j x_i} (\mathbf{a}) \\ &= D_{x_j x_i} f(\mathbf{a}) = D_{j i} f(\mathbf{a}) = \partial_{j i} f(\mathbf{a}).\end{aligned}$$

Vastaavasti määritellään induktiolla f :n k :nnen kertaluvun osittaisderivaatat

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_2} \partial x_{j_1}} (\mathbf{a})$$

pisteessä $\mathbf{a}$. (Näitä lausekkeita on kaikkiaan n^k kappaletta.)

Käytännössä osittaisderivaattojen määrääminen palautuu yhden reaalimuuttujan funktioiden derivoimiseen, kun pidetään muita kuin yhtä muuttujaa vakiona. Seuraava esimerkki osoittaa, että ei välttämättä ole voimassa esim. yhtälö

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (0, 0),$$

vaikka nämä molemmat toisen kertaluvun osittaisderivaatat olisivatkin olemassa.

Esimerkki II.1.4. Olkoon

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2},$$

jos $(x, y) \neq (0, 0)$, ja $f(0, 0) = 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2},\end{aligned}$$

kun $(x, y) \neq (0, 0)$, ja

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

Vastaavasti

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^4 - y^4 - 4x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

kun $(x, y) \neq (0, 0)$, ja

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Näin ollen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = -1$$

ja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = 1.$$

Siis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0).$$

Riittävän säännöllisillä funktioilla ei derivoimisjärjestys vaikuta toisen kertaluvun osittaisderivaattojen arvoihin:

Lause II.1.5. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Jos funktiolle $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ toisen kertaluvun osittaisderivaatat $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ovat olemassa jossakin pisteen $\mathbf{x} \in A$ avoimessa palloympäristössä ja ovat jatkuvia $\mathbf{x}$:ssä, niin*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}).$$

TODISTUS. Kun pidetään muita muuttujia kuin x_i :tä ja x_j :tä vakioina ja rajoitetaan tarkastelu näiden kahden muuttujan määräämään koordinaattitasoon, voidaan todistus palauttaa kahden muuttujan tapaukseen. Oletamme siis suoraan, että $n = 2$, ja käytämme merkintöjä x ja y x_j :n ja x_i :n sijasta sekä merkintää (x, y) $\mathbf{x}$:n sijasta. Olkoot $h \neq 0$ ja $k \neq 0$ (aluksi kiinteitä) reaalilukuja. Määritellään

$$g(t) = f(t, y + k) - f(t, y),$$

kun t on x :n ja $(x + h)$:n määräämällä suljetulla välillä. Oletetaan, että h ja k ovat itseisarvoltaan niin pieniä, että tämä ja kaikki seuraavat kaavat ovat järkeviä. Sovelletaan differentiaalilaskennan väliarvolauseetta, jonka mukaan x :n ja $(x + h)$:n välissä on sellainen luku ξ , että

$$g(x + h) - g(x) = g'(\xi)h.$$

Silloin

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y) &= g(x + h) - g(x) \\ &= g'(\xi)h = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) \right] h = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta)kh, \end{aligned}$$

missä η taas on väliarvolauseesta saatava y :n ja $(y + k)$:n välissä oleva luku. Mutta tässä tarkastelussa x ja y ovat symmetrisessä asemassa, joten vaihtamalla niiden roolit keskenään voidaan vastaavasti valita lukujen x ja $x + h$ välistä luku ϕ ja lukujen y ja $y + k$ välistä luku ψ siten, että

$$f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\phi, \psi)kh,$$

joten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta)kh = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\phi, \psi)kh,$$

ja koska $hk \neq 0$, on

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\phi, \psi).$$

Valitaan nyt edellä kullekin $p \in \mathbf{N}$ $\frac{1}{p}$ luvuiksi h ja k ja käytetään vastaaville luvuille ξ , η , ϕ , ψ merkintöjä ξ_p , η_p , ϕ_p , ψ_p . Silloin

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (\xi_p, \eta_p) = \lim_{p \rightarrow \infty} (\phi_p, \psi_p) = (x, y),$$

joten toisen kertaluvun osittaisderivaattojen jatkuvuusoletuksen ja lauseen I.4.5 nojalla

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi_p, \eta_p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\phi_p, \psi_p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y). \quad \square$$

II.2 Differentioituvuus ja lineaarinen derivaatta

Usean muuttujan funktion osittaisderivaattojen olemassaolo kertoo funktiosta oleellisesti vähemmän kuin derivaatan olemassaolo yhden reaalimuuttujan funktion tapauksessa. Tämä johtuu luonnollisesti siitä, että osittaisderivaattoihin vaikuttaa vain funktion arvojen muutos argumentin liikkua koordinaattiakselien suunnassa.

Esimerkki II.2.1. Olkoon

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

kun $(x, y) \neq (0, 0)$, ja $f(0, 0) = 0$. Funktio f ei ole jatkuva origossa (mikä näkyy esim., kun sijoitetaan $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$), mutta osittaisderivaatat ovat olemassa:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Määrittelemme tässä jaksossa differentioituvuuden käsitteen, joka osittaisderivaattoja paremmin ottaa huomioon kuvauksen käyttäytymisen annetun pisteen ympäristössä. Differentioituvuuteen liittyy lineaarinen derivaattakuvaus, joka toisella tavoin kuin osittaisderivaatta yleistää yhden muuttujan funktion derivaatan.

Pisteen $x \in \mathbb{R}$ ympäristössä määritellyn reaaliarvoisen funktion derivaatta pisteessä x määritellään tunnetusti lukuna

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

mikäli tämä raja-arvo on olemassa. Jos suoraan yritetään korvata x ja h $\mathbb{R}^n$:n alkiolla, erotusomäärä ja sen raja-arvo menettävät merkityksensä. Sen sijaan luvun $f'(x)$ määrittelemä lineaarikuvaus $h \mapsto f'(x)h$ on käsite, joka voidaan yleistää.

Edellä mainittu yhden muuttujan funktion differentioituvuuden määrittelevä ehto voidaan esittää seuraavassa ekvivalentissa muodossa: On olemassa sellainen $a \in \mathbb{R}$, että

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a \right| = 0$$

eli yhtäpitävästi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - ah|}{|h|} = 0.$$

Koska lineaarikuvaukset $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ovat samat kuin kuvaukset $h \mapsto ah$, missä $a \in \mathbb{R}$, tämä ehto voidaan edelleen ilmaista vaatimalla, että on sellainen lineaarikuvaus $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, että

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Th|}{|h|} = 0.$$

Tämä muotoilu voidaan yleistää vektorimuuttujan vektoriarvoiselle funktiolle, kun itseisarvo korvataan normilla.

Vektorimuuttujan funktion raja-arvo voidaan määritellä samaan tapaan kuin reaalimuuttujan funktionkin tilanteessa. Tarvitsemme vain seuraavaa tapautta:

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukossa $A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ määritellylle $\mathbb{R}^m$ -arvoiselle funktiolle ψ , missä $\mathbf{x}_0$ on A :n sisäpiste, on

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \psi(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m,$$

jos ja vain jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta > 0$, että $\|\psi(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| < \varepsilon$ aina, kun $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ ja $\mathbf{x} \in A$. Näiden valmistelujen jälkeen esitämme usean muuttujan funktion differentioituvuuden määritelmän.

Määritelmä II.2.2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x}$ A :n sisäpiste. Sanomme, että kuvaus $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on *differentioituva* pisteessä $\mathbf{x}$, jos on olemassa sellainen lineaarikuvaus $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, että

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - T\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Seuraavassa lauseessa esitetään määritelmän ehdon kanssa yhtäpitävä usein käyttökelpoinen muotoilu (jota käytämme jatkossa yleensä tähän lauseeseen viittaamatta).

Lause II.2.3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x}$ A :n sisäpiste. Kuvaus $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$, jos ja vain jos on olemassa sellainen lineaarikuvaus $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ja sellainen jossakin $\mathbb{R}^n$:n origon palloympäristössä $B(\mathbf{0}, r)$ määritelty kuvaus $\psi : B(\mathbf{0}, r) \rightarrow \mathbb{R}^m$, että

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \psi(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$$

ja

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = T\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \psi(\mathbf{h})$$

aina, kun $\mathbf{h} \in B(\mathbf{0}, r)$. Tällöin määritelmässä II.2.2 esiintyvä T kelpaa tässä lauseessa esiintyväksi T :ksi ja kääntäen.

TODISTUS. Oletetaan ensin määritelmän II.2.2 ehto. Valitaan $r > 0$ siten, että $B(\mathbf{x}, r) \subset A$ ja määritellään $\psi : B(\mathbf{0}, r) \rightarrow \mathbb{R}^m$ asettamalla $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ja

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} [f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - T\mathbf{h}]$$

muuten. Välittömästi nähdään, että tämä ψ täyttää lauseen vaatimuksen. Kääntäen, jos lauseen ehto on voimassa ja $0 < \|\mathbf{h}\| < r$, on

$$\frac{\|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - T\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = \|\psi(\mathbf{h})\| \rightarrow 0,$$

kun $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. □

Lauseessa ei ole merkitystä sillä, minkä arvon ψ saa origossa, ja tarvittaessa voidaan vaatia esim., että $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Lause II.2.4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x}$ A :n sisäpiste. Jos kuvaus

$$f = (f_1, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$$

on differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$, niin määritelmässä II.2.2 ja lauseessa II.2.3 esiintyvä lineaarikuvaus T on yksikäsitteisesti määrätty, ja jos (a_{ij}) on sen matriisi, niin

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

kaikilla $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

TODISTUS. Lauseen II.2.3 nojalla riittää käsitellä tilannetta, jossa T on jokin lauseessa II.2.3 mainitun ehdon täyttävä lineaarikuvaus ja (a_{ij}) sen matriisi. Jos merkitään $\mathbf{h} = (0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0)$, missä j :nnellä paikalla on $h_j \neq 0$, on jakson I.7 tarkastelujen nojalla

$$\begin{aligned} \frac{f_i(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x})}{h_j} &= \frac{1}{h_j} [T\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \psi(\mathbf{h})] \cdot \mathbf{e}_i^m \\ &= a_{ij} + \frac{\|\mathbf{h}\|}{h_j} \psi_i(\mathbf{h}), \end{aligned}$$

missä $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m) : B(\mathbf{0}, r) \rightarrow \mathbb{R}^m$ on kuvaus, jolle $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \psi(\mathbf{h}) = \mathbf{0}$. Koska

$$\left| \frac{\|\mathbf{h}\|}{h_j} \psi_i(\mathbf{h}) \right| = |\psi_i(\mathbf{h})| \leq \|\psi(\mathbf{h})\| \rightarrow 0,$$

kun $|h_j| = \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$, on

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}).$$

Tästä seuraa erityisesti, että T :n matriisi ja siis itse T on yksikäsitteisesti määrätty. $\square$

Määritelmä II.2.5. Määritelmän II.2.2 tilanteessa (edellisen lauseen mukaan yksikäsitteisesti määrättyä) lineaarikuvausta $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sanotaan pisteessä $\mathbf{x}$ differentioituvan kuvauksen f derivaataksi (tai *Fréchet'n derivaataksi*) pisteessä $\mathbf{x}$, ja sille käytetään merkintää $Df(\mathbf{x})$. Derivaatan $Df(\mathbf{x})$ matriisia sanotaan f :n *Jacobin matriisiksi* (pisteessä $\mathbf{x}$).

Lauseen II.2.4 nojalla edellä mainittu Jacobin matriisi on

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Esimerkki II.2.6. Määritellään kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kaavalla $f(x, y, z) = (x^2 + y, xyz)$. Osoitamme, että f on differentioituva jokaisessa pisteessä (x, y, z) . Ainoa mahdollinen ehdokas derivaataksi pisteessä (x, y, z) on lineaarikuvaus T , jonka matriisi on

$$\begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}.$$

Vektorille $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ saadaan yksinkertaisella laskulla

$$f(x + h_1, y + h_2, z + h_3) - f(x, y, z) - T\mathbf{h} = (h_1^2, yh_1h_3 + zh_1h_2 + h_1h_2h_3).$$

Näin ollen lauseen I.1.1 (c) nojalla

$$\begin{aligned} & \frac{\|f(x + h_1, y + h_2, z + h_3) - f(x, y, z) - T\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} \\ &= \frac{\|(h_1^2, yh_1h_3 + zh_1h_2 + h_1h_2h_3)\|}{\|\mathbf{h}\|} \\ &\leq |h_2| + |yh_1| + |zh_1| + |h_1h_3| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, sillä esim. $|h_2| \leq \|\mathbf{h}\|$.

Huomautus II.2.7. Olkoon edellä $m = 1$, jolloin siis tarkastellaan joukossa $A \subset \mathbb{R}^n$ määriteltyä reaaliarvoista funktiota f . Oletetaan, että f on differentioituva pisteessä $\mathbf{x} \in A$. Nyt f :n Jacobin matriisi pisteessä $\mathbf{x}$ on $1 \times n$ -matriisi

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right).$$

Vastaavaa vektoria

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$$

sanotaan f :n *gradientiksi* pisteessä $\mathbf{x}$. Tässä tapauksessa

$$Df(\mathbf{x})\mathbf{h} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}$$

kaikilla $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, kuten heti nähdään matriisitulon määritelmästä ja jakson I.7 tarkasteluista. (Merkitsimme tässä sisätuloa pisteellä.)

Huomautus II.2.8. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$. Kuvaus

$$f = (f_1, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$$

on differentioituva pisteessä $\mathbf{x} \in A$, jos ja vain jos jokainen komponenttifunktio f_i on differentioituva $\mathbf{x}$:ssä (harjoitustehtävä), ja selvästi tällöin derivaatan $Df(\mathbf{x})$ matriisissa ovat komponenttifunktioiden f_i gradientit vaakavektoreina. Tästä syystä differentioituvuustarkasteluissa voidaan usein rajoittua reaaliarvoisiin funktioihin.

Lause II.2.9. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja kuvaus $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ differentioituva pisteessä $\mathbf{x} \in A$. Silloin f on jatkuva $\mathbf{x}$:ssä.*

TODISTUS. Lauseen II.2.3 mukaisesta kehitelmästä saadaan

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| &= \|T(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| \\ &\leq \|T\| \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \|\psi(\mathbf{y} - \mathbf{x})\|, \end{aligned}$$

mistä väite heti seuraa. □

Esimerkki II.2.10. Esimerkissä II.2.1 tarkasteltu funktio ei ole differentioituva origossa, koska se ei ole siinä jatkuva. Kuitenkin osittaisderivaatat ovat olemassa kaikkialla: origossa esimerkin II.2.1 mukaan ja sen ulkopuolella tavallisten derivoimissääntöjen nojalla.

Edellinen esimerkki osoittaa, että osittaisderivaattojen olemassaolo ei ole riittävä ehto differentioituvuudelle. Kuitenkin on voimassa seuraava tulos, jota käytännössä useimmiten käytetään differentioituvuuden toteamiseen.

Lause II.2.11. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x}$ A :n sisäpiste. Oletetaan, että funktiolla $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ on jossakin pisteen $\mathbf{x}$ avoimessa palloympäristössä osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$, jotka ovat jatkuvat pisteessä $\mathbf{x}$. Silloin f on differentioituva $\mathbf{x}$:ssä.

TODISTUS. Rajoitutaan lauseessa mainittuun palloympäristöön $B(\mathbf{x}, r)$. Kun $\|\mathbf{h}\| < r$, erotus $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$ voidaan kirjoittaa seuraavassa muodossa (missä $\mathbf{x} = \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{h} = \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) &= f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{j=1}^n [f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h_j, \dots, x_n + h_n) \\ &\quad - f(x_1, \dots, x_j, x_{j+1} + h_{j+1}, \dots, x_n + h_n)]. \end{aligned}$$

Otetaan käyttöön apufunktiot ϕ_j , $j = 1, \dots, n$, joille

$$\phi_j(t) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1} + h_{j+1}, \dots, x_n + h_n),$$

jolloin ϕ_j täyttää väliarvolauseen oletukset välillä, jonka päätepisteet ovat x_j ja $x_j + h_j$ (tapauksessa $h_j \neq 0$), joten x_j :n ja $x_j + h_j$:n välissä on (tapauksessa $h_j \neq 0$, ja jos $h_j = 0$, voidaan valita $\xi_j = x_j$) sellainen ξ_j , että

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n [\phi_j(x_j + h_j) - \phi_j(x_j)] = \sum_{j=1}^n \phi'_j(\xi_j) h_j \\ &= \sum_{j=1}^n D_j f(x_1, \dots, x_{j-1}, \xi_j, x_{j+1} + h_{j+1}, \dots, x_n + h_n) h_j \\ &= \sum_{j=1}^n [D_j f(\mathbf{x}) + \psi_j(\mathbf{h})] h_j = \sum_{j=1}^n D_j f(\mathbf{x}) h_j + \|\mathbf{h}\| \psi(\mathbf{h}), \end{aligned}$$

missä kullakin $\mathbf{h}$, jolla $\|\mathbf{h}\| < r$, funktioiden ψ_j arvot $\psi_j(\mathbf{h})$ on määritelty lukujen ξ_j valintojen avulla osittaisderivaattojen arvojen erotuksena:

$$\psi_j(\mathbf{h}) = D_j f(x_1, \dots, x_{j-1}, \xi_j, x_{j+1} + h_{j+1}, \dots, x_n + h_n) - D_j f(\mathbf{x}),$$

ja on merkitty

$$\psi(\mathbf{h}) = \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \sum_{j=1}^n \psi_j(\mathbf{h}) h_j.$$

Silloin osittaisderivaattojen jatkuvuusoletuksen nojalla

$$|\psi(\mathbf{h})| \leq \sum_{j=1}^n |\psi_j(\mathbf{h})| \rightarrow 0,$$

kun $\mathbf{h} \rightarrow 0$. Siis $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$ on lauseessa II.2.3 tarkasteltua muotoa. □

Esimerkki II.2.12. Esimerkissä II.2.6 perusteltiin funktion f differentioituvuus suoraan määritelmän nojalla. Koska osittaisderivaatat ovat jatkuvat, sama nähdään välittömästi edellisen lauseen avulla.

Huomautus II.2.13. Edellä on nähty, että seuraavat implikaatiot ovat voimassa:

- (i) osittaisderivaattojen jatkuvuudesta seuraa differentioituvuus;
- (ii) differentioituvuudesta seuraa jatkuvuus;
- (iii) differentioituvuudesta seuraa osittaisderivaattojen olemassaolo.

Mitään muita implikaatioita kuin nämä (ja näistä välittömästi seuraavat) ei mainittujen ominaisuuksien välillä ole voimassa (jos $n \geq 2$). Yhden reaali-muuttujan funktioillehan mukaan differentioituvuus on sama asia kuin (osit-tais)derivaatan olemassaolo, mutta siinäkin tilanteessa ei jatkuvuudesta seur-raa differentioituvuus eikä differentioituvuudesta derivaattafunktion jatkuvuus.

II.3 Jatkovasti differentioituvat ja C^p -luokan funktiot

Seuraavassa määritelmässä mitataan eri pisteissä otettujen derivaattojen välistä etäisyyttä lineaarikuvauksen normin avulla.

Määritelmä II.3.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x}$ A :n sisäpiste. Jos kuvaus $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on differentioituva jossakin $\mathbf{x}$:n avoimessa palloympäristössä, ja

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \|Df(\mathbf{y}) - Df(\mathbf{x})\| = 0,$$

sanotaan, että f on *jatkovasti differentioituva* $\mathbf{x}$:ssä. Jos A on avoin ja f on jatkovasti differentioituva jokaisessa A :n pisteessä, sanotaan, että f on jatku-vasti differentioituva (A :ssa).

Toisin sanoen f on jatkovasti differentioituva $\mathbf{x}$:ssä, jos ja vain jos derivaat-takuvaus $Df(\mathbf{y})$ on olemassa jokaisella $\mathbf{y}$ jossakin $\mathbf{x}$:n ympäristössä ja kuvaus $\mathbf{y} \mapsto Df(\mathbf{y})$ on jatkuva $\mathbf{x}$:ssä jaksossa I.7 määritellyn lineaarikuvauksnormin suhteen. Käytännössä normin käyttö voidaan kuitenkin välttää, kuten seuraava tulos osoittaa.

Lause II.3.2. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja*

$$f = (f_1, \dots, f_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$$

kuvaus. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- (i) f on jatkovasti differentioituva;
- (ii) jokaisella komponenttifunktiolla f_i , $i = 1, \dots, m$, on A :ssa jatkuvat osit-taisderivaatat $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$.

TODISTUS. (i) $\implies$ (ii): Oletetaan, että f on jatkovasti differentioituva. Lauseen II.2.4 nojalla kaikki osittaisderivaatat $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, ovat ole-massa A :ssa. Olkoon nyt $\mathbf{x} \in A$. Lauseista II.2.4 ja I.7.2 seuraa, että kaikilla $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right| \leq \|Df(\mathbf{y}) - Df(\mathbf{x})\|,$$

mistä seuraa osittaisderivaattojen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ jatkuvuus $\mathbf{x}$:ssä.

(ii) $\implies$ (i): Oletetaan (ii). Lauseesta II.2.11 seuraa huomautuksen II.2.8 nojalla, että f on differentioituva jokaisessa A :n pisteessä. Olkoon $\mathbf{x} \in A$. Lauseista II.2.4 ja I.7.2 seuraa, että

$$\|Df(\mathbf{y}) - Df(\mathbf{x})\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right)^2},$$

mistä osittaisderivaattojen jatkuvuuden nojalla nähdään, että

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \|Df(\mathbf{y}) - Df(\mathbf{x})\| = 0. \quad \square$$

Edellinen lause antaa aiheen seuraavaan yleiseen määritelmään:

Määritelmä II.3.3. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $p \in \mathbf{N}$. Sanomme, että kuvaus $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on C^p -luokan kuvaus eli C^p -kuvaus, jos f :n jokaisella komponenttifunktiolla on p :nnen kertaluvun jatkuvat osittaisderivaatat A :ssa. Jos f on C^p -kuvaus jokaisella $p \in \mathbf{N}$, sanotaan, että f on C^∞ -luokan kuvaus eli C^∞ -kuvaus.*

II.4 Suunnattu derivaatta ja sen yhteys gradienttiin

Yleistämme nyt osittaisderivaatan käsitteen. Tyydymme tarkastelemaan reaaliarvoisia funktioita.

Määritelmä II.4.1. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x}$ A :n sisäpiste. Olkoon $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vektori, jolle $\|\mathbf{u}\| = 1$. Jos funktiolle $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on olemassa raja-arvo*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})],$$

sitä sanotaan f :n *suunnatuksi derivaataksi* pisteessä $\mathbf{x}$ yksikkövektorin $\mathbf{u}$ suuntaan, ja sille käytetään merkintöjä $\partial_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x})$, $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$.

Esimerkki II.4.2. Valitaan edellä $\mathbf{u}$:ksi luonnollisen kannan vektori $\mathbf{e}_j$. Silloin määritelmän mukaan

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}).$$

Käytännössä tarkasteltavat funktiot ovat yleensä differentioituvia, ja niille suunnattu derivaatta on helppo laskea huomautuksessa II.2.7 määritellyn gradienttivektorin

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$$

ja $\mathbf{u}$:n sisätulona:

Lause II.4.3. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x}$ A :n sisäpiste. Olkoon $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ vektori, jolle $\|\mathbf{u}\| = 1$. Jos funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on differentioituva $\mathbf{x}$:ssä, niin suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ on olemassa ja*

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) u_j.$$

TODISTUS. Lauseen II.2.4 mukaan osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ ovat olemassa ja saadaan seuraava kehitelmä

$$f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) h u_j + \|h\mathbf{u}\| \psi(h\mathbf{u}),$$

missä $\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \psi(\mathbf{k}) = 0$. (Kehitelmä on voimassa, kun $h \in \mathbb{R}$ ja $|h|$ on kyllin pieni.) Oletetaan, että $h \neq 0$ ja jaetaan h :lla, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})] &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) u_j + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \|\mathbf{u}\| \psi(h\mathbf{u}) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) u_j. \quad \square \end{aligned}$$

Suunnatun derivaatan geometrinen merkitys on helppo havainnollistaa kahden muuttujan funktioille: Ajatellaan (riittävän säännöllisen) reaaliarvoisen funktion $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ kuvaajaa pintana $x_1 x_2 x_3$ -koordinaatistossa. Yksikkövektori $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{x}$ määräävät suoran

$$L = \{ \mathbf{x} + t\mathbf{u} \mid t \in \mathbb{R} \}.$$

Asetetaan x_3 -akselin suuntainen (eli ”pystysuora”) taso tämän suoran kautta. Kun suora L samastetaan reaaliakselin (tässä t -akselin) kanssa siten, että vektorin $\mathbf{u}$ suunta on t :n kasvusuunta ja $\mathbf{x}$ on origossa, tulee suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ merkitsemään sen funktion derivaattaa origossa, jonka kuvaajana on edellä mainitun pystysuoran tason ja funktion f kuvaajapinnan leikkaus. Näin suunnattu derivaatta kuvaa funktion f kasvunopeutta (etumerkin huomioon ottaen) vektorin $\mathbf{u}$ suunnassa. Sama tulkinta pätee n :n muuttujan funktioille, vaikka kuvan piirtäminen on vähän vaikeampaa. Suunnatun derivaatan määritelmässä oli tärkeää käyttää yksikkövektoria, jotta tämä tulkinta olisi mahdollinen (eli ”mittakaava” olisi oikea).

Seuraava lause osoittaa, että gradienttivektorin määräämä suunta on erikoisasemassa: Differentioituva funktio kasvaa jyrkimmin gradientin suuntaan ja vähenee jyrkimmin sille vastakkaiseen suuntaan.

Lause II.4.4. *Olko $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x}$ A :n sisäpiste. Olko funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$, ja olko $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vektori, jolle $\|\mathbf{u}\| = 1$. Silloin*

(a)

$$|D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})| \leq \|\nabla f(\mathbf{x})\|;$$

(b)

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\|,$$

jos ja vain jos $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{u}$ jollakin $\lambda \geq 0$;

(c)

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = -\|\nabla f(\mathbf{x})\|,$$

jos ja vain jos $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{u}$ jollakin $\lambda \leq 0$.

TODISTUS. (a): Lauseen II.4.3 ja Cauchyn-Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$|D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})| = |\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}| \leq \|\nabla f(\mathbf{x})\|,$$

koska $\|\mathbf{u}\| = 1$.

(b),(c): Kuten lauseen I.1.1 jälkeen todettiin, edellä Cauchyn-Schwarzin epäyhtälössä pätee yhtälö, jos ja vain jos $\nabla f(\mathbf{x})$ ja $\mathbf{u}$ ovat lineaarisesti riippuvia eli $\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{u}$ jollakin $\lambda \in \mathbb{R}$, koska $\mathbf{u} \neq 0$. Jos näin on ja $\lambda \neq 0$, on

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \frac{1}{\lambda} \nabla f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2,$$

joten $\lambda > 0$, jos ja vain jos $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = |D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})|$. Tapaus $\lambda = 0$ on triviaali. $\square$

Huomautus II.4.5. Lauseen II.4.4 tilanteessa $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = 0$, jos ja vain jos $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = 0$ eli vektorit $\nabla f(\mathbf{x})$ ja $\mathbf{u}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

II.5 Yhdistetyn kuvauksen differentioituvuus ja derivaatta

Oletamme seuraavassa lauseessa, että $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ja $g = (g_1, \dots, g_k) : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ ovat kuvauksia, missä $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $V \subset \mathbb{R}^m$ ovat avoimia joukkoja. Oletetaan vielä, että $f(U) \subset V$, jolloin voidaan määritellä yhdistetty kuvaus

$$g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad (g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in U.$$

(Käytännössä nämä oletukset saadaan toisinaan voimaan vain rajoittamalla funktioiden määrittelyalueita sopivasti. Koska differentioituvuus on ”lokaali” ominaisuus, tämä ei tuota ongelmia.) Lauseessa II.5.1 esitettävää yhdistetyn kuvauksen derivaatan kaavaa sanotaan *ketjusäännöksi*.

Lause II.5.1. Jos f on differentioituva pisteessä $\mathbf{x} \in U$ ja g on differentioituva pisteessä $f(\mathbf{x})$, niin $g \circ f$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$, ja

$$D(g \circ f)(\mathbf{x}) = Dg(f(\mathbf{x})) \circ Df(\mathbf{x}).$$

Erityisesti yhdistetyn kuvauksen

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k) = g \circ f$$

Jacobin matriisi

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_k}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial \phi_k}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial \phi_k}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

pisteessä $\mathbf{x}$ on g :n Jacobin matriisin (pisteessä $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$) ja f :n Jacobin matriisin (pisteessä $\mathbf{x}$) tulo

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(\mathbf{y}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\mathbf{y}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(\mathbf{y}) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_m}(\mathbf{y}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(\mathbf{y}) & \frac{\partial g_k}{\partial y_2}(\mathbf{y}) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(\mathbf{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

TODISTUS. Merkitään $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ ja $\phi = g \circ f$. Kun $\|\mathbf{h}\|$ on kyllin pieni, on

$$\phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \phi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{y} + \mathbf{k}) - g(\mathbf{y}),$$

missä $\mathbf{k} = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$. Siis f :n jatkuvuuden nojalla on jokaisella normiltaan kyllin pienellä $\mathbf{h}$:lla $\phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \phi(\mathbf{x}) = Dg(\mathbf{y})\mathbf{k} + \|\mathbf{k}\| \eta(\mathbf{k})$, missä $\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \eta(\mathbf{k}) = 0$. Siis

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \phi(\mathbf{x}) &= Dg(\mathbf{y}) [Df(\mathbf{x})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \psi(\mathbf{h})] + \|\mathbf{k}\| \eta(\mathbf{k}) \\ &= Dg(\mathbf{y})(Df(\mathbf{x})\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\| \left[Dg(\mathbf{y})(\psi(\mathbf{h})) + \frac{\|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{h}\|} \eta(\mathbf{k}) \right], \end{aligned}$$

jos $\|\mathbf{h}\| \neq 0$ on kyllin pieni. (Tässä $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \psi(\mathbf{h}) = 0$.) Riittää siis näyttää, että $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \varepsilon(\mathbf{h}) = 0$, missä

$$\varepsilon(\mathbf{h}) = Dg(\mathbf{y})(\psi(\mathbf{h})) + \frac{\|\mathbf{k}\|}{\|\mathbf{h}\|} \eta(\mathbf{k}),$$

kun $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$. Koska $\mathbf{k} = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = Df(\mathbf{x})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \psi(\mathbf{h})$, on $\|\mathbf{k}\| \leq \|Df(\mathbf{x})\| \|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{h}\| \|\psi(\mathbf{h})\|$, joten

$$\|\varepsilon(\mathbf{h})\| \leq \|Dg(\mathbf{y})\| \|\psi(\mathbf{h})\| + (\|Df(\mathbf{x})\| + \|\psi(\mathbf{h})\|) \|\eta(\mathbf{k})\| \rightarrow 0,$$

kun $\mathbf{h} \rightarrow 0$, sillä $\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \|\eta(\mathbf{k})\| = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \|\eta(f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}))\| = 0$, koska f on jatkuva $\mathbf{x}$:ssä. $\square$

Huomautus II.5.2. Pidetään edellisen lauseen oletukset voimassa. Matriisitulon määritelmästä saadaan yhdistetyn kuvauksen

$$g \circ f = \phi = (\phi_1, \dots, \phi_k)$$

komponenttien osittaisderivaattojen laskemiseksi kaava

$$\frac{\partial \phi_\nu}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_\nu}{\partial y_i}(f(\mathbf{x})) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}).$$

Koska vektoriarvoisen ulkofunktion g tutkiminen palautuu komponenttifunktioihin g_ν , riittää yleensä tarkastella tapausta $k = 1$. Silloin siis g on reaaliarvoinen, ja voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(\mathbf{x})) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \\ &= \nabla g(f(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Toisin sanoen osittaisderivaatta $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ on gradientin $\nabla g(f(\mathbf{x}))$ ja vektorifunktion f osittaisderivaattavektorin

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \right)$$

sisätulo.

Esimerkki II.5.3. Olkoot jollakin pisteen $x \in \mathbb{R}$ sisältävällä avoimella välillä määritellyt reaaliarvoiset funktiot $f_1, \dots, f_m$ derivoituvia pisteessä x . Määritellään funktio $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$g(y_1, \dots, y_m) = \prod_{k=1}^m y_k.$$

Silloin

$$\frac{\partial g}{\partial y_k}(y_1, \dots, y_m) = \prod_{i \neq k, 1 \leq i \leq m} y_i.$$

Koska kukin $\frac{\partial g}{\partial y_k}$ on jatkuva ja siis g on differentioituva, voidaan soveltaa ketjusääntöä. Siis

$$\frac{d}{dx} \prod_{k=1}^m f_k(x) = \sum_{k=1}^m \left(\prod_{i \neq k, 1 \leq i \leq m} f_i(x) \right) f'_k(x).$$

Näin saatiin ketjusäännön avulla todistus tulon derivoimissäännölle.

II.6 Divergenssi ja roottori

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukossa määritellyn reaaliarvoisen funktion f gradientti pisteessä $\mathbf{x}$, jossa osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$, ovat olemassa, määritellään vektorina

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right).$$

(Aikaisemmin gradientti on esiintynyt differentioituvuuden yhteydessä, mutta sen määrittelyyn osittaisderivaattojen olemassaolo riittää.) Gradientille käytetty merkintä $\nabla f(\mathbf{x})$ voidaan selittää seuraavalla puhtaasti muodollisella (joskin täsmälliseksi tulkittavissa olevalla) tarkastelulla. Määritellään luonnollisen kannan alkioiden $\mathbf{e}_j$ ja osittaisderivaattaoperaattoreiden $\frac{\partial}{\partial x_j}$ avulla ”symbolinen vektori” *nabla*:

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

eli

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

jolla ”operointi” kuvaa reaaliarvoisen funktion f vektoriarvoiseksi n -komponenttiseksi funktioksi (eli ”vektorikentäksi”) ∇f .

Oletamme tämän jakson loppuosassa, että vektoriarvoisen kuvauksen

$$f = (f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$$

(missä siis maaliavaruuden dimensio on nimenomaan n) komponenttien ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ovat olemassa A :ssa. Jos muodoste-

taan ∇ :n ja f :n ”pistetulo”, saadaan f :n *divergenssi* A :ssa määriteltynä reaaliarvoisena funktiona eli ”skalaarikenttänä”

$$\begin{aligned}\operatorname{div} f &= \nabla \cdot f \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot (f_1, \dots, f_n) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.\end{aligned}$$

Tapauksessa $n = 3$ määritellään muodollisesti vektoritulon eli ristitulon kaavalla differentioituvan vektorikentän $f = (f_1, f_2, f_3)$ *roottori* vektorikenttänä

$$\begin{aligned}\nabla \times f &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\ &= (D_2 f_3 - D_3 f_2, D_3 f_1 - D_1 f_3, D_1 f_2 - D_2 f_1).\end{aligned}$$

Muita merkintöjä roottorille ovat $\operatorname{rot} f$ ja $\operatorname{curl} f$. Edellä tarkastelluissa tilanteissa sanotaan vektorikenttää *lähteettömäksi*, jos sen divergenssi häviää identtisesti, ja *pyörteettömäksi*, jos taas roottori on identtisesti nolla. Divergenssin ja roottorin käsitteet tulevat selvemmin ymmärrettäviksi yleisen differentiaali-muotojen teorian yhteydessä, jota emme tässä esityksessä kuitenkaan käsittele.

II.7 Väliarvolause ja sen soveltaminen virheen arviointiin

Yhden reaalimuuttujan funktioiden differentiaalilaskennan väliarvolauseella on seuraava yleistys usean muuttujan funktioille:

Lause II.7.1. (Väliarvolause) *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, joka sisältää pisteitä $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$ ja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in U$ yhdistävän janan*

$$I = \{ (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \mid 0 \leq t \leq 1 \}.$$

Jos f on U :ssa differentioituva reaaliarvoinen funktio, on jollekin $\mathbf{p} \in I \setminus \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ voimassa

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{p})(y_j - x_j) \quad (= \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})).$$

TODISTUS. Merkitään

$$\phi(t) = f((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}),$$

kun $0 \leq t \leq 1$. Funktio ϕ on jatkuva suljetulla välillä $[0, 1]$ ja lauseen II.5.1 nojalla differentioituva avoimella välillä $(0, 1)$. (Itse asiassa toispuoleiset derivaatat ovat olemassa välin päätepisteissä, vaikka sitä tietoa ei tarvita.) Yhden muuttujan funktioiden väliarvolauseen mukaan on olemassa sellainen $\xi \in (0, 1)$, että

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \phi(1) - \phi(0) = \phi'(\xi).$$

Lauseen II.5.1 mukaan

$$\phi'(\xi) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}((1-\xi)\mathbf{x} + \xi\mathbf{y})(y_j - x_j) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

missä $\mathbf{p} = (1-\xi)\mathbf{x} + \xi\mathbf{y}$, sillä $\frac{d}{dt}((1-t)x_j + ty_j) = y_j - x_j$. □

Väliarvolauseetta voidaan käyttää esim. virheen arvioinnissa:

Esimerkki II.7.2. Olkoon

$$z = f(x, y) = \ln(x^2 y^2).$$

Oletetaan, että argumentteina x ja y ovat mittaustulokset tietyin virhemarginaalein: $x = 0.9 \pm 0.02$, $y = 2.05 \pm 0.02$. Siis mittaustulos on $\mathbf{a} = (a_1, a_2) = (0.9, 2.05)$, ja ”todellisten arvojen” b_1 ja b_2 katsotaan toteuttavan epäyhtälöt $|b_1 - a_1| \leq 0.02$ ja $|b_2 - a_2| \leq 0.02$. Silloin väliarvolauseen mukaan z :n virheen itseisarvo $|\Delta z|$ on

$$|\Delta z| = |\nabla f(p_1, p_2) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})|,$$

missä $|p_1 - a_1| \leq 0.02$ ja $|p_2 - a_2| \leq 0.02$. Siis $|\Delta z|$:lle saadaan arvio ylöspäin:

$$\begin{aligned} |\Delta z| &= \left| \frac{2}{p_1}(b_1 - a_1) + \frac{2}{p_2}(b_2 - a_2) \right| \\ &\leq \frac{2}{0.9 - 0.02} \cdot 0.02 + \frac{2}{2.05 - 0.02} \cdot 0.02 < 0.07. \end{aligned}$$

Käytännössä riittävään tarkkuuteen päästään yleensä käyttämällä p_1 :n ja p_2 :n tilalla suoraan mittaustuloksia a_1 ja a_2 .

II.8 Funktion suurimman ja pienimmän arvon etsiminen

Yhden reaaliomuuttujan reaaliarvoisen funktion suurimman ja pienimmän arvon määrittämisessä (mikäli sellainen on olemassa) differentiaalilaskenta on tunnetusti tehokas väline. Tässä jaksossa käsittelemme samaa ongelmaa usean muuttujan funktioiden tapauksessa. Sovimme aluksi eräistä sanonnoista.

Määritelmä II.8.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in A$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ funktio. Jos $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ kaikilla $\mathbf{x} \in A$, f :llä on *absoluuttinen maksimi* pisteessä $\mathbf{a}$ (ja $f(\mathbf{a})$ on f :n suurin arvo A :ssa.) Jos on olemassa sellainen $r > 0$, että $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ kaikilla $\mathbf{x} \in A \cap B(\mathbf{a}, r)$, f :llä on (*paikallinen*) *maksimi* pisteessä $\mathbf{a}$. Paikallinen maksimi $\mathbf{a}$:ssa on *oleellinen*, jos on olemassa $r > 0$, jolle $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$, kun $\mathbf{x} \in A \cap (B(\mathbf{a}, r) \setminus \{\mathbf{a}\})$. Kun tässä merkit ” $\leq$ ” vaihdetaan merkeiksi ” $\geq$ ” (vast.” $<$ ” merkiksi ” $>$ ”), saadaan *absoluuttisen minimin* ja *paikallisen minimin* (vast. *oleellisen paikallisen minimin*) määritelmät. Paikallisia maksimeja ja minimeja sanotaan (*paikallisiksi*) *ääriarvoiksi* ja vastaavia A :n pisteitä (*paikallisiksi*) *ääriarvopisteiksi*.

Tietenkin absoluuttinen maksimi (vast. minimi) on myös paikallinen maksimi (vast. minimi), mutta ei yleensä kääntäen. Ääriarvojen yhteydessä sanan ”absoluuttinen” synonyyminä käytetään myös sanaa ”*globaali(nen)*” ja sanan ”paikallinen” synonyyminä sanaa ”*lokaali*”.

Tässä jaksossa käsitellään joitakin yksinkertaisia perusmenetelmiä, joiden tavoitteena on lähinnä riittävän säännöllisessä $\mathbb{R}^n$:n kompaktissa osajoukossa riittävän säännöllisen funktion absoluuttisen maksimin ja minimin määrittäminen. Tiedämme, että kompaktissa joukossa jatkuva funktio saa suurimman ja pienimmän arvon. Sisäpisteiden kohdalla seuraava lause antaa (riittävän säännöllisille funktioille) välttämättömän ehdon:

Lause II.8.2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}$ A :n sisäpiste ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolle suunnattu derivaatta $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ on olemassa jollakin $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{u}\| = 1$. Jos f :llä on pisteessä $\mathbf{x}$ paikallinen ääriarvo, niin $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = 0$. Erityisesti, jos osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ on olemassa, ja $\mathbf{x}$ on ääriarvopiste, niin $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = 0$.

TODISTUS. Merkitään $\phi(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{u})$, jolloin ϕ on määritelty jollakin 0:n sisältävällä avoimella välillä, ja sillä on paikallinen ääriarvo 0:ssa, joten yhden reaaliarvofunktioiden teorian mukaan tunnetusti

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \phi'(0) = 0.$$

(Muutenhan raja-arvon määritelmän nojalla ϕ saisi jokaisella $\delta > 0$ välillä $(-\delta, \delta)$ sekä lukua $\phi(0)$ suurempia että sitä pienempiä arvoja.) $\square$

Funktion f määrittelyjoukon sisäpistettä, jossa f :n gradientti (on olemassa) ja häviää, sanotaan f :n *kriittiseksi pisteeksi*. Edellinen lause ei anna riittävää ehtoa ääriarvon olemassaololle (kuten ei anna sen yksilulotteinen vastinekaan):

Esimerkki II.8.3. Olkoon $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nyt $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, mutta f :llä ei ole ääriarvoa origossa, sillä

$$f(0, h) = -h^2 < f(0, 0) < h^2 = f(h, 0)$$

kaikilla $h \neq 0$.

Differentiaalilaskennan avulla voidaan kehittää myös riittäviä ehtoja paikallisen ääriarvon olemassaololle, mutta tällä kertaa olemme lähinnä kiinnostuneita absoluuttisesta maksimista ja minimistä, ja niin pian kuin niiden olemassaolo on varmaa (kuten esim. kompaktissa joukossa jatkuvalla funktiolla), lauseen II.8.2 antama välttämätön ehto tavanomaisissa tilanteissa riittää ongelman selvittämiseen sisäpisteiden osalta. Esitämme seuraavassa huomautuksessa yleisiä periaatteita kokonaisuongelman ratkaisemiseksi.

Huomautus II.8.4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä kompakti joukko ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin f saa lauseen I.6.3 mukaan suurimman ja pienimmän arvon A :ssa. Koska A on suljettu, sen komplementti koostuu tarkalleen A :n ulkopisteistä, ja

$$A = A^\circ \cup \partial A,$$

sillä määritelmän mukaan A :n sisäosa A° , A :n reuna ∂A ja A :n ulkopisteiden joukko ovat erillisiä ja niiden unioni on koko $\mathbb{R}^n$. Koska A :n sisäpisteessä, joka on (edes paikallinen) maksimi- tai minimipiste, jossa f :n osittaisderivaatat ovat olemassa, ∇f häviää (lause I.6.3), löydetään suurin ja pienin arvo määrittämällä f :n arvo

- (1) kriittisissä pisteissä eli niissä A :n sisäpisteissä, joissa gradientti häviää,
 - (2) niissä A :n sisäpisteissä, joissa ainakaan kaikki ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat eivät ole olemassa, ja
 - (3) rajoittuman $f|_{\partial A}$ paikallisissa ääriarvokohdissa
- sekä valitsemalla kaikista näistä luvuista suurin ja pienin, mikäli niitä on äärellinen määrä (kuten käytännössä yleensä on). Se, miten kohdassa (3) mainitut pisteet parhaiten löydetään, riippuu reunan ∂A laadusta. Toisinaan tapauksessa $n = 2$ A :n reuna koostuu äärellisestä määrästä joukkoja

$$C_k = \{ \phi_k(t) \mid t \in I_k \},$$

missä I_k on reaaliakselin kompakti väli. Funktion $f|_{C_k}$ suurimman ja pienimmän arvon etsiminen palautuu tällöin yhden muuttujan funktion

$$f \circ \phi_k : I_k \rightarrow \mathbb{R}$$

tutkimiseen. Jos $f \circ \phi_k$ on derivoituva, tutkitaan tunnettuun tapaan derivaatan nollakohdat ja välin I_k päätepisteet. Analogisesta menettelystä on usein hyötyä myös korkeammissa dimensioissa: palautetaan reunalla saatujen arvojen tutkiminen määrittelyjoukon sisältävää avaruutta alempidimensioisen avaruuden osajoukossa määritellyn funktion tutkimiseen. Näissä tarkasteluissa reunan osa esitetään eksplisiittisesti jonkin funktion kuvaajana. Tulokseen voidaan päästä myös ilman eksplisiittistä ratkaisemista käyttäen ns. Lagrangen kertojien menetelmää, mutta emme tässä yhteydessä vielä käsittele sitä.

Esimerkki II.8.5. Määritetään funktion f ,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x,$$

suurin ja pienin arvo kompaktissa (vrt. esim. I.4.11, I.5.6) joukossa

$$A = \{ (x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4 \}.$$

Merkitään $A = U \cup C_1 \cup C_2$, missä

$$U = \{ (x, y) \mid -2 < x < 2, x^2 < y < 4 \},$$

$$C_1 = \{ (x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, y = x^2 \},$$

$$C_2 = \{ (x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, y = 4 \}.$$

Avoimessa joukossa U ei ole ääriarvokohtia, sillä

$$\nabla f(x, y) = (2x - 6, 2y) = (0, 0),$$

jos ja vain jos $x = 3, y = 0$, mutta $(3, 0)$ ei kuulu A :han. Nyt

$$\{ f(x, y) \mid (x, y) \in C_1 \} = \{ h_1(x) \mid -2 \leq x \leq 2 \},$$

missä $h_1(x) = x^2 + x^4 - 6x$, ja

$$\{ f(x, y) \mid (x, y) \in C_2 \} = \{ h_2(x) \mid -2 \leq x \leq 2 \},$$

missä $h_2(x) = x^2 - 6x + 16$. Funktion h_1 derivaatan ainoa nollakohta välillä $[-2, 2]$ on 1, eikä h_2 :n derivaatalla ole nollakohtia tällä välillä. Koska $h_1(1) = -4$, $h_1(-2) = h_2(-2) = 32$ ja $h_1(2) = h_2(2) = 8$, f :n suurin arvo koko A :ssa on 32 ja pienin -4 .

Huomautus II.8.6. Usein voidaan päätellä, että funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ saa suurimman ja/tai pienimmän arvon joukossa $A \subset \mathbb{R}^n$, vaikka A ei olisikaan kompakti. Tavallinen menettely on tämä: Etsittäessä esim. suurinta arvoa yritetään määrätä kompakti joukko $K \subset A$, jossa f on jatkuva, ja jossa on sellainen piste $\mathbf{p}$, että $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{p})$ kaikilla $\mathbf{x} \in A \setminus K$. Tällöin f :n suurin arvo K :ssa on myös f :n suurin arvo A :ssa. (Vrt. esim. I.6.5.)

Esimerkki II.8.7. Muovitehdas valmistaa 32 litran vetoista kannetonta suorakulmaisen särmiön muotoista astiaa, jonka seinien ja pohjan paksuus on sama (astian kokoon nähden pieni) vakio. Miten astian mitat on valittava, jotta muovin menekki olisi mahdollisimman pieni?

Olkoon x pohjan pituus, y pohjan leveys ja z astian korkeus. Minimoitavana on $xy + 2xz + 2yz$ ehdoilla $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $xyz = 32$, missä mittayksikkönä on desimetri. Ehdosta $xyz = 32$ voidaan ratkaista y , jolloin minimoitavaksi tulee funktio f ,

$$f(x, z) = \frac{32}{z} + 2xz + \frac{64}{x},$$

joukossa $\{(x, z) \mid x > 0, z > 0\}$. Koska tässä joukossa

$$\nabla f(x, z) = (2z - \frac{64}{x^2}, \frac{-32}{z^2} + 2x) = (0, 0),$$

jos ja vain jos $(x, z) = (4, 2)$, ainoa mahdollinen ääriarvo saadaan, kun $x = 4$ ja $z = 2$, jolloin ehdon $xyz = 32$ mukaan $y = 4$. Osoitamme, että kyseessä on todella absoluuttinen minimi. Jos $x \leq 1$, on $f(x, z) > 64 > 48$, samoin jos $z \leq \frac{1}{2}$. Jos taas $x \geq 1$ ja $z \geq 24$, on $f(x, z) > 48$, ja näin on myös jos $z \geq \frac{1}{2}$ ja $x \geq 48$. Näin ollen kompaktin joukon

$$K = \{(x, z) \mid 1 \leq x \leq 48, \frac{1}{2} \leq z \leq 24\}$$

reunalla ja sen ulkopuolella neljännestiasossa $\{(x, z) \mid x > 0, z > 0\}$ f saa vain suurempia arvoja kuin $f(4, 2) = 48$. Koska jatkuva funktio f K :hon rajoitettuna saa pienimmän arvon, ja edellisen mukaan $f(4, 2) = 48$ on ainoa mahdollisuus, tämä on f :n absoluuttinen minimi joukossa $\{(x, z) \mid x > 0, z > 0\}$.

III Usean muuttujan funktion Riemannin integraali

III.1 Integraali yli $\mathbb{R}^n$:n kompaktin välin

Käsitlemme tässä jaksossa Riemann-tyyppistä integrointia otsikon tarkoittamassa tilanteessa.

Määritelmä III.1.1. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ väliksi sanotaan kutakin n :n reaaliakselin välin karteesta tuloa; erityisesti $\mathbb{R}^n$:n *kompaetit välit* ovat muotoa

$$I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

missä $a_j \leq b_j$. Jos $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ ovat $\mathbb{R}$:n rajoitettuja (avoimia, suljettuja tai puoliavoimia) välejä ja $a_j \leq b_j$ ovat välin Δ_j päätepisteet, välin

$$I = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$$

geometrinen mitta määritellään lukuna

$$m(I) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

(Tapauksessa $n = 2$ puhutaan myös *pinta-alasta*; jos taas $n = 3$, puhutaan *tilavuudesta*.) Olkoon nyt $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ kompakti väli ja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Välin $[a_j, b_j]$ *jaoksi* sanomme jokaista äärellistä jonoa $t_0, \dots, t_{k_j}$, missä $a_j = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{k_j} = b_j$. Luvut $t_0, \dots, t_{k_j}$ ovat tämän jaon *jakopisteet*. Tällaisen jaon P_j pohjalta väli $[a_j, b_j]$ tulee esitetyksi k_j :n (mahdollisesti pisteeksi surkastuneen, jolloin pisteen toisto sallitaan) osavälin eli *jakovälin* $[t_{i-1}, t_i]$ unionina. Oletetaan, että kullekin $j = 1, \dots, n$ P_j on välin $[a_j, b_j]$ jako. Sanomme silloin, että $P = (P_1, \dots, P_n)$ on *välin* I *jako*. Jako P määrää luonnollisella tavalla $k = k_1 k_2 \dots k_n$ kappaletta (surkastuman tapauksessa toiston ollessa sallittu) kompakteja välejä $I_1, \dots, I_k$ (eli jakovälejä), joiden unioni I on ja joiden sisäosat ovat erillisiä: välit I_j saadaan n -kertaisina karteesisina tuloina jakoihin $P_1, \dots, P_n$ liittyvistä jakoväleistä. Merkitsemme

$$g_i = \inf_{\mathbf{x} \in I_i} f(\mathbf{x}), \quad G_i = \sup_{\mathbf{x} \in I_i} f(\mathbf{x})$$

jokaisella $i \in \{1, \dots, k\}$. Jakoon P liittyvä f :n *alasumma* määritellään kaavalla

$$s_P(f) = \sum_{i=1}^k g_i m(I_i),$$

ja *yläsumma* vastaavasti kaavalla

$$S_P(f) = \sum_{i=1}^k G_i m(I_i).$$

Jos $P = (P_1, \dots, P_n)$ ja $P' = (P'_1, \dots, P'_n)$ ovat välin $I = I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ jakoja ja jokaisella $j = 1, \dots, n$ jokainen jaon P_j jakopiste on myös jaon P'_j jakopiste, sanomme, että P' on jaon P *alajako*. Koska tietyssä joukossa saatavien funktion arvojen joukon supremum on vähintään sen osajoukossa saatavien funktion arvojen joukon supremum, nähdään jakopisteitä yksi kerrallaan lisäämällä, että alajakoon siirryttäessä yläsumma ei kasva. Vastaavasti alajakoon siirryttäessä alasumma ei vähene. Jos P ja P' ovat jakoja ja otetaan käyttöön niiden yhteinen alajako P'' , saadaan siis $s_P(f) \leq s_{P''}(f) \leq S_{P''}(f) \leq S_{P'}(f)$, ts. jokainen alasumma on korkeintaan mikä tahansa yläsumma. Koska jokainen yläsumma on alasummien joukon yläraja, alasummien joukon pienin yläraja on korkeintaan mikä tahansa yläsumma, mistä edelleen seuraa, että alasummien joukon supremum on korkeintaan yläsummien joukon infimum. Voimme nyt asettaa seuraavan määritelmän. Siinä esiintyvät supremumit ja infimumit otetaan yli välin I kaikkien jakojen P .

Määritelmä III.1.2. Määritelmän III.1.1 oletuksin ja merkinnöin merkitsemme

$$\sup_P s_P(f) = \int_I f = \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

ja sanomme tätä lukua funktion f *alaintegraaliksi* (yli välin I). Funktion f *yläintegraali* (yli välin I) on luku

$$\inf_P S_P(f) = \overline{\int_I f} = \overline{\int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n} = \overline{\int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}.$$

Edellä nähtiin, että aina $\int_I f \leq \bar{\int}_I f$. Jos $\int_I f = \bar{\int}_I f$, sanotaan, että f on (Riemann-)integroituva (joukossa I tai yli I :n), ja sen ala- ja yläintegraalin yhteistä arvoa sanotaan f :n (Riemannin) integraaliksi (yli I :n), ja sille käytetään merkintöjä

$$\int_I f = \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_I f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Seuraavassa lauseessa on yksinkertainen mutta hyödyllinen integroituvuuden karakterisointi.

Lause III.1.3. Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$:n kompakti väli ja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Funktio f on integroituva, jos ja vain jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa määritelmässä III.1.1 tarkasteltua tyyppiä oleva jako P , jolle

$$S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon.$$

TODISTUS. Olkoon f integroituva ja $\varepsilon > 0$. Määritelmän mukaan on sellaiset jaot P ja P' , että $\int_I f - \frac{\varepsilon}{2} < s_P(f)$ ja $\int_{I'} f + \frac{\varepsilon}{2} > S_{P'}(f)$. Olkoon P'' jakojen P ja P' yhteinen alajako. Silloin $\leq S_{P''}(f) - s_{P''}(f) \leq S_{P'}(f) - s_P(f) < \int_{I'} f + \frac{\varepsilon}{2} - \int_I f + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Oletetaan kääntäen, että mainittu ε -kriteeri on voimassa. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja P sitä kyseisessä ehdossa vastaava jako. Silloin $\int_I f - \int_{I'} f \leq S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon$. Koska siis $0 \leq \int_I f - \int_{I'} f < \varepsilon$ jokaisella $\varepsilon > 0$, tämä erotus on nolla. $\square$

Tämän lauseen kriteeriä sanotaan *Riemannin ehdoksi*. Esitämme sen vielä helpokäyttöisessä jonomuodossa.

Lause III.1.4. Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$:n kompakti väli ja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Funktio f on integroituva, jos ja vain jos on olemassa sellainen jono (P_k) määritelmässä III.1.1 tarkasteltua tyyppiä olevia jakoja P_k , että

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [S_{P_k}(f) - s_{P_k}(f)] = 0.$$

Tällöin

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{P_k}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{P_k}(f) = \int_I f.$$

TODISTUS. Ensimmäinen väite seuraa suoraan edellisestä lauseesta: jako P_k valitaan vastaamaan lukua $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Koska

$$s_{P_k}(f) \leq \int_I f \leq S_{P_k}(f),$$

saadaan myös jälkimmäisen väitteen yhtälöt. $\square$

III.2 Integraali yli väliä yleisemmän rajoitetun joukon

Käytännössä joudutaan usein integroimaan funktioita, joiden määrittelyjoukko ei ole väli. Seuraava määritelmä käsittelee tällaista tilannetta. Koko tässä jaksossa oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu joukko.

Määritelmä III.2.1. Olkoon f jossakin A :n sisältävässä joukossa määritelty rajoitettu funktio. Valitaan A :n sisältävä kompakti väli I ja määritellään funktio $f_{A,I} : I \rightarrow \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$\begin{cases} f_{A,I}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \text{kun } \mathbf{x} \in A; \\ f_{A,I}(\mathbf{x}) = 0, & \text{kun } \mathbf{x} \in I \setminus A. \end{cases}$$

Jos $f_{A,I}$ on integroituva yli välin I , sanotaan, että f on *integroituva A :ssa tai yli A :n* (tai lyhyesti, että f on *integroituva*, mikäli A on f :n määrittelyjoukko), ja $f_{A,I}$:n integraalille yli I :n käytetään merkintöjä

$$\int_A f = \int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

ja sitä sanotaan f :n *integraaliksi yli A :n*.

Huomautus III.2.2. Edellinen määritelmä on riippumaton välin I valinnasta. Jos nimittäin J on toinen A :n sisältävä kompakti väli ja $f_{A,J}$ sitä vastaava määritelmän III.2.1 mukainen f :n laajennus, lisäämällä tarvittaessa jakopisteitä nähdään, että jokaiseen I :n jakoon liittyvä yläsumma on sama kuin jokin J :n jakoon liittyvä yläsumma ja kääntäen. (Onhan $f_{A,I}$ nolla J :n ulkopuolella ja $f_{A,I}$ nolla J :n ulkopuolella.) Vastaava pätee alasummille.

Lause III.2.3. Olkoot $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ integroituvia funktioita.

(a) Kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ funktio $\lambda f + \mu g$ on integroituva ja

$$\int_A (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_A f + \mu \int_A g.$$

(b) Jos $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ kaikilla $\mathbf{x} \in A$, niin $\int_A f \leq \int_A g$.

(c) Funktio $|f|$ (eli $\mathbf{x} \mapsto |f(\mathbf{x})|$) on integroituva ja

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

TODISTUS. Korvaamalla f ja g määritelmässä III.2.1 käsitellyillä laajennuksilla voidaan suoraan olettaa, että A on kompakti väli, jolle käytämme merkintää I . Valitaan funktiolle f lauseen III.1.4 mukainen jakojono (P'_k) ja vastaavasti jakojono (P''_k) funktiolle g . Olkoon P_k jakojen P'_k ja P''_k yhteinen alajako. Koska $S_{P_k} - s_{P_k} \leq S_{P'_k} - s_{P'_k}$, myös jakojono (S_k) täyttää funktion f (ja vastaavasti g :hen) nähden lauseen III.1.4 ehdon.

Koska joukoille $B \subset I$ $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \leq \sup_{\mathbf{y} \in B} f(\mathbf{y}) + \sup_{\mathbf{y} \in B} g(\mathbf{y})$ kaikilla $\mathbf{x} \in B$, on $\sup[f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})] \leq \sup_{\mathbf{y} \in B} f(\mathbf{y}) + \sup_{\mathbf{y} \in B} g(\mathbf{y})$, joten jokaiselle jaolle P_k pätee $S_{P_k}(f+g) \leq S_{P_k}(f) + S_{P_k}(g)$. Vastaavasti $s_{P_k}(f+g) \geq s_{P_k}(f) + s_{P_k}(g)$. Siis

$$s_{P_k}(f) + s_{P_k}(g) \leq s_{P_k}(f+g) \leq S_{P_k}(f+g) \leq S_{P_k}(f) + S_{P_k}(g),$$

mistä seuraa lauseen III.1.4 nojalla funktion $f+g$ integroituvuus ja yhtälö $\int(f+g) = \int f + \int g$, sillä epäyhtälöketjun ääripäillä on sama raja-arvo $\int f + \int g$. Funktion λf integroituvuus ja yhtälö $\int \lambda f = \lambda \int f$ näkyy suoraan määritelmästä, kun käytetään tietoa, että esim. $\sup \lambda f(\mathbf{x}) = \lambda \sup f(\mathbf{x})$, kun $\lambda > 0$, ja $\sup[-f(\mathbf{x})] = -\inf[f(\mathbf{x})]$.

Kohta (b) seuraa (a):sta, kun tarkastellaan erotusfunktiota $g - f$, ja (c):n jätämme harjoitustehtäväksi. $\square$

Riemannin integraali sopii hyvin erityisesti jatkuvien funktioiden tapaukseen, mikä käytännössä usein riittääkin. Tosin integroituvalla funktiolla voi olla epäjatkuvuuskohtia, mutta ei kovin paljon. Tämän kysymyksen täsmentämiseksi otamme käyttöön seuraavan puhettavan:

Määritelmä III.2.4. (a) Sanomme, että joukko $N \subset \mathbb{R}^n$ on *Lebesguen nollajoukko* (eli *nollajoukko* eli *nollamittainen*), jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen jono $\mathbb{R}^n$:n välejä $I_1, I_2, \dots$, että $N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ ja $\sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) < \varepsilon$.

(b) Sanomme, että joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *Jordanin nollajoukko*, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen äärellinen perhe $\mathbb{R}^n$:n välejä $I_1, I_2, \dots, I_p$, että $N \subset \bigcup_{i=1}^p I_i$ ja $\sum_{i=1}^p m(I_i) < \varepsilon$. (Välin yksi tai useampi särämä voi kummassakin tapauksessa olla surkastunut pisteeksi.)

Selvästi Jordanin nollajoukko on aina rajoitettu, mutta rajoittamatonkin joukko voi olla Lebesguen nollajoukko.

Huomautus III.2.5. (a) Kummassakin määritelmän kohdassa voidaan vaatia, että välit I_k ovat avoimia, sillä selvästi jokaista väliä I_k kohti voidaan valita sen sisältävä avoin väli I'_k siten, että $m(I'_k) < m(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$, jolloin esim. $\sum_{i=1}^{\infty} m(I'_i) < \varepsilon$, mikäli $\sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) < \frac{\varepsilon}{2}$.

(b) Jordanin nollajoukko on luonnollisesti aina myös Lebesguen nollajoukko, mutta ei (edes rajoitetun joukon tapauksessa) yleensä kääntäen. Esim. välin $[0, 1]$ rationaalipisteiden joukko on nollajoukko Lebesguen mielessä (kuten jokainen numeroituva joukko), mutta ei Jordanin nollajoukko (harjoitustehtävä). Kohdan (a) nojalla nähdään kuitenkin, että kompakti joukko on Lebesguen nollajoukko, jos ja vain jos se on Jordanin nollajoukko.

Lause III.2.6. *Numeroituvan monen nollajoukon unioni on Lebesguen nollajoukko, ja äärellisen monen Jordanin nollajoukon unioni on Jordanin nollajoukko.*

TODISTUS. Olkoon N_k Lebesguen nollajoukko jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Merkitään $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ jono välejä I_i^k siten, että $N_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^k$ ja

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(I_i^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Tällöin välejä I_i^k , missä $i, k \in \mathbb{N}$, on numeroituva määrä, niiden unioni sisältää N :n, ja numerointitavasta riippumatta niiden muodostaman sarjan summa on pienempi kuin $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Jordanin nollajoukkoja koskeva väite on vielä helpompi. $\square$

Lause III.2.7. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}^n$ kompakti väli ja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ integroitava funktio. Silloin*

$$\{(x_1, \dots, x_n, f(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in I\}$$

on Jordanin nollajoukko avaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}$.

TODISTUS. Olkoon $\varepsilon > 0$. Käytämme määritelmän III.1.1 merkintöjä. Valitaan I :n jako P , jolle $S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon$. Olkoot jaon P määräämät I :n jakovälit $I_1, \dots, I_k$. Merkitään $I_i \times [g_i, G_i] = J_i$. Silloin $\sum_{i=1}^k m(J_i) = S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon$ ja

$$\{(x_1, \dots, x_n, f(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in I\} \subset \bigcup_{i=1}^k J_i \quad \square$$

Seuraava lause, joka on peräisin nykyaikaisen mitta- ja integrointiteorian perustajalta Henri Lebesguelta, osoittaa, että Lebesguen nollajoukoilla on merkitystä myös alkeellisemmassa Riemann-tyyppisessä integrointiteoriassa.

Lause III.2.8 (Lebesgue). *Olko $I \subset \mathbb{R}^n$:n kompakti väli ja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Funktio f on (Riemann-)integroituva joukossa I , jos ja vain jos joukko*

$$F = \{ \mathbf{x} \in I \mid f \text{ ei ole jatkuva } \mathbf{x}:ssä \}$$

on Lebesguen nollajoukko.

TODISTUS. Olkoon $M > 0$ sellainen, että $|f(\mathbf{x})| \leq M$ kaikilla $\mathbf{x} \in I$. Oletetaan ensin, että F on Lebesguen nollajoukko. Olkoon $\varepsilon > 0$. Huomautuksen III.2.5 nojalla voidaan valita jono (J_k) avoimia välejä siten, että niiden unioni sisältää F :n ja $\sum_{k=1}^{\infty} m(J_k) < \frac{\varepsilon}{4M}$. Silloin joukko $G = \cup_{k=1}^{\infty} J_k$ on avoin, joten joukko $K = I \setminus G$ on kompakti. Lauseen I.6.8 nojalla on sellainen $\delta > 0$, että $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon[4m(I) + 2]^{-1}$ aina, kun $\mathbf{x} \in K$ ja $\mathbf{y} \in I$ ovat sellaisia, että $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. Näin ollen voidaan valita sellainen I :n jako P , että sen jokaiselle jakovälille I_k , jolle $I_k \cap K \neq \emptyset$, on voimassa $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{u})| + |f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon[2m(I) + 1]^{-1}$ aina, kun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I_k$ (missä on valittu $\mathbf{u} \in I_k \cap K$). Jos taas H on kaikkien sellaisten jakovälien I_p unioni, että $I_p \subset G$, kompaktiuden nojalla jokin äärellinen kokoelma välejä J_k riittää peittämään H :n, mistä seuraa lauseen III.2.3 (tai suoraan geometrisen mitan helposti todistettavien alkeisominaisuuksien) nojalla, että

$$\sum_{I_p \subset G} m(I_p) < \sum_{k=1}^{\infty} m(J_k) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Näistä tiedoista yhdessä seuraa, että

$$\begin{aligned} S_P(f) - s_P(f) &= \\ \sum_{I_k \subset G} [\sup_{\mathbf{x} \in I_k} f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{x} \in I_k} f(\mathbf{x})] m(I_k) &+ \sum_{I_k \cap G \neq \emptyset} [\sup_{\mathbf{x} \in I_k} f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{x} \in I_k} f(\mathbf{x})] m(I_k) \\ &< 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \varepsilon[2m(I) + 1]^{-1} m(I) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Siis lauseen III.1.3 mukaan f on integroituva.

Oletetaan toiseksi, että f on integroituva yli I :n. Jatkuvuuden määritelmästä seuraa helposti, että funktio f on jatkuva pisteessä $\mathbf{x}$, jos ja vain jos $h(f, \mathbf{x}) = 0$, missä on merkitty

$$h(f, \mathbf{x}) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \sup \{ |f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})| \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in B(\mathbf{x}, \delta) \}.$$

(Raja-arvo on olemassa, koska tässä supremum-lauseke on δ :n kasvava funktio.) Koska $h(f, \mathbf{x}) > 0$, jos ja vain jos $h(f, \mathbf{x}) > \frac{1}{i}$ jollakin $i \in \mathbb{N}$, $F = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$, missä $B_i = \{ \mathbf{x} \in I \mid h(f, \mathbf{x}) > \frac{1}{i} \}$. Siis sen osoittamiseksi, että F on Lebesguen nollajoukko, lauseen III.2.6 nojalla riittää osoittaa, että jokainen B_i on Lebesguen nollajoukko. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan sellainen välin I jako P , että $S_P(f) - s_P(f) < \frac{\varepsilon}{i}$. Olkoot $I_1, \dots, I_p$ ne jaon P jakovälit, joiden sisäosille pätee $I_j^0 \cap B_i \neq \emptyset$. Silloin

$$\sup_{\mathbf{x} \in I_j} f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{x} \in I_j} f(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{i}$$

kaikilla $j = 1, \dots, p$, joten

$$\frac{\varepsilon}{i} > S_P(f) - s_P(f) \geq \frac{1}{i} \sum_{j=1}^p m(I_j),$$

mistä seuraa, että $\sum_{j=1}^p m(I_j) < \varepsilon$. Välit $I_1, \dots, I_p$ eivät välttämättä peitä joukkoa B_i , mutta peittävä kokoelma saadaan ottamalla lisäksi niiden jakovälien (geometriselta mitaltaan nollan suuruiset) reunatahkot, joiden reuna (mutta ei sisäosa) leikkaa joukkoa B_i . Kaikkiaan siis saadaan B_i :n peittävä äärellinen kokoelma välejä, joiden geometristen mittojen summa on pienempi kuin ε . $\square$

Määritelmä III.2.9. Rajoitettu joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *Jordan-mitallinen*, jos funktio $\mathbf{x} \mapsto 1$ on (Riemann-)integraoituva yli A :n. Tämän vakiofunktion integraalia yli A :n sanotaan tällöin A :n (*Jordanin*) *sisällöksi* eli *Jordanin mitaksi* eli *n -ulotteiseksi tilavuudeksi* ja merkitään $m(A) = m_n(A)$. Jos $n = 1$, puhutaan myös *pitäudesta*, tapauksessa $n = 2$ *pinta-alasta* ja tapauksessa $n = 3$ *tilavuudesta*.

Seuraavissa tarkasteluissa tarvitaan joukon A sisäosan A° , reunan ∂A ja sulkeuman $\bar{A}$ käsitteitä. Rajoitetulle joukolle A ∂A on kompakti (Se on rajoitettu, sillä jos $A \subset B(0, r)$, helposti nähdään, että $\partial A \subset B(0, r + 1)$. Se on suljettu, sillä $\mathbb{R}^n \setminus \partial A = A^\circ \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$.) Määritelmistä seuraa helposti, että $A^\circ \subset A \subset A \cup \partial A = A^\circ \cup \partial A = \bar{A}$, missä sisäosa A° ja reuna ∂A ovat erillisiä.

Lause III.2.10. *Rajoitettu joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on Jordan-mitallinen, jos ja vain jos sen reuna ∂A on (Lebesguen eli kompaktiuden nojalla) yhtäpitävästi Jordanin nollajoukko.*

TODISTUS. Valitaan kompakti väli I , jonka sisäosa sisältää A :n sulkeuman. Olkoon $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, joka saa A :ssa vakioarvon 1 ja joukossa $I \setminus A$ vakioarvon 0. Jokaisella A :n sisäpisteellä on avoin palloympäristö, jossa f on vakio, joten A :n sisäpisteet ovat f :n jatkuvuuspisteitä. Jos taas $\mathbf{x} \in I$ on A :n ulkopiste, on olemassa sellainen $r > 0$, että f on vakio (=nolla) joukossa $I \cap B(\mathbf{x}, r)$ ja siis jatkuva $\mathbf{x}$:ssä. Mutta jos $\mathbf{x} \in \partial A$, niin koska $\mathbf{x}$ on I :n sisäpiste, jollakin $r > 0$ $B(\mathbf{x}, r) \subset I$, ja reunapisteen määritelmästä seuraa, että $f(B(\mathbf{x}, \delta)) = \{0, 1\}$ aina, kun $\delta < r$, joten f ei ole jatkuva $\mathbf{x}$:ssä. Siis ∂A on tarkalleen f :n epäjatkuvuuskohtien joukko, joten väite seuraa lauseesta III.2.8. $\square$

Huomautus III.2.11. Jordanin nollajoukon käsite on siinä suhteessa luonnollinen Riemannin integraalin yhteydessä, että funktion arvoja voidaan muuttaa Jordanin nollajoukossa ilman että integraoituvuus tai integraalin arvo muuttuu (harjoitustehtävä). Käytämme tätä tietoa seuraavan lauseen todistuksessa.

Lause III.2.12. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$:n Jordan-mitallinen rajoitettu osajoukko ja $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

- (i) f on integraoituva yli A :n;
- (ii) f on integraoituva yli A° :n;
- (iii) f on integraoituva yli $\bar{A}$:n. Jos nämä ehdot ovat voimassa, f :n integraali kaikkien kolmen joukon yli on sama.

TODISTUS. Joukko $\bar{A}$ on kompakti. Valitaan jokin sen sisältävä kompakti väli I . Koska $\bar{A} \setminus A \subset \partial A$ ja $A \setminus A^\circ \subset \partial A$, ja ∂A on lauseen III.2.10 nojalla Lebesguen

nollajoukko ja siis huomautuksen III.2.5 (b) mukaan Jordanin nollajoukko, huomautus III.2.11 osoittaa, että integroituvuus on määritelmän III.2.1 merkinnöin funktioille $f_{\bar{A},I}$, $f_{A,I}$ ja $f_{A^\circ,I}$ yhtäpitävä vaatimus, ja sen toteutuessa kaikilla on sama integraali. $\square$

Lause III.2.13. *Jos rajoitettu joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on Jordan-mitallinen ja rajoitetun funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ epäjatkuvuuskohtien joukko on Lebesguen nollajoukko, niin f on integroituva.*

TODISTUS. Olkoon I kompakti väli, jonka sisäosaan A sisältyy. Olkoon $f_{A,I}$ kuten määritelmässä III.2.1. Joukon A sisäpisteissä funktion $f_{A,I}$ jatkuvuus on yhtäpitävää f :n jatkuvuuden kanssa, koska tällaisen pisteen jossakin ympäristössä $f_{A,I}$ saa samat arvot kuin f . Joukon $I \setminus \bar{A}$ pisteissä $f_{A,I}$ on jatkuva, koska sellaisen pisteen jonkin ympäristön ja I :n leikkauksessa $f_{A,I}$ saa arvon 0. Siis funktion $f_{A,I}$ epäjatkuvuuskohtien joukko sisältyy A :n reunan ja f :n epäjatkuvuuskohtien joukon unioniin, joka on lauseen III.2.10 ja oletuksen nojalla Lebesguen nollajoukko. Siis $f_{A,I}$ on lauseen III.2.8 mukaan integroituva. $\square$

Lause III.2.14. (a) *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu joukko ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ integroituva funktio. Jos $E \subset A$ on Jordan-mitallinen, niin f on integroituva yli E :n.*

(b) *Olkoot $E_1, \dots, E_k \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettuja Jordan-mitallisia osajoukkoja, joiden sisäosat ovat erilliset, ja $E = \bigcup_{i=1}^k E_i$. Silloin rajoitettu funktio $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ on integroituva yli E :n, jos ja vain jos f on integroituva yli jokaisen E_i :n, ja tällöin*

$$\int_E f = \sum_{i=1}^k \int_{E_i} f.$$

TODISTUS. (a) Valitaan kompakti väli I , joka sisältää A :n. Olkoot $f_{A,I}$ ja $f_{E,I}$ kuten määritelmässä III.2.1. Koska E on Jordan-mitallinen, sen reuna on Jordanin nollajoukko ja siis Lebesguen nollajoukko. Toisaalta jokainen funktion $f_{E,I}$ epäjatkuvuuskohta, joka ei kuulu kuulu E :n reunaan, on E :n sisäpiste, joten sen täytyy olla myös $f_{A,I}$:n epäjatkuvuuskohta. Mutta koska $f_{A,I}$:n epäjatkuvuuskohtien joukko on Lebesguen nollajoukko lauseen III.2.8 nojalla, on nähty, että myös $f_{E,I}$:n epäjatkuvuuskohtien joukko kahden nollajoukon unionina nollajoukko, joten lauseen III.2.8 mukaan f on integroituva yli E :n.

(b) Jos f on integroituva yli A :n, se on kohdan (a) nojalla integroituva yli jokaisen E_i :n. Oletetaan nyt, että f on integroituva yli jokaisen E_i :n. Valitaan E :n sisältävä kompakti väli I . Lauseen III.2.12 nojalla f on integroituva yli jokaisen E_i° :n, joten lauseen III.2.3 (a) mukaan funktio $g = \sum_{i=1}^k f_{E_i^\circ,I}$ on integroituva yli I :n, ja koska g ja $f_{E,I}$ eroavat toisistaan vain joukossa, joka sisältyy kompaktiin nollajoukkoon $\bigcup_{i=1}^k \partial E_i$ ja on siis Jordanin nollajoukko, f on integroituva yli E :n, ja lauseen III.2.3 (a) nojalla

$$\int_E f = \int_I f_{E,I} = \int_I g = \sum_{i=1}^k \int_I f_{E_i^\circ,I} = \sum_{i=1}^k \int_I f_{E_i,I} = \sum_{i=1}^k \int_{E_i} f. \quad \square$$

Huomautus III.2.15. Kun edellistä lausetta sovelletaan funktioon $\mathbf{x} \mapsto 1$, nähdään Jordanin mitan additiivisuus: $m(\bigcup_{i=1}^k E_i) = \sum_{i=1}^k m(E_i)$, jos rajoitetujen Jordan-mitallisten joukkojen $E_1, \dots, E_k$ sisäosat ovat erillisiä.

III.3 Iteroidut integraalit

Seuraavassa karteellinen tulo $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ samastetaan luonnollisella tavalla avaruuden $\mathbb{R}^{n+p}$ kanssa samastamalla vektoripari

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_p)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$$

vektorin

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^{n+p}$$

kanssa. Silloin avaruuden $\mathbb{R}^{n+p}$ kompakti väli K on muotoa $I \times J$, missä I on $\mathbb{R}^n$:n ja J $\mathbb{R}^p$:n kompakti väli.

Lause III.3.1. *Olko $K = I \times J \subset \mathbb{R}^{n+p}$ kuten edellä, ja olko $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ integroituva funktio. Jokaiselle $\mathbf{x} \in I$ määritellään $f_{\mathbf{x}} : J \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ja merkitään*

$$L(\mathbf{x}) = \int_{\underline{J}} f_{\mathbf{x}} = \int_{\underline{J}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

sekä

$$U(\mathbf{x}) = \overline{\int_J f_{\mathbf{x}}} = \overline{\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}}.$$

Näin määritellyt funktiot $L : I \rightarrow \mathbb{R}$ ja $U : I \rightarrow \mathbb{R}$ ovat integroituvia I :ssä, ja kummankin integraali yli I :n on sama kuin f :n integraali yli karteesisen tulon $I \times J$.

TODISTUS. Olko $P_I = (P_1^I, \dots, P_n^I)$ välin I jako ja $P_J = (P_1^J, \dots, P_p^J)$ välin J jako. Ne määräävät välin $I \times J$ jaon $P = (P_1^I, \dots, P_n^I, P_1^J, \dots, P_p^J)$. Jos V on jokin jakoon P liittyvä jakoväli, se on muotoa $V^I \times V^J$, missä V^I on jakoon P^I ja V^J jakoon P^J liittyvä jakoväli, ja kääntäen. Selvästi $\inf_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \inf_{\mathbf{y} \in V^J} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ kaikilla $\mathbf{x} \in V_I$. Tästä nähdään, että

$$\sum_{V^J} m(V^J) \inf_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V^I \times V^J} f \leq \sum_{V^J} m(V^J) \inf_{\mathbf{y} \in V^J} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \leq \int_{\underline{J}} f_{\mathbf{x}} = L(\mathbf{x}).$$

Näin ollen

$$\sum_{V_I} \left[\sum_{V^J} m(V^J) \inf_{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V^I \times V^J} f \right] m(V^I) \leq s_{P_I}(L).$$

Vasemmalla puolella oleva kaksoissumma on sama kuin funktion f jakoon P liittyvä alasumma, koska $m(V) = m(V^I)m(V^J)$. Saadaan epäyhtälöketju

$$s_P(f) \leq s_{P_I}(L) \leq S_{P_I}(L) \leq S_{P_I}(U) \leq S_P(f),$$

missä viimeinen epäyhtälö nähdään todeksi yllä olevan kanssa analogisella päätelyllä. Kun tässä P käy läpi välin $I \times J$ jaot, funktion f integroituvuuden nojalla $\sup_P s_P(f) = \inf_P S_P(f)$. Tästä seuraa, että myös $\sup_P s_{P_I}(L) = \inf_P S_{P_I}(L)$, joten L on integroituva yli I :n, ja lisäksi sen integraalin arvo on sama kuin f :n integraali yli karteesisen tulon $I \times J$. Funktiota U koskeva väite todistetaan samaan tapaan tai voidaan myös palauttaa edellä käsiteltyyn tapaukseen tarkastelemalla funktiota $-f$. $\square$

Seuraava lause on edellisen välitön seuraus.

Lause III.3.2. Olkoon $K = I \times J \subset \mathbb{R}^{n+p}$ kuten edellä, ja olkoon $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ integroituva funktio. Oletetaan, että jokaisella $\mathbf{x} \in I$ funktio $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ on integroituva yli välin J . Silloin funktio

$$\mathbf{x} \mapsto \int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

on integroituva yli välin I , ja

$$\int_K f = \int_I d\mathbf{x} \int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \left(= \int_I \left[\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} \right).$$

Huomautus III.3.3. (a) Lauseita III.3.1 ja III.3.2 vastaavat tulokset ovat voimassa luonnollisesti myös, jos $\mathbf{x}$:n ja $\mathbf{y}$:n roolit vaihdetaan keskenään.

(b) Lause III.3.2 pätee myös siinä tapauksessa, että funktion $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ integroituvuus oletetaan vain kaikilla $\mathbf{x} \in I \setminus M$, missä $M \subset I$ on jokin Jordanin nollajoukko, jolloin kaavassa

$$\int_K f = \int_I d\mathbf{x} \int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

voidaan $\mathbf{x}$:n suhteen integroinnissa integroitavan arvot M :ssä asettaa vapaasti (vrt. huom. III.2.11).

(c) Kun on laskettava funktion f integraali yli $\mathbb{R}^n$:n kompaktin välin I , lausetta III.3.2 soveltamalla $n-1$ kertaa tehtävä voidaan riittävän säännöllisessä tapauksessa palauttaa yhden reaaliuuttujan funktioiden integrointeihin. Näin on esim. silloin, kun f on koko joukossa I jatkuva.

(d) Lauseen väitteen kaavassa on kyse integraalin laskemisesta *iteroituna integraalina*. Lauseessa on sille kaksi eri merkintätapaa. Jälkimmäisestä jätämme käytännössä enimmäkseen hakasulkumerkit pois, näin myös silloin, kun menettelyä jatketaan yksiulotteisiin integraaleihin pääsemiseksi. Toisinaan on hyötyä välivaiheena sopivan muunnoksen käytöstä. (Seuraavassa jaksossa tulee esille ns. napakoordinaattimuunnos.)

Esimerkki III.3.4. Jos $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva funktio, niin jokaisella lukujen $1, \dots, n$ permutaatiolla $i_1, \dots, i_n$ on

$$\begin{aligned} \int_I f &= \int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} dx_{i_n} \cdots \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \\ &= \int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \cdots \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \cdots dx_{i_n}. \end{aligned}$$

Esimerkki III.3.5. Olkoot $\phi_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita, $i = 1, 2$, ja $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$. Merkitään

$$E = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \}.$$

Olkoon $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Olkoon $I = [c, d] \subset \mathbb{R}$ väli, jolle $E \subset [a, b] \times [c, d]$. Määritelmän III.2.1 merkinnöin funktion $f_{E,I}$ ainoat mahdolliset epäjatkuvuuskohdat ovat funktioiden ϕ_1 ja ϕ_2 kuvaajilla, sillä nämä kuvaajat ovat kompaktin välin $[a, b]$ kuvina jatkuviissa kuvauksissa $x \mapsto (x, \phi_i(x))$

kompakteja ja siis suljettuja, joten jokaisella kuvaajien unionin komplementin pisteellä I :ssä on palloympäristö, jonka leikkauksessa I :n kanssa $f_{E,I}$ on vakio nolla tai saa samat arvot kuin f . Nämä kuvaajat ovat Jordanin nollajoukkoja lauseen III.2.7 nojalla. Siis f on integroituva yli E :n. Jokaisella $x \in [a, b]$ funktio $y \mapsto f_{E,I}(x, y)$ on integroituva yli välin $[c, d]$, joten lauseen III.3.2 nojalla saadaan

$$\int_E f = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Selvästi tämä päättely yleistyy tilanteeseen, jossa väli $[a, b]$ on korvattu jonkin $\mathbb{R}^n$:n kompaktilla välillä tai vielä yleisemmin kompaktilla Jordan-mitallisella joukolla.

Esimerkki III.3.6. Olkoon $a > 0$. Lasketaan kiekon $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ sektorin $K_\phi = \{(r \cos t, r \sin t) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq t \leq \phi\}$ pinta-ala olettaen aluksi, että $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Kun vakiofunktion 1 integraali yli joukon K_ϕ lasketaan iteroituna integraalina, saadaan

$$\begin{aligned} m(K_\phi) &= \frac{1}{2}a^2 \cos \phi \sin \phi + \int_{a \cos \phi}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{1}{2}a^2 \cos \phi \sin \phi + \left/ \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right/_{a \cos \phi}^a \end{aligned}$$

eli sievennyksen jälkeen $\frac{\phi}{2}a^2$, kun otetaan huomioon, että $\frac{\pi}{2} - \arcsin(\cos \phi) = \phi$. Kaava $K_\phi = \frac{\phi}{2}a^2$ pätee yleisestikin kaikilla $\phi \in [0, 2\pi]$, mikä nähdään käyttämällä erikoistapausta $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, integraalin additiivisuutta integroimisjoukon suhteen (huomautuksen III.2.15 mielessä) sekä sitä suoraan määritelmästä helposti seuraavaa seikkaa, että joukon Jordan-mitallisuus ja Jordanin mitta säilyvät peilauksissa koordinaattiakselien suhteen.

Esimerkki III.3.7. Olkoon $K \subset \mathbb{R}^2$ puolisuunnikas, jonka kärkipisteet ovat $(-\pi, \frac{\pi}{2})$, $(\pi, \frac{\pi}{2})$, $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ ja $(\frac{\pi}{2}, 0)$. Siis K :ta rajoittavat osat suorista $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $x - y - \frac{\pi}{2} = 0$ ja $x + y + \frac{\pi}{2} = 0$. Määritellään $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla $f(x, y) = \sin^2(x + y)$. Silloin

$$\begin{aligned} \int_K f &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{-y-\frac{\pi}{2}}^{y+\frac{\pi}{2}} \sin^2(x + y) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{-y-\frac{\pi}{2}}^{y+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}[1 - \cos 2(x + y)] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \left/ \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin(2x + 2y) \right] \right/_{-y-\frac{\pi}{2}}^{y+\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y + \frac{\pi}{2} \right) dy = \frac{3}{8}\pi^2 \end{aligned}$$

Esimerkki III.3.8. Olkoon A paraboloidin $z = 4 - x^2 - y^2$ ja tason $z = 4 - 2x$ rajoittama kompakti joukko. Esimerkissä III.3.5 käytetyllä päättelyllä nähdään, että A on Jordan-mitallinen. Laskemme A :n tilavuuden iteroituna integraalina. Kun yhtälöiden $z = 4 - x^2 - y^2$ ja $z = 4 - 2x$ parista eliminoidaan z , saadaan $4 - 2x = 4 - x^2 - y^2$ eli $y^2 = 2x - x^2$. Tämä on xy -tasossa sellaisen ympyrän yhtälö, jonka kautta kulkeva z -akselin suuntainen sylinteri sisältää paraboloidin $z = 4 - x^2 - y^2$ ja tason $z = 4 - 2x$ leikkauskäyrän. Siis kullakin $x \in [0, 2]$ saadaan y :n suhteen integroinnissa integrointirajoiksi $-\sqrt{2x - x^2}$ ja $\sqrt{2x - x^2}$,

ja A :n tilavuudeksi tulee

$$m(A) = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_{4-2x}^{4-x^2-y^2} dz.$$

Tämän iteroidun integraalin arvoksi saadaan

$$\begin{aligned} & \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} [(4-x^2-y^2) - (4-2x)] dy \\ &= \int_0^2 \int_{y=-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \left(-x^2 y - \frac{1}{3} y^3 + 2xy \right) dx, \end{aligned}$$

josta laskemalla tulee

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \int_0^2 (2x-x^2)^{\frac{3}{2}} dx &= \frac{4}{3} \int_0^2 (1-(1-x)^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{4}{3} \int_1^{-1} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

III.4 Napakoordinaattimuunnoksen käyttö integroinnissa

Tässä jaksossa tutkitaan kiekossa tai sen sektorissa määritellyn funktion integraalin laskemista napakoordinaattimuunnoksen avulla. Oletamme, että $a > 0$ ja $\psi \in [0, 2\pi]$. Kullekin $\phi \in [0, \psi]$ merkitään

$$K_\phi = \{ (r \cos \alpha, r \sin \alpha) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \alpha \leq \phi \}.$$

Lause III.4.1. *Olkoon $f : K_\psi \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio.*

(a) *Kaavalla*

$$F(\phi) = \int_{K_\phi} f(x, y) dx dy$$

määritelty funktio $F : [0, \psi] \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva, ja kaikilla $\phi \in [0, \psi]$ on

$$F'(\phi) = \int_0^a f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr.$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_{K_\psi} f(x, y) dx dy &= \int_0^\psi d\phi \int_0^a f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr \\ &= \int_0^a dr \int_0^\psi f(r \cos \phi, r \sin \phi) r d\phi. \end{aligned}$$

TODISTUS. (a) Kiinnitetään $\phi \in [0, \psi]$. Kiinnitetään myös aluksi luvut $p \in \mathbb{N}$ ja $h \neq 0$, missä $\phi + h \in [0, \psi]$. Käsitellään tapausta $h > 0$; tapaus $h < 0$ aiheuttaisi vain pieniä merkinnällisiä muutoksia. Merkitään

$$A_k = \{ (r \cos \alpha, r \sin \alpha) \mid \frac{k-1}{p} a < r \leq \frac{k}{p} a, \phi \leq \alpha \leq \phi + h \}$$

kullakin $k = 1, \dots, p$ sekä

$$B_h = \cup_{k=1}^p A_k = \{ (r \cos \alpha, r \sin \alpha) \mid 0 < r \leq a, \phi \leq \alpha \leq \phi + h \}.$$

Esimerkistä III.3.6 ja pinta-alan additiivisuudesta (huomautus III.2.15) nähdään pienellä laskulla, että kullakin $k = 1, \dots, p$

$$m(A_k) = \frac{ha^2}{2p^2}(2k-1).$$

Olkoon $f_{p,h} : B_h \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, joka saa vakioarvon $f(\frac{k}{p}a \cos \phi, \frac{k}{p}a \sin \phi)$ joukossa A_k , $k = 1, \dots, p$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f on kompaktissa joukossa K_ψ jatkuvana funktiona tasaisesti jatkuva, on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$, kun $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta$. Siis kun h on kyllin pieni ja p kyllin suuri, on

$$\sup\{|f_{p,h}(x, y) - f(x, y)| \mid (x, y) \in B_h\} < \varepsilon,$$

joten lauseita III.2.14 ja III.2.3 soveltaen nähdään, että tällöin

$$\begin{aligned} & \left| F(\phi + h) - F(\phi) - \sum_{k=1}^p f\left(\frac{k}{p}a \cos \phi, \frac{k}{p}a \sin \phi\right) \frac{ha^2}{2p^2}(2k-1) \right| \\ &= \left| \int_{B_h} f - \int_{B_h} f_{k,h} \right| \leq \varepsilon m(B_h) = \varepsilon \frac{h}{2} a^2, \end{aligned}$$

joten

$$\left| \frac{1}{h} [F(\phi + h) - F(\phi)] - \sum_{k=1}^p f\left(\frac{k}{p}a \cos \phi, \frac{k}{p}a \sin \phi\right) \frac{a^2}{2p^2}(2k-1) \right| < \frac{\varepsilon}{2} a^2.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^p f\left(\frac{k}{p}a \cos \phi, \frac{k}{p}a \sin \phi\right) \frac{a^2}{2p^2}(2k-1) = \\ & \sum_{k=1}^p f\left(\frac{k}{p}a \cos \phi, \frac{k}{p}a \sin \phi\right) \frac{k}{p}a \cdot \frac{a}{p} - \sum_{k=1}^p f\left(\frac{k}{p}a \cos \phi, \frac{k}{p}a \sin \phi\right) \frac{a^2}{2p^2}, \end{aligned}$$

missä p :n kasvaessa rajatta edellinen summalauseke suppenee kohti integraalia $\int_0^a f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr$ ja jälkimmäinen kohti nollaa, sillä

$$\left| \sum_{k=1}^p f\left(\frac{k}{p}a \cos \phi, \frac{k}{p}a \sin \phi\right) \frac{a^2}{2p^2} \right| \leq p \max_{(x,y) \in K_\psi} |f(x, y)| \frac{a^2}{2p^2} \rightarrow 0.$$

Näin ollen kaikilla kyllin pienillä luvun $h > 0$ arvoilla pätee epäyhtälö

$$\left| \frac{1}{h} [F(\phi + h) - F(\phi)] - \int_0^a f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2.$$

(b) Koska funktio $(r, \phi) \mapsto f(r \cos \phi, r \sin \phi) r$ on kompaktissa joukossa $[0, a] \times [0, \psi]$ jatkuvana funktiona tasaisesti jatkuva, funktio $\phi \mapsto \int_0^a f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr$ on jatkuva (harjoitustehtävä). Näin ollen väite seuraa heti (a):sta ja esimerkiksi III.3.4. □

Esimerkki III.4.2. Lasketaan integraali

$$\int_K |x|(y + y^2)z \, dx \, dy \, dz,$$

missä $K = \{ (x, y, z) \mid 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 1 \}$. Käytetään xy -tason yksikkökierkon yli integroinnissa napakoordinaatteja. Lasketaan ensin

$$\begin{aligned} \int_K |x|y^2z \, dx \, dy \, dz &= \int_{\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}} dx \, dy \int_0^{x^2+y^2} |x|y^2z \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2} |r \cos \phi| (r \sin \phi)^2 z r \, dz \, dr \, d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2} r^8 |\cos \phi| \sin^2 \phi \, dr \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{18} |\cos \phi| \sin^2 \phi \, d\phi = \frac{1}{9} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \sin^3 \phi = \frac{2}{27}. \end{aligned}$$

Tämä on jo koko integraali, sillä vastaavalla laskulla tai suoralla symmetriapäätelyllä todetaan, että $\int_K |x|yz \, dx \, dy \, dz = 0$.

Edellisessä esimerkissä siis tulos saatiin iteroituna integraalina integroimalla ensin z -muuttujan suhteen ja sitten "vektorimuuttujan" (x, y) suhteen. Jälkimmäinen integraali oli tässä tapauksessa luonnollista laskea napakoordinaattien avulla. Voidaan myös sanoa, että tässä käytettiin *sylinterikoordinaatteja* r, ϕ, z .

Esimerkki III.4.3. Todistamme kaavan

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Kullekin $a > 0$ merkitään $I(a) = \int_0^a e^{-x^2} \, dx$. Silloin $I(a)^2 = \int_{B_a} f(x, y) \, dx \, dy$, missä $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ ja $B_a = [0, a] \times [0, a]$. Olkoon

$$B_{a,1} = \{ (x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2 \}$$

ja

$$B_{a,2} = \{ (x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2a^2 \}.$$

Napakoordinaattimuunnoksella saadaan

$$\begin{aligned} \int_{B_{a,1}} f &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^a f(r \cos \phi, r \sin \phi) r \, dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^a e^{-r^2} r \, dr = \frac{\pi}{4} [1 - e^{-a^2}]. \end{aligned}$$

Vastaavasti $\int_{B_{a,2}} f = \frac{\pi}{4} [1 - e^{-2a^2}]$. Koska lauseen III.2.3 (b) nojalla

$$\int_{B_{a,1}} f \leq I(a)^2 \leq \int_{B_{a,2}} f,$$

on siis

$$\left[\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx \right]^2 = \lim_{a \rightarrow \infty} I(a)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

IV Käyräintegraalit

IV.1 Polku, käyrä ja suoristuvuus

Joidenkin tässä jaksossa esiteltävien termien käytöstä ei kirjallisuudessa ole yksimielisyyttä. Seuraavaa puhetapaa noudatetaan tässä esityksessä; muualla käytetyt mäaritelmät on syytä aina tarkistaa.

Mäaritelmä IV.1.1. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ja olkoon $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuva kuvaus. Sanomme, että γ on *polku* ($\mathbb{R}^n$:ssä), merkitsemme $\gamma^* = \{ \gamma(t) \mid t \in [a, b] \}$ ja sanomme, että γ^* (eli γ :n *jälki*) on *käyrä* ja γ sen (eräs) *parametriesitys*.

Polku $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *sulkeutuva*, jos $\gamma(a) = \gamma(b)$. Käyrä on sulkeutuva, jos sillä on parametriesitys, joka on sulkeutuva polku. Käyrä on *Jordanin kaari* (tai lyhyesti *kaari*), jos sillä on injektiivinen parametriesitys. *Jordanin käyräksi* sanotaan käyrää, jolla on sellainen parametriesitys $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, että $\gamma(a) = \gamma(b)$ ja rajoittuma $\gamma|_{[a, b]}$ on injektio.

Polku $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *derivoituva pisteessä* $t \in [a, b]$, jos jokaisella komponenttifunktiolla γ_j on t :ssä derivaatta (päätäpisteen tapauksessa toispuolinen derivaatta); merkitsemme

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

Polku $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on derivoituva (välillä $[a, b]$), jos se on derivoituva jokaisessa $[a, b]$:n pisteessä. Jos lisäksi kuvaus $t \mapsto \gamma'(t)$ on jatkuva välillä $[a, b]$, γ on *jatkuvasti derivoituva* (välillä $[a, b]$). Polku $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *paloittain jatkuvasti derivoituva*, jos olemassa pisteet $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$, joille jokainen rajoittuma $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$, $k = 1, \dots, p$, on jatkuvasti derivoituva. Paloittain jatkuvasti derivoituvaa polkua sanomme *tieksi*.

Huomautus IV.1.2. Mäarittelimme käyrän pistejoukkona. Kuitenkin sillä, miten käyrän pisteiden kautta "kuljetaan" on ratkaiseva merkitys useimmissa tilanteissa, joissa käyrän käsite tulee esiin. Niinpä samat pisteet voidaan käydä läpi eri järjestyksessä, sama kierros voidaan kulkea useita kertoja jne. Myöhemmin käsiteltäväsä käyräintegraalien teoriassa operoidaan aina käyrien parametriesityksillä. Teknisesti tämä on yksinkertainen ratkaisu, mutta tilanne on siinä suhteessa epätydyttävä, että saman käyrän eri parametriesitykset kuitenkin voivat edustaa samaa "kulkutapaa" ja johtaa kaikin tavoin identtisiin tuloksiin integroititeoriassa. Tämä ongelma ratkaistaan usein ottamalla käyttöön parametriesitysten ekvivalenssiluokat. Tässä esityksessä ei näin tehdä, vaan tarkastelut suoritetaan yleensä vain yhden kiinteän parametriesityksen suhteen. Jordanin kaaren ja Jordanin käyrän tilanteessa kuitenkin jo pistejoukko ja "suunnistus" voidaan ottaa lähtäkohdiksi; palaamme tähän seikkaan huomautuksessa IV.3.4.

Mäaritelmä IV.1.3. Olkoon $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti derivoituva polku ja $c \in [a, b]$. Jos $\gamma'(c) \neq 0$, sanomme, että $\gamma'(c)$ on käyrän γ^* *tangenttivektori* pisteessä $\gamma(c)$ parametriesityksen γ ja parametrin arvon c suhteen. Sanomme tällöin, että suora $\{ \gamma(c) + \lambda \gamma'(c) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ on käyrän γ^* *tangentti* pisteessä $\gamma(c)$ parametriesityksen γ ja parametrin arvon c suhteen. Joskus sanotaan myös, että $\gamma'(c)$ on *polun* γ *tangenttivektori* c :ssä.

Huomautus IV.1.4. Olkoot $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, jatkuvasti derivoituvia polkuja, joilla on sama jälki, ts. ne ovat saman käyrän parametriesityksiä.

Olkooot $c_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2$, pisteitä, joissa $\gamma_1(c_1) = \gamma_2(c_2)$ ja $\gamma'_1(c_1) \neq 0$, $\gamma'_2(c_2) \neq 0$. Yleisesti näistä ehdoista ei vielä seuraa, että $\gamma'_1(c_1) = \mu \gamma'_2(c_2)$ jollakin $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (käyrä voi leikata itseään), minkä vuoksi edellä olevassa tangentin määritelmässä käytettiin ilmaisua ”parametriesityksen γ ja parametrin arvon c suhteen”. Ilmaisua voidaan jättää pois, jos yhteydestä selviää parametriesityksen ja parametrin arvon valinta. Joissakin tapauksissa parametriesityksen valinta ei vaikuta. Jos esim. edellä γ_1 tai γ_2 on injektio, voidaan osoittaa, että $\gamma'_1(c_1) = \mu \gamma'_2(c_2)$ jollakin $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Määritelmä IV.1.5. Jos $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $\psi : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ovat polkuja, missä $a < b < c$ ja $\gamma(b) = \psi(b)$, sanomme polkua $\psi \vee \gamma : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$, jolle $(\psi \vee \gamma)(t) = \gamma(t)$, kun $t \in [a, b]$, ja $(\psi \vee \gamma)(t) = \psi(t)$, kun $t \in [b, c]$, ψ :n ja γ :n tuloksi eli tulopoluksi ja polkua $\gamma^\leftarrow$, jolle $\gamma^\leftarrow(t) = \gamma(a + b - t)$, $t \in [a, b]$, γ :n käänteispoluksi.

Määritelmä IV.1.6. Olkoon $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ polku. Jokaiselle välin $[a, b]$ jaolle $P : a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$ merkitään

$$\sigma(\gamma, P) = \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

Jos on olemassa sellainen vakio $M \in [0, \infty)$, että $\sigma(\gamma, P) \leq M$ aina, kun P on välin $[a, b]$ jako, polkua γ sanotaan *suoristuvaksi* tai *rajoitetusti heilahtelevaksi*. Tällöin lukua

$$V_\gamma(a, b) = \sup\{\sigma(\gamma, P) \mid P \text{ on välin } [a, b] \text{ jako}\}$$

sanotaan polun γ *pituudeksi* tai *kokonaisheilahteluksi*. Käyrää sanotaan suoristuvaksi, jos sillä on suoristuva parametriesitys.

Lause IV.1.7. Olkoon $a < c < b$. Polku $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on suoristuva, jos ja vain jos molemmat rajoittumat $\gamma|_{[a, c]}$ ja $\gamma|_{[c, b]}$ ovat suoristuvia, ja tällöin

$$V_\gamma(a, c) + V_\gamma(c, b) = V_\gamma(a, b).$$

TODISTUS. Välien $[a, c]$ ja $[c, b]$ jaoista P_1 ja P_2 saadaan ilmeisellä tavalla välin $[a, b]$ jako P_3 , ja näille jaoille pätee $\sigma(\gamma, P_3) = \sigma(\gamma, P_1) + \sigma(\gamma, P_2)$, joten $\sigma(\gamma, P_1) + \sigma(\gamma, P_2) \leq V_\gamma(a, b)$. Mille tahansa välin $[c, b]$ jaolle P_2 on siis $\sigma(\gamma, P_1) \leq V_\gamma(a, b) - \sigma(\gamma, P_2)$, joten supremumin määritelmästä pienimpänä ylärajana näkyy, että $V_\gamma(a, c) \leq V_\gamma(a, b) - \sigma(\gamma, P_2)$ eli $\sigma(\gamma, P_2) \leq V_\gamma(a, b) - V_\gamma(a, c)$. Koska tämä pätee jokaiselle välin $[c, b]$ jaolle P_2 , on jälleen supremumin määritelmän nojalla $V_\gamma(c, b) \leq V_\gamma(a, b) - V_\gamma(a, c)$ eli $V_\gamma(a, c) + V_\gamma(c, b) \leq V_\gamma(a, b)$. Käänteisen epäyhtälön todistamista varten olkoon P välin $[a, b]$ jako. Lisätään siihen kuvapiste c , ellei se jo ole mukana, jolloin saadaan jako P' . Ottamalla jaosta P' mukaan väliin $[a, c]$ kuuluvat kuvapisteen saadaan välin $[a, c]$ jako P'_1 , ja vastaavalla tavalla saadaan välin $[c, b]$ jako P'_2 . Kolmioepäyhtälöä käyttäen nähdään, että $\sigma(\gamma, P) \leq \sigma(\gamma, P') = \sigma(\gamma, P'_1) + \sigma(\gamma, P'_2) \leq V_\gamma(a, c) + V_\gamma(c, b)$. Koska epäyhtälö $\sigma(\gamma, P) \leq V_\gamma(a, c) + V_\gamma(c, b)$ on voimassa jokaiselle välin $[a, b]$ jaolle, supremumin määritelmän nojalla $V_\gamma(a, b) \leq V_\gamma(a, c) + V_\gamma(c, b)$. $\square$

IV.2 Jatkuvasti derivoituvan polun pituus

Olkoon nyt $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti derivoituva polku. Koska γ :lla on jatkuva derivaatta, lauseesta I.6.3 seuraa, että on sellainen $M \in [0, \infty)$, että $\|\gamma'(t)\| \leq M$ kaikilla $t \in [a, b]$. Näin ollen differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla jaolle $P : a = t_0 \leq \dots \leq t_p = b$ on voimassa

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma, P) &= \sum_{k=1}^p \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \\ &= \sum_{k=1}^p \sqrt{[\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})]^2 + \dots + [\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1})]^2} \\ &= \sum_{k=1}^p \sqrt{[\gamma'_1(\xi_{k,1})(t_k - t_{k-1})]^2 + \dots + [\gamma'_n(\xi_{k,n})(t_k - t_{k-1})]^2} \leq \sqrt{n}M(b-a). \end{aligned}$$

Siis joukko $\{\sigma(\gamma, P) \mid P \text{ on välin } [a, b] \text{ jako}\}$ on ylhäältä rajoitettu eli polku γ on suoristuva. Oletamme seuraavassa lauseessa tässä kuvatus tilanteen merkin-
töineen. (Käytämme merkintää $V_\gamma(a, a) = 0$.)

Lause IV.2.1. Merkitään $s(t) = V_\gamma(a, t)$ kaikilla $t \in [a, b]$.

- (a) Funktio s on derivoituva, ja $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ jokaisella $t \in [a, b]$.
- (b) Kaikilla $u \in [a, b]$ on $s(u) = \int_a^u \|\gamma'(t)\| dt$.

TODISTUS. (a) Olkoon $t \in [a, b]$ ja $0 < h < b - t$. Lauseen I.6.3 nojalla on olemassa $M_j(h) = \max\{|\gamma'_j(u)| \mid u \in [t, t+h]\}$, $j = 1, \dots, n$. Olkoon $P : \{0, \dots, p\} \rightarrow [t, t+h]$ välin $[t, t+h]$ jako ja $t_k = P(k)$, $k = 0, \dots, p$. Pifferentialilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa sellaiset luvut $\xi_k^j \in [t_{k-1}, t_k]$, että $\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1}) = \gamma'_j(\xi_k^j)(t_k - t_{k-1})$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$. Siis

$$\begin{aligned} S_\gamma^P &= \sum_{k=1}^p \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \\ &= \sum_{k=1}^p \sqrt{[\gamma'_1(\xi_k^1)(t_k - t_{k-1})]^2 + \dots + [\gamma'_n(\xi_k^n)(t_k - t_{k-1})]^2} \\ &\leq \sum_{k=1}^p \sqrt{M_1(h)^2 + \dots + M_n(h)^2}(t_k - t_{k-1}) = h \sqrt{\sum_{j=1}^n M_j(h)^2}. \end{aligned}$$

Koska tämä pätee jokaiselle välin $[t, t+h]$ jaolle P , supremumin määritelmän mukaan $V_\gamma(t, t+h) \leq h \sqrt{M_1(h)^2 + \dots + M_n(h)^2}$, joten

$$\left\| \frac{1}{h} [\gamma(t+h) - \gamma(t)] \right\| \leq \frac{1}{h} V_\gamma(t, t+h) = \frac{1}{h} [s(t+h) - s(t)] \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n M_j(h)^2},$$

missä ensimmäinen epäytälö seuraa heti luvun $V_\gamma(t, t+h)$ määrittelystä ja seuraava yhtälö lauseesta IV.1.7. Koska γ' on jatkuva, näistä epäytälöistä seuraa, että $\|\gamma'(t)\|$ on funktion s oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä t .

Osoitamme nyt, että jokaisella $t \in (a, b)$ $\|\gamma'(t)\|$ on funktion s vasemmanpuoleinen derivaatta pisteessä t . Määritellään jatkuvasti derivoituva polku $\tilde{\gamma} :$

$[-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ kaavalla $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(-u)$. Helposti todetaan, että $V_\gamma(c, d) = V_{\tilde{\gamma}}(-d, -c)$ aina, kun $a \leq c \leq d \leq b$ (kumpikin on itse asiassa saman lukujoukon supremum). Olkoon $h > 0$. Silloin

$$\begin{aligned} \frac{1}{-h}[s(t-h) - s(t)] &= \frac{1}{-h}[V_\gamma(a, t-h) - V_\gamma(a, t)] \\ &= \frac{1}{-h}[V_{\tilde{\gamma}}(-t+h, -a) - V_{\tilde{\gamma}}(-t, -a)] = \frac{1}{h}[-V_{\tilde{\gamma}}(-t+h, -a) + V_{\tilde{\gamma}}(-t, -a)] \\ &= \frac{1}{h}[V_{\tilde{\gamma}}(-b, -a) - V_{\tilde{\gamma}}(-t+h, -a) - [V_{\tilde{\gamma}}(-b, -a) - V_{\tilde{\gamma}}(-t, -a)]] \\ &= \frac{1}{h}[V_{\tilde{\gamma}}(-b, -t+h) - V_{\tilde{\gamma}}(-b, -t)], \end{aligned}$$

missä viimeinen yhtälö seuraa lauseesta IV.1.7. Kun sovelletaan polkuun $\tilde{\gamma}$ edellä todistettua oikeanpuoleista derivaattaa koskevaa tulosta, nähdään siis, että $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{-h}[s(t-h) - s(t)] = \|\tilde{\gamma}'(-t)\| = \|-\gamma'(t)\| = \|\gamma'(t)\|$, missä keskimäinen yhtäsuuruus seuraa ketjusäännöstä.

Kohta (b) seuraa integraalilaskennan peruslauseen nojalla (a):sta. $\square$

Huomautus IV.2.2. Lauseesta IV.1.7 ja lausetta IV.2.1 edeltävästä päätelystä seuraa, että jokainen tie eli paloittain jatkuvasti derivoituva polku on suoristuva. Tien pituus voidaan lauseen IV.1.7 mukaan laskea jakamalla parametriväli osiin, joilla polku on jatkuvasti derivoituva, ja soveltamalla kuhunkin osaväliin lausetta IV.2.1. Lauseesta IV.1.7 seuraa, että jakotapa ei vaikuta tulokseen.

Esimerkki IV.2.3. Jatkuvasti derivoituvan funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaajalla (joka on Jordanin kaari) on injektiivisenä parametriesityksenä polku $t \mapsto (t, f(t))$, jonka pituus on $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$. Näemme myöhemmin huomautuksessa IV.3.4, että tätä lukua on järkevää sanoa suoraan funktion kuvaajan pituudeksi.

IV.3 Vektorifunktion käyräintegraali

Aloitamme määritelmällä.

Määritelmä IV.3.1. Olkoon $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ suoristuva polku ja f jossakin γ^* :n sisältävässä joukossa määritelty rajoitettu $\mathbb{R}^n$ -arvoinen kuvaus. Jos on olemassa sellainen luku I , että jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$, jolle

$$\left| I - \sum_{i=1}^k f(\gamma(\tau_i)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right| < \varepsilon$$

aina, kun $a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k = b$ ja kaikilla $i = 1, \dots, k$ on $t_i - t_{i-1} < \delta$ ja $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$, niin sanomme, että f on *integroituva pitkin polkua* γ ja tämä luku I on f :n *käyräintegraali yli* γ :n (tai *pitkin* γ :aa). Tällöin merkitsemme

$$I = \int_\gamma f = \int_\gamma f \cdot d\gamma = \int_\gamma f \cdot d\mathbf{x} = \int_\gamma f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_\gamma f_1(\mathbf{x}) dx_1 + \dots + f_n(\mathbf{x}) dx_n.$$

Jos määritelmässä mainitun ehdon täyttävä I on olemassa, se on yksikäsitteisesti määrätty (ja siis siihen liittyvä yhtäläisyysmerkin käyttö on oikeutettu),

sillä jos I' on toinen saman ehdon täyttävä luku, jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen jako, että siihen liittyvälle summalle $\Sigma_P = \sum_{i=1}^k f(\gamma(\tau_i)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$ pätee $|I - I'| \leq |I - \Sigma_P| + |\Sigma_P - I'| < 2\varepsilon$, joten on oltava $I = I'$.

Lause IV.3.2. *Olko γ ja ψ $\mathbb{R}^n$:ssä suoristuvia polkuja, joille $\psi \vee \gamma$ on määriteltä ja joita pitkin $\mathbb{R}^n$ -arvoinen funktio f on integroitava. Silloin f on integroitava pitkin polkuja $\gamma \vee \psi$ ja $\gamma^{\leftarrow}$, ja*

$$\begin{aligned} \int_{\psi \vee \gamma} f &= \int_{\gamma} f + \int_{\psi} f \\ \int_{\gamma^{\leftarrow}} &= - \int_{\gamma} f. \end{aligned}$$

TODISTUS. Olkoon $[a, c]$ γ :n ja $[c, b]$ ψ :n määrittelyväli. Olkoon $\varepsilon > 0$. Olkoon $\delta_1 > 0$ väliin $[a, c]$ ja $\delta_2 > 0$ väliin $[c, b]$ määritelmässä IV.3.1 liittyvä lukua $\frac{\varepsilon}{4}$ vastaava δ -luku. Merkitään $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Koska f on rajoitettu ja γ on jatkuva pisteessä c , voidaan tarvittaessa lukua δ vielä pienentämällä (Cauchyn-Schwarzin epäyhtälöä ja kolmioepäyhtälöä käyttäen) vaatia, että $|f(\gamma(\tau)) \cdot (\gamma(s) - \gamma(t))| < \frac{\varepsilon}{8}$ aina, kun $c, \tau \in [s, t]$, $a \leq s \leq t \leq b$ ja $t - s < \delta$. Tällöin jokaiselle välin $[a, b]$ jaolle $P : a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$, missä aina $t_i - t_{i-1} < \delta$ ja $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, on

$$\left| \int_{\gamma} f \cdot d\gamma + \int_{\psi} f \cdot d\psi - \sum_{i=1}^k f(\gamma(\tau_i)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right| < \varepsilon,$$

mikä nähdään kolmioepäyhtälön avulla korvaamalla tarvittaessa c :n sisäpisteensä sisältävään väliin $[t_{i-1}, t_i]$ liittyvä summan termi lukujen $f(\gamma(c)) \cdot (\gamma(c) - \gamma(t_{i-1}))$ ja $f(\gamma(c)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(c))$ summalla. Tästä seuraa edellinen lauseen yhtälö; jätämme harjoitustehtäväksi kolmioepäyhtälön käyttöä sisältävät yksityiskohdat. Jälkimmäinen yhtälö on ilmeinen. $\square$

Lause IV.3.3. *Olko $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tie ja $f = (f_1, \dots, f_n)$ jossakin käyrän γ^* sisältävässä joukossa jatkuva $\mathbb{R}^n$ -arvoinen kuvaus. Silloin f on integroitava pitkin polkua γ , ja*

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \left[\sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) \right] dt. \end{aligned}$$

TODISTUS. Lauseen IV.3.2 nojalla riittää todistaa lause siinä tapauksessa, että γ on jatkuvasti derivoituva. Olkoon $\varepsilon > 0$. Kiinnitetään $j \in \{1, \dots, n\}$. Koska kuvaus $(s, t) \mapsto h(s, t) = f_j(\gamma(s)) \gamma'_j(t)$ on jatkuva kompaktissa joukossa $[a, b] \times [a, b]$, se on tasaisesti jatkuva lauseen I.6.9 nojalla. On siis olemassa sellainen $\delta_j > 0$, että $|h(s_1, t_1) - h(s_2, t_2)| < \varepsilon$, kun $\max\{|s_1 - s_2|, |t_1 - t_2|\} < \delta_j$ (käytetään lausetta I.1.1). Olkoon $P : a = t_1 \leq \dots \leq t_k$ mikä tahansa välin $[a, b]$ jako, jolle $t_i - t_{i-1} < \delta_j$ kaikilla $i = 1, \dots, k$. Käyttämällä differentiaalilaskennan väliarvolausetta funktioihin $t \mapsto \int_a^t f_j(\gamma(u)) \gamma'_j(u) du$ ja $t \mapsto \gamma'_j(t)$ saadaan sellaiset luvut $\eta_i, \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, että $\int_{t_{i-1}}^{t_i} f_j(\gamma(u)) \gamma'_j(u) du = f_j(\gamma(\eta_i)) \gamma'_j(\eta_i) (t_i -$

t_{i-1}) ja $\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{j-1}) = \gamma'_j(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$. Näin ollen millä tahansa valinnoilla $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ saadaan arvio

$$\left| \int_a^b \gamma_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt - \sum_{i=1}^k f_j(\gamma(\tau_i)) (\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i-1})) \right| \\ \leq \sum_{i=1}^k |f_j(\gamma(\eta_i)) \gamma'_j(\eta_i) - f_j(\gamma(\tau_i)) \gamma'_j(\xi_i)| (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon(b-a).$$

Kullekin $j = 1, \dots, n$ saadaan näin oma $\delta_j > 0$. Merkitään

$\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. Kun otetaan mikä tahansa välin $[a, b]$ jako $P : a = t_1 \leq \dots \leq t_k$, jolle $t_i - t_{i-1} < \delta$ kaikilla $i = 1, \dots, k$, ja valitaan $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, saadaan lausetta I.1.1 (c) käyttäen

$$\left| \int_a^b \gamma(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt - \sum_{i=1}^k f(\gamma(\tau_i)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right| < \varepsilon n(b-a).$$

Tästä väite seuraa, koska $n(b-a)$ on luvusta ε riippumaton vakio. $\square$

Huomautus IV.3.4. (a) Jos $\gamma : [a, b] \rightarrow C \subset \mathbb{R}^n$ ja $\psi : [c, d] \rightarrow C \subset \mathbb{R}^n$ ovat saman Jordanin kaaren C injektiivisiä parametriesityksiä, kuvaus $\psi^{-1} \circ \gamma : [a, b] \rightarrow [c, d]$ on lauseen I.6.2 nojalla jatkuva bijektio. Bolzanon lauseen avulla nähdään, että tällainen funktio on joko aidosti kasvava tai aidosti vähenevä (harjoitustehtävä). Jordanin kaaren injektiivisen parametriesityksen suoristuvuus ja pituus nähdään näin riippumattomiksi injektiivisen parametriesityksen valinnasta. Niinpä voidaan puhua suoraan Jordanin kaaren pituudesta. Esimerkissä IV.2.3 siis kyseinen integraalilauseke antaa funktion kuvaajan pituuden. Vastaava toteamus koskee Jordanin käyriä (ks. (c)).

(b) Oletetaan edellisen kohdan tilanne, jossa γ (ja siis ψ) on suoristuva polku. Käyttäen jatkuvan bijektion $\psi^{-1} \circ \gamma : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ja sen käänteiskuvauksen tasaista jatkuvuutta nähdään, että $\int_\gamma f = \int_\psi f$ tai $\int_\gamma f = -\int_\psi f$ aina, kun kumpi tahansa puoli on olemassa; edellinen yhtälö pätee, jos $\psi^{-1} \circ \gamma$ on aidosti kasvava, ja jälkimmäinen, mikäli se on aidosti vähenevä. Näin ollen suoristuvan kaaren yli otetun käyräintegraalin olemassaolo ja arvo (kun rajoitutaan injektiivisiin parametriesityksiin) ovat täysin määrättyt niin pian, kun jollakin tavoin on ilmaistu ”suunnistus”, eli kumpaa päätepistettä pidetään alku- ja kumpaa loppupisteenä. (Selvästi päätepisteiden joukko on riippumaton injektiivisen parametriesityksen valinnasta.) Tämä voidaan myös merkinnässä ottaa huomioon ja kirjoittaa esim. ”integraali $\int_C f$ pisteestä $\mathbf{x}$ pisteeseen $\mathbf{y}$ ”, missä nyt $C \subset \mathbb{R}^n$ on kaari eikä polku.

(c) Edellisten kohtien toteamukset pätevät sopivin muutoksin myös Jordanin käyriin nähden, jolloin siis esim. voidaan puhua Jordanin käyrän suoristuvuudesta ja pituudesta mainitsematta parametriesitystä. Olkoon $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ suoristuva polku, jolle

(1) $\gamma(a) = \gamma(b)$ ja

(2) rajoittuma $\gamma|_{[a, b)}$ on injektio.

Voidaan melko helposti osoittaa, että $\int_\gamma f = \int_\psi f$ tai $\int_\gamma f = -\int_\psi f$ aina, kun myös ψ on (omaan parametriväliinsä nähden) ehdot (i) ja (ii) täyttävä γ :n parametriesitys, niin pian kuin mikä tahansa näistä integraaleista on olemassa. Formalisoimatta suunnistuksen käsitettä, josta tässä merkin valinta ri-

ippuu, tyydyimme tarkastelemaan asiaa havainnollisesti tasossa. Sanomme, että Jordanin käyrän $C \subset \mathbb{R}^2$ ehdot (i) ja (ii) täyttävä parametriesitys γ välillä $[a, b]$ on *positiivisesti suunnistettu*, jos t :n kulkiessa a :sta b :hen käyrän C sisäpuolelle jäävä alue on aina $\gamma(t)$:n vasemmalla puolella. (Korostamme vielä, että tämä ei ole mikään oikea matemaattinen määritelmä, jollainen on esim. M.H.A. Newmanin kirjan ”Elements of the topology of plane sets of points” sivulla 194.) Havainnollisesti positiivinen suunnistus merkitsee kiertämistä vastapäivään. Käytämme joskus esim. merkintää $\oint_C f \cdot d\mathbf{x}$ osoittamaan, että kyseessä on integraali positiiviseen kiertosuuntaan, vaikka kirjallisuudessa tätä merkintää saatetaan käyttää yleensäkin käyräintegraalille sulkeutuvan tien yli.

Esimerkki IV.3.5. Määritellään polku $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ kaavalla $\gamma(t) = (t^2, t^2)$. Silloin γ on pisteitä $(1, 1)$ ja $(0, 0)$ yhdistävän janan parametriesitys, joka ”piirtää” tämän janan C kahteen kertaan. Polku $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, missä $\psi(t) = (t, t)$, on eräs C :n injektiivinen parametriesitys. Olkoon $f(x, y) = (x^2 + y, x + y^3)$. Silloin

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \cdot d\mathbf{x} &= \int_{\gamma} (x^2 + y) dx + (x + y^3) dy = \int_{-1}^1 [((t^2)^2 + t^2)2t + (t^2 + (t^2)^3)2t] dt \\ &= \int_{-1}^1 2(t^6 + t^4 + 2t^2)t dt = 0. \end{aligned}$$

Sen sijaan

$$\int_{\gamma|_{[0,1]}} (x^2 + y) dx + (x + y^3) dy = \int_0^1 2(t^7 + t^5 + 2t^3) dt = \frac{19}{12}.$$

Tämä on sama kuin

$$\int_{\psi} f \cdot d\mathbf{x} = \int_0^1 (t^2 + t) dt + \int_0^1 (t + t^3) dt = \frac{19}{12}.$$

Nämä tulokset havainnollistavat lausetta IV.3.2 ja huomautusta IV.3.4 (a).

Esimerkki IV.3.6. Olkoon $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, kun $t \in [0, 2\pi]$. Silloin

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (\cos t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Voitaisiin myös merkitä

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 2\pi,$$

missä $C = \{(\cos t, \sin t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

IV.4 Integraali kaarenpituuden suhteen

Tarkastelemme jatkuvasti jatkuvaa polkua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, missä $\gamma'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [a, b]$. Merkitään

$$v(u) = \int_a^u \|\gamma'(t)\| dt$$

kaikilla $u \in [a, b]$. Koska integroitava on jatkuva ja positiivinen, näin määritelty funktio $v : [a, b] \rightarrow [0, L]$, missä L on γ :n pituus, on aidosti kasvava jatkuvasti derivoituva bijektio, jonka käänteiskuvaus myös on jatkuvasti derivoituva. Kuvaus $\psi = \gamma \circ v^{-1} : [0, L] \rightarrow \gamma^*$ on käyrän γ^* jatkuvasti derivoituva parametriesitys, jossa sanotaan olevan *kaarenpituus parametrina*. Ketjusäännöstä seuraa, että $\|\psi'(s)\| = \|\gamma'(v^{-1}(s))\| [v'(v^{-1}(s))]^{-1} = \|\gamma'(v^{-1}(s))\| \|\gamma'(v^{-1}(s))\|^{-1} = 1$ kaikilla $s \in [0, L]$, joten lauseen IV.2.1 nojalla jokaisella $s \in [0, L]$ pätee $V_\psi(0, s) = s$.

Lause IV.4.1. *Edellä olevin oletuksin ja merkinnöin*

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^L f(\psi(s)) ds$$

jokaiselle jatkuvalla funktiolla $f : \gamma^ \rightarrow \mathbb{R}$.*

TODISTUS. Tehdään oikeanpuoleiseen integraaliin muuttujanvaihto $s = v(t)$, $ds = v'(t) dt = \|\gamma'(t)\| dt$ ja otetaan huomioon, että $f(\psi(v(t))) = f(\gamma(t))$. $\square$.

Jos ei tehdä oletusta, että $\gamma'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [a, b]$, ei funktiolla $t \mapsto v(t) = V_\gamma(t)$ välttämättä ole (edes Jordanin kaaren tilanteessa) derivoituvaa käänteisfunktioita. Siinäkin tapauksessa käytämme seuraavaa puhetapaa:

Määritelmä IV.4.2. Jos $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on jatkuvasti derivoituva polku ja $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio, merkitsemme

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

ja sanomme, että tämä luku on *f :n (käyrä)integraali yli γ :n kaarenpituuden suhteen*. Jakamalla parametriväli tavalliseen tapaan osiin määritellään vastaavasti integraali yli tien kaarenpituuden suhteen.

Huomautus IV.4.3. Analogisesti huomautuksen IV.3.4 kanssa saatamme käyttää määritelmän IV.4.2 tilanteessa merkinnän $\int_\gamma$ sijasta merkintää $\int_C$, kun $C = \gamma^*$, ja γ on injektio (Jordanin kaaren tapaus) tai γ täyttää huomautuksen IV.3.4 (b) ehdot (i) ja (ii) (Jordanin käyrän tapaus). Kummassakaan tilanteessa ei C :n kyseiset ehdot täyttävän parametriesityksen valinnalla ole merkitystä. Integroinnissa kaarenpituuden suhteen ei edes suunnistus vaikuta tulokseen (harjoitustehtävä).

Esimerkki IV.4.4. Määritellään polku $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ kaavalla

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Olkoon $f(x, y) = x^2$ kaikilla $(x, y) \in \gamma^*$. Lasketaan f :n integraali kaarenpituuden suhteen yli γ :n. Määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} \int_\gamma f ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t \sqrt{9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos^7 t \sin t dt = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Esimerkki IV.4.5. Olkoon $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ jatkuvasti derivoituva polku, jolle $\gamma'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [a, b]$. Merkitään $T(t) = \|\gamma'(t)\|^{-1} \gamma'(t)$. Jokaiselle jatkuvalle kuvaukselle $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ on

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot T(t) \|\gamma'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Oletetaan lisäksi, että γ on injektio, jolloin käyrän γ^* jokaisessa pisteessä on tangentti määritelmän IV.1.3 mielessä. Käytämme merkintää $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ γ^* :n yksikkö-tangenttivektorille ” γ :n kulkusuuntaan” pisteessä $\mathbf{x} \in \gamma^*$, ts. $\mathbf{T}(\gamma(t)) = T(t)$ kaikilla $t \in [a, b]$. Silloin edellisen mukaan

$$\int_{\gamma} f \cdot d\mathbf{x} = \int_{\gamma} f \cdot \mathbf{T} ds,$$

missä $f \cdot \mathbf{T}$ on kuvaus $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x})$ joukossa γ^* . Näin on saatu yhteys edellisessä ja tässä jaksossa käsiteltyjen integraalien välille.

Esimerkki IV.4.6. Olkoon edellisessä esimerkissä $n = 3$. Tarkastelemme soveluksena fysikaalista tilannetta, missä kussakin pisteessä $\mathbf{x} \in \gamma^*$ $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ on vektori, jonka ajatellaan kuvaavan pisteessä $\mathbf{x}$ olevaan objektiin vaikuttavaa voimaa. Oletetaan, että f on jatkuva γ^* :llä. Voimavektorin $f(\gamma(t))$ kuva ortogonaalisessa projektiossa tangenttivektorin $\gamma'(t)$ määäämälle $\mathbb{R}^3$:n yksiulotteiselle aliavaruudelle on $(f(\gamma(t)) \cdot T(t))T(t)$, missä $T(t) = \|\gamma'(t)\|^{-1} \gamma'(t)$. Koska $T(t)$ on yksikkövektori, skalaaritulo $f(\gamma(t)) \cdot T(t)$ ilmaisee sen suuntaan vaikuttavan voiman suuruuden (etumerkin huomioon ottaen). Kun tämä integroidaan kaarenpituuden suhteen, saadaan voimakentän f suorittama työ yli polun γ eli edellisen esimerkin oletuksilla ja merkinnöillä

$$\int_{\gamma} f \cdot \mathbf{T} ds = \int_{\gamma} f \cdot d\mathbf{x}.$$

Eräissä tapauksissa tämä työ voidaan ilmaista myös potentiaalienergian muutoksena. Näin on esim. silloin, kun voimana on maan gravitaatiokentän tiettyyn massa kohdistama voima. Oleellista tässä on se, että maan gravitaatiokenttä on *konservatiivinen*, mikä tarkoittaa sitä, että se on ns. *gradienttikenttä* eli jonkin skalaarifunktion, ns. *potentiaal*in gradientti. (Fysiikassa tosin yleensä potentiaalilla tarkoitetaan tällaista funktiota kerrottuna miinus yhdellä; yllä oleva puhetapa on käytössä matematiikassa.)

V.1 Implisiittifunktiolauseen geometrisia sovelluksia

Ns. implisiittifunktiolause on moniulotteisen differentiaalilaskennan hyödyllisiä tuloksia. Mainitsemme tämän lauseen tässä jaksossa ilman todistusta. Johdamme implisiittisesti määriteltyjen funktioiden kuvaajien tangentteja ja normaaleja koskevia sovelluksia. Samalla luodaan pohjaa seuraavassa jaksossa todistettavalle sidottujen ääriarvojen etsimistä ns. Lagrangen menetelmällä käsittelevälle lauseelle.

Koko tässä jaksossa käytämme seuraavia sopimuksia ja merkintöjä. Samastamme karteesisen tulon $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ avaruuden $\mathbb{R}^{n+m}$ kanssa kirjoittamalla

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

jos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$.

Merkitsemme $q = n + m$. Ellei toisin mainita, oletamme koko jaksossa V.1, että $A \subset \mathbb{R}^q$ on avoin joukko ja $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ jatkuvasti differentioituva kuvaus.

Seuraava lause on välitön seuraus tunnetuista lineaarialgebran tuloksista.

Lause V.1.1. *Olko $\mathbf{p} \in A$. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

- (i) *gradientit $\nabla \phi_i(\mathbf{p})$, $i = 1, \dots, m$, muodostavat lineaarisesti riippumattoman joukon avaruudessa $\mathbb{R}^q$;*
- (ii) *ϕ :n Jacobin matriisista pisteessä $\mathbf{p}$ voidaan valita m :n lineaarisesti riippumattoman pystyvektorin joukko;*
- (iii) *ϕ :n Jacobin matriisista pisteessä $\mathbf{p}$ voidaan valita m pystyvektoria, joiden muodostaman matriisin determinantti on nollasta eriävä;*
- (iv) *$\dim[D\phi(\mathbf{p})](\mathbb{R}^{n+m}) = m$;*
- (v) *$[D\phi(\mathbf{p})](\mathbb{R}^{n+m}) = \mathbb{R}^m$.*

Määritelmä V.1.2. Sanomme, että piste $\mathbf{p} \in A$ on *(ϕ :n suhteen) säännöllinen*, jos edellisen lauseen yhtäpitävät ehdot ovat voimassa.

Vielä yksi tapa ilmaista $\mathbf{p}$:n säännöllisyys on sanoa, että ϕ :n pisteessä $\mathbf{p}$ otetun Jacobin matriisin aste on maksimaalinen eli m .

Määritelmä V.1.3. Joukon $S \subset \mathbb{R}^q$ *ortogonaalikomplementti* on joukko

$$S^\perp = \{ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^q \mid \mathbf{h} \cdot \mathbf{k} = 0 \text{ kaikilla } \mathbf{k} \in S \}.$$

Pidämme seuraavan yksinkertaisen lineaarialgebran lauseen tunnettuna.

Lause V.1.4. (a) *Jos $S \subset \mathbb{R}^q$, niin $S^\perp$ on $\mathbb{R}^q$:n vektorialiavaruus.*

(b) *Jos H on $\mathbb{R}^q$:n alivaruus, niin $H^{\perp\perp} (= (H^\perp)^\perp) = H$ ja $\dim H + \dim H^\perp = q$.*

Lauseissa V.1.5 ja V.1.7 oletamme, että $\mathbf{p} \in A$ on ϕ :n suhteen säännöllinen piste, jossa $\phi(\mathbf{p}) = 0$. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi oletamme, että pisteessä $\mathbf{p}$ ϕ :n Jacobin matriisin nimenomaan m :n oikeanpuolimmaisen pystyriivin muodostaman matriisin determinantti on nollasta eriävä. Tämä ei merkitse yleisyyden rajoittamista, sillä muuttujat voidaan tarvittaessa ajatella uudelleen numeroiduiksi siten, että päästään mainittuun tilanteeseen. Merkitsemme $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, missä $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Lause V.1.5 (Implisiittifunktiolause). *Edellä tehdyin oletuksin on olemassa sellainen $\mathbf{a}$:n sisältävä avoin joukko $U \subset \mathbb{R}^n$ ja sellainen $\mathbf{b}$:n avoin palloymäristö $V \subset \mathbb{R}^m$, että $U \times V \subset A$ ja*

- (i) *jokaista $\mathbf{x} \in U$ vastaa yksi ja vain yksi $\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) \in V$, jolla $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$;*
- (ii) *näin määritelty ”implisiittifunktio” $g : U \rightarrow V$ on jatkuvasti differentioituva, ja mikäli ϕ on C^r -kuvaus A :ssa, niin g on C^r -kuvaus U :ssa.*

Sivuutamme implisiittifunktiolauseen (pitkän ja mutkikkaan) todistuksen. Seuraava esimerkki havainnollistaa implisiittifunktiolauseen käyttöä, vaikka siinä lausetta ei tarvittaisikaan, koska muuttujia sitovasta yhtälöstä voidaan yksi eksplisiittisesti ratkaista muiden funktiona.

Esimerkki V.1.6. Määritellään C^∞ -funktio $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Silloin $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z \neq 0$, jos $z \neq 0$. Jos $a^2 + b^2 \leq 1$, on olemassa (ainakin yksi) c , jolle $f(a, b, c) = 0$. Jos $a^2 + b^2 < 1$, on tässä $c \neq 0$ eli $\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$. (Saadaan kaksi erilaista tapausta sen mukaan, valitaanko $c > 0$ vai $c < 0$.) Voidaan siis soveltaa lausetta V.1.5. Implisiittifunktiolle $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ (missä $(a, b) \in U \subset \mathbb{R}^2$) on $g(a, b) = c$ ja $f(x, y, g(x, y)) = 0$. Ns. implisiittinen derivointi yhtälössä $f(x, y, g(x, y)) = 0$ antaa $2x + 2g(x, y) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$ ja $2y + 2g(x, y) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$, mistä $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ ja $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ voidaan ratkaista jossakin pisteen (a, b) ympäristössä (jossa $g(x, y) \neq 0$). Tässä tapauksessa tiedetään suoraan, että $z = g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ tai $z = g(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Siis implisiittisellä derivoinnilla saadut osittaisderivaat ovat

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \mp \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \mp \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

missä ylempi merkki viittaa ylempään ja alempi alempaan pallonpuoliskoon. Sama tulos saadaan luonnollisesti suoraan derivoimalla g :n ratkaistusta lausekkeesta. Tämä esimerkki korostaa implisiittifunktiolauseen lokaalista luonnetta: Pitää valita riittävän pieni c :n ympäristö, jotta yhtälöllä $f(x, y, z) = 0$ olisi vain yksi siihen kuuluva ratkaisu (muuten voi olla kaksi).

Olko nyt U , V ja g kuten implisiittifunktiolauseessa V.1.5. Siis $U \subset \mathbb{R}^n$ ja $V \subset \mathbb{R}^m$ ovat avoimia joukkoja, $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U \times V \subset A$, ja $g : U \rightarrow V$ on yksikäsitteisesti määrätty jatkuvasti differentioituva kuvaus, jolle $\phi(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in U$; erityisesti $g(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$.

Palautetaan mieleen, että *jatkuvasti derivoituva polulla* $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow A$ tarkoitetaan funktiota $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_q)$, jonka jokaisella komponenttifunktiolla γ_i on välillä $[\alpha, \beta]$ jatkuva derivaatta. Merkitsemme $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_q(t))$.

Lause V.1.7. *Edellä mainituin oletuksin ja merkinnöin vektorille $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+m}$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

- (i) $\nabla \phi_i(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} = 0$ jokaisella $i = 1, \dots, m$;
- (ii) *on olemassa jatkuvasti derivoituva polku $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow A$, $\alpha < 0 < \beta$, jolle $\phi(\gamma(t)) = 0$ kaikilla $t \in [\alpha, \beta]$, $\gamma(0) = \mathbf{p}$ ja $\gamma'(0) = \mathbf{w}$;*
- (iii) $\mathbf{w} = (\mathbf{u}, Dg(\mathbf{a})\mathbf{u})$ jollekin $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

TODISTUS. Olkoon H vektoreiden $\nabla\phi_i(\mathbf{p})$ virittämä aliavaruus, ts.

$$H = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla\phi_i(\mathbf{p}) \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ kaikilla } i = 1, \dots, m \right\}.$$

Merkitään

$$T = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \mathbf{w} \text{ täyttää ehdon (ii)} \right\}$$

ja

$$D = \left\{ (\mathbf{u}, Dg(\mathbf{a})\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Jos $\mathbf{w} \in T$ eli $\mathbf{w} = \gamma'(0)$ jollekin kohdassa (ii) mainittua tyyppiä olevalle polulle γ , on jokaisella $i = 1, \dots, m$ ketjusäännön nojalla

$$\nabla\phi_i(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} = \frac{d}{dt}\phi_i(\gamma(t))\big|_{t=0} = 0,$$

joten $\mathbf{w} \in H^\perp$. Siis $T \subset H^\perp$.

Olkoon nyt $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{w} = (\mathbf{u}, Dg(\mathbf{a})\mathbf{u})$. Koska $\mathbf{a}$ on U :n sisäpiste, voidaan sopivalla 0 :n sisäpisteenään sisältävällä välillä $[\alpha, \beta]$ määritellä $\mathbb{R}^{n+m}$ -arvoinen funktio γ asettamalla $\gamma(t) = (\mathbf{a} + t\mathbf{u}, g(\mathbf{a} + t\mathbf{u}))$. Silloin γ on jatkuvasti derivoituva polku, $\phi(\gamma(t)) = 0$ kaikilla $t \in [\alpha, \beta]$, ja $\gamma(0) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{p}$. Lisäksi $\gamma'_j(0) = u_j$, jos $j = 1, \dots, n$, ja

$$\gamma'_{n+i}(0) = \frac{d}{dt}g_i(\mathbf{a} + t\mathbf{u})\big|_{t=0} = \nabla g_i(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u},$$

kun $i = 1, \dots, m$, joten $\gamma'(0) = (\gamma'_1(0), \dots, \gamma'_{n+m}(0)) = (\mathbf{u}, Dg(\mathbf{a})\mathbf{u}) = \mathbf{w}$. Siis $D \subset T$.

Koska kuvaus $\mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}, Dg(\mathbf{a})\mathbf{u})$ selvästi on lineaarinen injektio $\mathbb{R}^n$:stä avaruuteen $\mathbb{R}^{n+m}$, on D $\mathbb{R}^{n+m}$:n aliavaruus, jonka dimensio on n . Koska myös $\dim(H^\perp) = n$ lauseen V.1.4 (b) nojalla, ja $D \subset T \subset H^\perp$, on oltava $D = T = H^\perp$. $\square$

Esimerkki V.1.8. Havainnollistetaan edellisen lauseen tilannetta yksinkertaisella esimerkillä. Olkoon $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

määritelty kuvaus. Merkitään $N = \phi^{-1}(0)$. Kuvauksen ϕ Jacobin matriisi pisteessä (x, y, z) on $(2x \ 2y \ 2z)$, joten jokainen N :n piste on ϕ :n suhteen säännöllinen. Merkitään $\mathbf{p} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$. Olkoon $g : U \rightarrow V$ implisiittifunktio-lauseen V.1.5 mukainen funktio, missä $U \subset \mathbb{R}^2$ on pisteen $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ sisältävä avoin joukko ja $V \subset \mathbb{R}$ pisteen $-\frac{1}{2}$ sisältävä avoin joukko ja $\phi(x, y, g(x, y)) = 0$ kaikilla $(x, y) \in U$. Nyt $\nabla\phi(\mathbf{p}) = (1, \sqrt{2}, -1)$, ja kaikkien tätä vektoria vastaan kohtisuorassa olevien $\mathbb{R}^3$:n vektoreiden joukko on

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid x + \sqrt{2}y - z = 0 \right\}.$$

Funktiolle g saadaan eksplisiittinen lauseke $g(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, josta derivoimalla saadaan derivaatan $Dg(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ matriisiksi $(1 \ \sqrt{2})$, joten tämän lineaarikuvauksen kuvaaja on $\left\{ (x, y, z) \mid z = x + \sqrt{2}y \right\}$ eli juuri S kuten

edellisen lauseen mukaan pitää ollakin. Määritellään polku $\gamma : [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ kaavalla

$$\gamma(t) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} + t, -\sqrt{\frac{1}{4} - \sqrt{2}t - t^2}).$$

Suoralla laskulla nähdään, että $\phi(\gamma(t)) = 0$ kaikilla $t \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$, $\gamma(0) = \mathbf{p}$ ja $\gamma'(0) = (0, 1, \sqrt{2}) \in S$ sopusoinnussa lauseen V.1.7 kanssa.

Määritelmä V.1.9. Merkitään $N = \{\mathbf{x} \in A \mid \phi(\mathbf{x}) = 0\}$. Olkoon $\mathbf{p} \in N$ ϕ :n suhteen säännöllinen piste. Avaruuden $\mathbb{R}^{n+m}$ osajoukkoa

$$\begin{aligned} T(N; \mathbf{p}) &= \{\mathbf{p} + \mathbf{w} \mid \nabla \phi_i(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ kaikilla } i = 1, \dots, m\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \nabla \phi_i(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0 \text{ kaikilla } i = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

(joka lauseen V.1.7 todistuksen merkinnöin on sama kuin $\mathbf{p} + T = \mathbf{p} + D$) sanomme N :n *tangentti- n -tasoksi* pisteessä $\mathbf{p}$. (Jos $m = 1$, puhutaan myös *tangenttihakertasosta*. Jos $m = 1$ ja $n = 2$, puhutaan *tangenttitasosta*, ja tapauksessa $n = 1$ *tangentista* tai *tangenttisuorasta*.)

Tätä puhetapaa motivoi lause V.1.7, erityisesti sen ehto (ii).

Huomautus V.1.10. Vektoreille $\mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^q$ ehto $\mathbf{h} \cdot \mathbf{k} = 0$ voidaan ilmaista sanomalla, että $\mathbf{h}$ ja $\mathbf{k}$ ovat toisiaan vastaan *kohtisuorat* eli *ortogonaaliset*. Esim. $\mathbb{R}^3$:n tapauksessa tällä puhetavalla on sen tavanomainen geometrinen sisältö. Jos edellä $n = 1$ ja $m = 2$, C^1 -kuvauksen $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ suhteen säännölliselle pisteelle $\mathbf{p} \in \phi^{-1}(0) = N$ joukkoa

$$N(N; \mathbf{p}) = \{\mathbf{p} + \lambda_1 \nabla \phi_1(\mathbf{p}) + \lambda_2 \nabla \phi_2(\mathbf{p}) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

sanotaankin N :n *normaalitasoksi* pisteessä $\mathbf{p}$. Jos taas $n = 2$ ja $m = 1$, reaaliarvoisen C^1 -funktion ϕ suhteen säännölliselle pisteelle $\mathbf{p} \in \phi^{-1}(0) = N$ joukko

$$N(N; \mathbf{p}) = \{\mathbf{p} + \lambda \nabla \phi(\mathbf{p}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

on $\phi^{-1}(0)$:n *normaali(suora)* pisteessä $\mathbf{p}$.

Esimerkki V.1.11. Olkoot $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Määritellään

$$\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Funktion ϕ ns. *tasa-arvopinnat* $M_d = \phi^{-1}(d)$, $d > 0$, ovat ellipsoideja. Koska

$$\nabla \phi(x, y, z) = (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}) \neq (0, 0, 0),$$

jos $(x, y, z) \in M_d$, kunkin M_d :n jokainen piste on säännöllinen. Olkoon $\mathbf{q} = (x_0, y_0, z_0) \in M_d$. Ellipsoidin M_d normaali (ks. V.1.10) pisteessä $\mathbf{q}$ on suora

$$N(M_d; \mathbf{q}) = \{(x_0 + \lambda \frac{x_0}{a^2}, y_0 + \lambda \frac{y_0}{b^2}, z_0 + \lambda \frac{z_0}{c^2}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

ja sen tangenttitaso (ks. V.1.9) samassa pisteessä on

$$\{(x, y, z) \mid \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0\}$$

eli

$$\left\{ (x, y, z) \mid \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = d \right\},$$

koska $\phi(x_0, y_0, z_0) = d$.

Esimerkki V.1.12. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $g = (g_1, g_2) : U \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -funktio. Määritellään kuvaus $\phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla $\phi(x, y, z) = g(x, y) - z$. Silloin $N = \phi^{-1}(0)$ on funktion g kuvaaja eli

$$N = \{ (x, y, g(x, y)) \mid (x, y) \in U \}.$$

Koska $\nabla\phi(x, y, z) = (\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y), -1) \neq (0, 0, 0)$, jokainen N :n piste on ϕ :n suhteen säännöllinen. Funktion g kuvaajan pisteen $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ kautta kulkeva normaali on siis vektorin $(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -1)$ suuntainen suora

$$\{ (x_0, y_0, g(x_0, y_0)) + \lambda(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0), -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \},$$

ja pisteen $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ kautta kulkevan tangenttitason yhtälö on

$$(x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) - (z - z_0) = 0$$

eli

$$z = z_0 + \nabla g(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

Esimerkki V.1.13. Oletetaan, että edellisen esimerkin tilanteessa funktio g saa arvon c jossakin pisteessä (x_0, y_0) , jossa g :n gradientti ei häviä. Tasa-arvokäyrän

$$g^{-1}(c) = \{ (x, y) \mid g(x, y) - c = 0 \}$$

normaali pisteessä (x_0, y_0) on gradienttivektorin $\nabla g(x_0, y_0)$ suuntainen. Toisaalta tiedetään, että gradientin $\nabla g(x_0, y_0)$ suuntaan funktio g kasvaa jyrkimmin (ks. II.4.4). Tämä sopii yhteen sen kanssa, mitä käytännössä on havaittavissa karttojen korkeuskäyristä.

Esimerkki V.1.14. Olkoon $\phi = (\phi_1, \phi_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kuvaus, jolle $\phi_1(x, y, z) = x^3 - xy + z + 1$ ja $\phi_2(x, y, z) = y^3 - xz + x - 3$ kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Merkitään $N = \phi^{-1}(0)$, jolloin $\mathbf{p} = (1, 1, -1) \in N$. Kuvauksen ϕ Jacobin matriisi pisteessä $\mathbf{p}$ on $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Koska $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $\mathbf{p}$ on ϕ :n suhteen säännöllinen. Implisiittifunktiolauseen nojalla on olemassa jossakin luvun 1 ympäristössä $\Delta \subset \mathbb{R}$ määritelty C^1 -funktio $g = (g_1, g_2)$, jolle $g(1) = (1, -1)$ ja $\phi(x, g_1(x), g_2(x)) = 0$ kaikilla $x \in \Delta$. Käytetään funktiolle g_1 merkintää $x \mapsto y(x)$ ja funktiolle g_2 merkintää $x \mapsto z(x)$. Derivoimalla yhtälöiden $x^3 - xy(x) + z(x) + 1 = 0$ ja $y(x)^3 - xz(x) + x - 3 = 0$ molemmat puolet x :n suhteen saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x^2 - y(x) - xy'(x) + z'(x) = 0 \\ 3y^2(x)y'(x) - z(x) - xz'(x) + 1 = 0. \end{cases}$$

Sijoittamalla $x = 1$, $y(1) = 1$ ja $z(1) = -1$ sekä ratkaisemalla saadaan $y'(1) = -2$, $z'(1) = -4$. Pisteiden $(1, 1, -1)$ erään palloympäristön ja N :n leikkaus on

osa polun $x \mapsto (x, y(x), z(x))$ jälkeen, joten on luonnollista sanoa tämän polun derivaattavektoria $(1, y'(1), z'(1)) = (1, -2, -4)$ N :n tangenttivektoriksi pisteessä $(1, 1, -1)$, ja vastaavaksi tangenttisuoraksi saadaan

$$\{ (1, 1, -1) + \lambda(1, -2, -4) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Samaan päädytään toisella tavalla seuraavasti. Gradienttien $\nabla\phi_1(\mathbf{p}) = (2, -1, 1)$ ja $\nabla\phi_2(\mathbf{p}) = (2, 3, -1)$ vektoritulo eli ristitulo on vektori $(-2, 4, 8)$, joka tunnetusti on kohtisuorassa kumpaakin vastaan. (Vektorituloa koskevia perusasioita kerrataan jaksossa IX.3.) Selvästi vektori $(-2, 4, 8)$ määrää saman suoran pisteen $(1, 1, -1)$ kautta kuin edellä saatu vektori $(1, -2, -4)$.

Normaalitasoksi joukolle N pisteessä $(1, 1, -1)$ saadaan

$$\{ (x, y, z) \mid x - 1 - 2(y - 1) - 4(z + 1) = 0 \}$$

eli taso $x - 2y - 4z = 3$. Sama taso voidaan ilmaista parametrimuodossa ϕ_1 :n ja ϕ_2 :n gradienttivektoreiden avulla huomautuksen V.1.10 mukaisesti joukkona

$$\{ (1, 1, -1) + \lambda_1(2, -1, 1) + \lambda_2(2, 3, -1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}.$$

V.2 Sidotut ääriarvot

Tässä jaksossa esitellään menetelmä, joka täydentää funktion suurimman ja pienimmän arvon etsimiseen liittyviä jakson II.8 tarkasteluja.

Lause V.2.1. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^q$ avoin joukko ja*

$$\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$$

jatkuvasti differentioituva kuvaus, missä $m < q$. Olkoon jatkuvasti differentioituva funktiolla $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ pisteessä $\mathbf{p} \in A$ joko sidottu maksimi tai minimi ehdolla $\phi(\mathbf{x}) = 0$ (ts. $\phi(\mathbf{p}) = 0$ ja joko on olemassa sellainen $r > 0$, että $B(\mathbf{p}, r) \subset A$ ja $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{p})$ kaikilla $\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, r) \cap \phi^{-1}(0)$, tai on voimassa vastaava ehto, missä esiintyy " $\geq$ "). Mikäli $\mathbf{p}$ on ϕ :n suhteen säännöllinen piste, on olemassa m lukua $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, joille

$$\nabla f(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \phi_i(\mathbf{p}) = 0,$$

ts.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{p}) + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j}(\mathbf{p}) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_j}(\mathbf{p}) = 0$$

kaikilla $j = 1, \dots, q$.

TODISTUS. Merkitään $N = \phi^{-1}(0)$. Oletetaan, että $\mathbf{p}$ on ϕ :n suhteen säännöllinen. Olkoon $r > 0$ sellainen, että $B(\mathbf{p}, r) \subset A$ ja $f(\mathbf{p})$ on rajoittuman $f|_{B(\mathbf{p}, r) \cap N}$ suurin tai pienin arvo. Olkoon $\alpha < 0 < \beta$ ja $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow A$ jatkuvasti derivoituva polku, jolle $\phi(\gamma(t)) = 0$ kaikilla $t \in [\alpha, \beta]$ ja $\gamma(0) = \mathbf{p}$. Koska γ on jatkuva, se kuvaa jonkin avoimen välin $(-\delta, \delta)$ joukkoon $B(\mathbf{p}, r) \cap N$. Siis yhdistetyllä funktiolla $f \circ \gamma$ on paikallinen ääriarvo nollassa, joten sen derivaatta nollassa häviää. Ketjüsäännön mukaan siis

$$\nabla f(\mathbf{p}) \cdot \gamma'(0) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) \Big|_{t=0} = 0.$$

Lauseen V.1.7 nojalla (sen todistuksen merkinnöin) saadaan

$$\nabla f(\mathbf{p}) \in T^\perp = H^{\perp\perp} = H,$$

joten $\nabla f(\mathbf{p})$ on vektoreiden $\nabla \phi_i(\mathbf{p})$ lineaarikombinaatio. □

Lauseessa V.2.1 esiintyviä lukuja $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sanotaan *Lagrangen kertojiksi* ja itse lauseen käyttöä *Lagrangen menetelmäksi*.

Huomautus V.2.2. Olkoot A , f ja ϕ kuten edellisessä lauseessa. Merkitään $N = \phi^{-1}(0)$ eli

$$N = \{ \mathbf{x} \in A \mid \phi_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ kaikilla } i = 1, \dots, m \}.$$

Rajoittuman $f|_N$ kaikki paikalliset ääriarvopisteet löydetään edellisen lauseen mukaan niiden pisteiden $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ joukosta, jotka joko eivät ole ϕ :n suhteen säännöllisiä pisteitä tai jotka joillakin lukujen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ valinnoilla toteuttavat yhtälöryhmän

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(p_1, \dots, p_q) = 0 \\ \phi_2(p_1, \dots, p_q) = 0 \\ \vdots \\ \phi_m(p_1, \dots, p_q) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_1, \dots, p_q) + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(p_1, \dots, p_q) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1}(p_1, \dots, p_q) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_1, \dots, p_q) + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(p_1, \dots, p_q) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_2}(p_1, \dots, p_q) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_q}(p_1, \dots, p_q) + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_q}(p_1, \dots, p_q) + \dots + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_q}(p_1, \dots, p_q) = 0. \end{array} \right.$$

Tuntemattomina ovat siis luvut $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ja $p_1, \dots, p_q$, ja yhtälöitä on samoin $m + q$ kappaletta. Lukuja λ_i ei yleensä ole tarpeen tietää, joten ne kannattaa yhtälöryhmää ratkaistaessa usein pyrkiä ensin eliminoimaan, ks. kuitenkin esimerkkiä V.2.5.

Esimerkki V.2.3. Olkoon

$$f(x, y, z) = e^{-x^2 - x - y^2 - z^2}$$

kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Merkitään

$$N = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z = 1 \}.$$

Joukko N on rajoitettu, koska $N \subset B(0, 2)$. Koska $N = \phi^{-1}((0, 0))$, missä $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ on jatkuva kuvaus, jolle

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ \phi_2(x, y, z) = x + y + z - 1, \end{array} \right.$$

N on suljettu. Siis N on Heinen-Borelin lauseen nojalla kompakti. Jatkuvana funktiona f saa siinä suurimman ja pienimmän arvon. Käytämme Lagrangen

menetelmää *ainoiden mahdollisten* pisteiden selville saamiseen, joissa rajoittuma $f|N$ voi saada maksimin tai minimin. Laskujen yksinkertaistamiseksi kannattaa tutkia funktiota h , $h(x, y, z) = x^2 + x + y^2 + z^2$, mikä johtaa myös alkuperäisen ongelman ratkaisuun, koska eksponenttifunktio on aidosti kasvava. Tarkastellaan ϕ :n Jacobin matriisia

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial \phi_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial \phi_2}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jos on

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

on $x = y = z$. Tällainen piste ei kuitenkaan kuulu N :ään. Siis jokainen N :n piste on säännöllinen, ja lauseen V.2.1 mukaan funktion maksimi- ja minimipisteet N :llä ovat niiden N :n pisteiden (x, y, z) joukossa, joille joillakin $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ on

$$D_j h(x, y, z) + D_j [\lambda_1 \phi_1(x, y, z) + \lambda_2 \phi_2(x, y, z)] = 0,$$

$j = 1, 2, 3$. Saadaan siis yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \\ 2x + 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ 2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ 2z + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Kahdesta viimeisestä yhtälöstä seuraa

$$2(1 + \lambda_1)(y - z) = 0,$$

joten $y = z$ tai $\lambda_1 = -1$. Jälkimmäisessä tapauksessa neljännestä yhtälöstä seuraa $\lambda_2 = 0$ ja kolmannelta taas $\lambda_2 = -1$, eli ei saada ratkaisua. Jos $y = z$, kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0, \end{cases}$$

jonka ainoat ratkaisut ovat $(x, y) = (1, 0)$ ja $(x, y) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Ainoat pisteet, joissa *voi olla* sidottu ääriarvo, ovat siis N :n pisteet $(1, 0, 0)$ ja $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Toisaalta alussa todetun mukaan jopa absoluuttinen maksimi ja minimi N :ssä ovat olemassa. Koska $f(1, 0, 0) = e^{-2}$ ja $f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = e^{-\frac{2}{3}}$, on e^{-2} f :n pienin ja $e^{-\frac{2}{3}}$ f :n suurin arvo N :ssä.

Huomautus V.2.4. Esimerkissä laskuja yksinkertaistettiin tutkimalla alkuperäisen funktion sijasta funktiota h , johon sopiva aidosti monotoninen funktio yhdistämällä saadaan alkuperäinen funktio. Tilannetta voitaisiin yksinkertaistaa hiukan lisää tarkastelemalla h :n sijasta funktiota $(x, y, z) \mapsto x$, joka tutkitavassa joukossa saa samat arvot kuin h .

Esimerkki V.2.5. Olkoon $a > 0$ ja $ac - b^2 > 0$. Merkitään

$$N = \{ (x, y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1 = 0 \}.$$

Koska

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \frac{1}{a}[(ax + by)^2 + (ac - b^2)y^2],$$

nähdään helposti, että N on rajoitettu. Koska N on suljetun joukon alkukuva jatkuvassa kuvauksessa, N on suljettu. Siis N on kompakti (ja selvästi $\neq \emptyset$), joten jatkuva funktio f , $f(x, y) = x^2 + y^2$, saa N :ssä suurimman arvon M ja pienimmän arvon m , jolloin $\sqrt{M}$ on N :n pisteiden suurin ja $\sqrt{m}$ N :n pienin etäisyys origosta. Määritetään nämä luvut $\sqrt{M}$ ja $\sqrt{m}$. Etsitään Lagrangen menetelmällä $f|N$:n mahdolliset lokaaliset maksimit ja minimi, joiden joukossa siis M :n ja m :n on oltava. Nyt $\phi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1$, ja jokainen N :n piste on ϕ :n suhteen säännöllinen, sillä

$$\nabla \phi(x, y) = (2ax + 2by, 2bx + 2cy) = (0, 0),$$

jos ja vain jos $(x, y) = (0, 0)$, koska

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0,$$

mutta $(0, 0)$ ei ole joukossa N . Ratkaistavaksi tulee yhtälöryhmä

$$\begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1 = 0 \\ 2x + \lambda(2ax + 2by) = 0 \\ 2y + \lambda(2bx + 2cy) = 0 \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 - 1 = 0 \\ (\lambda a + 1)x + \lambda by = 0 \\ \lambda bx + (\lambda c + 1)y = 0. \end{cases}$$

Kahden viimeisen yhtälön parilla on triviaaliratkaisu $x = y = 0$, joka ei kuitenkaan toteuta ensimmäistä yhtälöä. Lauseen V.2.1 nojalla yhtälöryhmällä on ratkaisuja, koska jopa absoluuttisen maksimin ja minimin olemassaolo N :ssä tiedetään. Siis kahdella viimeisellä yhtälöllä täytyy olla muitakin kuin mainittu triviaaliratkaisu, joten kerroinmatriisin determinantti häviää:

$$\begin{vmatrix} \lambda a + 1 & \lambda b \\ \lambda b & \lambda c + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(ac - b^2) + \lambda(a + c) + 1 = 0.$$

Saadun toisen asteen yhtälön juuret ovat aina reaaliset (mikä näkyy diskriminanttitarkastelusta tai siitä, että edellä todettiin jollakin reaalisella λ kerroinmatriisin determinantin häviävän); olkoot mainitut juuret λ_1 ja λ_2 . Koska $ac - b^2 > 0$ ja $a > 0$ ja siis $ac > 0$, $c > 0$, on $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Ääriarvot saadaan nyt selville ilman, että yhtälöryhmän avulla tarvitsee määrätä niitä pisteitä, joissa suurin ja pienin arvo saavutetaan: Koska $x = -\lambda(ax + by)$ ja $y = -\lambda(bx + cy)$, on

$$x^2 + y^2 = -\lambda(ax^2 + 2bxy + cy^2) = -\lambda.$$

Koska lokaalisia ääriarvopisteitä vastaavat λ :n arvot kuuluvat joukkoon $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, luvuista $\sqrt{-\lambda_1}$ ja $\sqrt{-\lambda_2}$ suurempi on N :n pisteiden suurin ja niistä pienempi pienin etäisyys origosta. (Kyseessä on origokeskinen ellipsi, jonka puoliakselien pituudet ovat $\sqrt{-\lambda_1}$ ja $\sqrt{-\lambda_2}$.)

VI Taylorin lause ja sensovelluksia

VI.1 Korkeammat derivaatat ja Taylorin lause

Pidämme tunnettuna yhden muuttujan funktioiden Taylorin lauseen seuraavassa muodossa (missä oletukset eivät ole lievimmät mahdolliset).

Lause VI.1.1. *Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on funktio, jolla on välillä $[a, b]$ jatkuva kertaluvun $p + 1$ derivaatta. Silloin on olemassa sellainen $\xi \in (a, b)$, että*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(b - a)^p + \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{(p + 1)!}(b - a)^{p+1}.$$

Yleistämme Taylorin lauseen koskemaan usean reaaliuuttujan reaaliarvoisia funktioita. Sitä varten määrittelemme tällaisten funktioiden kertalukua $k \geq 2$ olevat derivaatat.

Ennen muodollista määritelmää tarkastelemme johdantona avoimessa joukossa $U \subset \mathbb{R}^n$ määriteltyä reaaliarvoista U :ssa differentioituvaa funktiota f . Jokaista $\mathbf{u} \in U$ kohti saadaan lineaarinen derivaattakuvaus $Df(\mathbf{u}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Kun käytetään avaruudessa $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sen tavallista normia, kuvauksen $\mathbf{u} \mapsto Df(\mathbf{u})$ differentioituvuus voidaan määritellä samaan tapaan kuin $\mathbb{R}^m$ -arvoisen kuvauksenkin. Oletetaan, että kuvaus $\mathbf{u} \mapsto Df(\mathbf{u})$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x} \in U$, jolloin sen derivaattaa (joka siis on lineaarikuvaus avaruudesta $\mathbb{R}^n$ avaruuteen $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$) pisteessä $\mathbf{x}$ on luonnollista sanoa f :n toiseksi derivaataksi pisteessä $\mathbf{x}$. On kuitenkin käytännöllistä samastaa kukin lineaarikuvaus $T : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ kaavalla $\tilde{T}(\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}) = (T\mathbf{h}^{(1)})\mathbf{h}^{(2)}$ määritellyn bilineaarikuvauksen $\tilde{T} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kanssa. Tämän sopimuksen mukaisesti kuvauksen f toinen derivaatta pisteessä $\mathbf{x}$ on eräs bilineaarikuvaus $D^2f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. (Bilinearikuvaus on kahden vektorimuuttujan funktio, joka on kummankin suhteen lineaarinen, kun toinen muuttuja pidetään kiinteänä.)

Kiinnitetään nyt vektori $\mathbf{h}^{(1)} = (h_1^{(1)}, \dots, h_n^{(1)}) \in \mathbb{R}^n$. Määritelmästä seuraa helposti, että kuvaus $\mathbf{u} \mapsto Df(\mathbf{u})\mathbf{h}^{(1)}$ eli $Df(\cdot)\mathbf{h}^{(1)}$ on differentioituva pisteessä $\mathbf{x}$, ja sen derivaatta $\mathbf{x}$:ssä eli kuvaus $D(Df(\cdot)\mathbf{h}^{(1)})(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ saa vektorille $\mathbf{h}^{(2)} = (h_1^{(2)}, \dots, h_n^{(2)})$ arvon $D^2f(\mathbf{x})(\mathbf{h}^{(2)}, \mathbf{h}^{(1)})$. Toisaalta kuvauksen

$$\mathbf{u} \mapsto Df(\mathbf{u})\mathbf{h}^{(1)} = \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}}(\mathbf{u})h_{j_1}^{(1)}$$

derivaatta pisteessä $\mathbf{x}$ on lineaarikuvaus, joka vektorille $\mathbf{h}^{(2)} = (h_1^{(2)}, \dots, h_n^{(2)})$ saa arvon

$$\sum_{j_1=1}^n h_{j_1}^{(1)} \nabla \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}^{(2)} = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}(\mathbf{x}) h_{j_2}^{(2)} h_{j_1}^{(1)}.$$

On siis nähty, että

$$D^2f(\mathbf{x})(\mathbf{h}^{(2)}, \mathbf{h}^{(1)}) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}(\mathbf{x}) h_{j_2}^{(2)} h_{j_1}^{(1)}.$$

Tämä kaava yleistetään seuraavassa määritelmässä. Emme jatka abstraktilla linjalla, vaan siirrymme lähestymistapaan, joka suoraan perustuu osittaisderivaattojen käyttöön.

Määritelmä VI.1.2. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko, $\mathbf{x} \in U$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, ja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ funktio. Oletetaan, että f :n kaikki kertalukua $k - 2$ olevat osittaisderivaatat ovat olemassa ja differentioituvat jossakin $\mathbf{x}$:n avoimessa palloympäristössä ja kertaluvun $k - 1$ osittaisderivaatat (jotka siis ovat olemassa mainitussa palloympäristössä) ovat differentioituvat pisteessä $\mathbf{x}$. Jos $\mathbf{h}^{(i)} = (h_1^{(i)}, \dots, h_n^{(i)}) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$, merkitään

$$D^k f(\mathbf{x})(\mathbf{h}^{(k)}, \dots, \mathbf{h}^{(1)}) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}(\mathbf{x}) h_{j_k}^{(k)} \dots h_{j_1}^{(1)}.$$

Näin määriteltä k :n vektorimuuttujan kuvausta

$$D^k f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

(joka selvästi on k -lineaarinen eli lineaarinen kunkin argumenttivektorin suhteen, kun muut $k - 1$ argumenttia pidetään kiinteinä) sanotaan f :n k :nneksi (tai kertaluvun k) derivaataksi pisteessä $\mathbf{x}$. Edellä mainittujen oletusten valitessa sanotaan, että f on k kertaa differentioituva $\mathbf{x}$:ssä.

Huomautus VI.1.3. Kertaluvun k osittaisderivaattojen olemassaolo pisteen $\mathbf{x}$ ympäristössä ja niiden jatkuvuus $\mathbf{x}$:ssä on $D^k f(\mathbf{x})$:n olemassaolon toteamiseen tavallisimmin käytetty riittävä ehto.

Merkintä VI.1.4. Jos $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ ja $k \in \mathbb{N}$, merkitsemme $\mathbf{h}^{[k]}$:lla karteesisen tulon $(\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ alkioita $(\mathbf{h}, \mathbf{h}, \dots, \mathbf{h})$.

Lause VI.1.5 (Taylorin lause). Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ C^{p+1} -funktio. Olkoon $\mathbf{x} \in U$, ja olkoon $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ sellainen, että pisteiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ yhdysjana $L(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{h}) = \{ \mathbf{x} + t\mathbf{h} \mid t \in [0, 1] \}$ sisältyy joukkoon U . Silloin on olemassa sellainen luku $\theta \in (0, 1)$, että

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} D^k f(\mathbf{x}) \mathbf{h}^{[k]} + \frac{1}{(p+1)!} D^{p+1} f(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h}) \mathbf{h}^{[p+1]}.$$

TODISTUS. Määritellään apufunktio $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$. Ketjusäännöstä (välin $[0, 1]$ päätepisteissä sovellettuna ilmeisellä tavalla toispuoleisiin derivaattoihin) seuraa, että kaikilla $t \in [0, 1]$

$$g'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) h_j = Df(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) \mathbf{h}.$$

Soveltamalla taas ketjusääntöä (mikäli $p \geq 1$) saadaan

$$g''(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) h_i h_j = D^2 f(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) \mathbf{h}^{[2]}.$$

Yleisesti induktiolla nähdään, että

$$g^{(k)}(t) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) h_{j_k} \dots h_{j_1} = D^k f(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) \mathbf{h}^{[k]},$$

$k = 1, \dots, p + 1$. Soveltamalla lausetta VI.1.1 funktioon g välillä $[0, 1]$ saadaan siis väite. $\square$

Huomautus VI.1.6. Lauseen VI.1.5 oletuksiin on lauseen II.1.5 nojalla helposti nähtävissä, että tapauksessa $n = 2$, $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$,

$$D^k f(\mathbf{x}) \mathbf{h}^{[k]} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} h_1^i h_2^{k-i} \frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}},$$

missä $\binom{k}{i}$ on binomikerroin $\frac{k!}{i!(k-i)!}$. Tämä kirjoitetaan joskus muodollisesti

$$D^k f(\mathbf{x}) \mathbf{h}^{[k]} = [h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2}]^k f(\mathbf{x}) = [\mathbf{h} \cdot \nabla]^k f(\mathbf{x}).$$

Vastaavanlaisella formalismilla saadaan yleisessä tapauksessa

$$D^k f(\mathbf{x}) \mathbf{h}^{[k]} = [h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}]^k f(\mathbf{x}) = [\mathbf{h} \cdot \nabla]^k f(\mathbf{x}),$$

jolloin Taylorin kehitelmä tulee muotoon

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} [\mathbf{h} \cdot \nabla]^k f(\mathbf{x}) + \frac{1}{(p+1)!} [\mathbf{h} \cdot \nabla]^{p+1} f(\mathbf{x} + \theta \mathbf{h}).$$

Yleisellä n :n arvolla on

$$D^k f(\mathbf{x}) \mathbf{h}^{[k]} = \sum_{j_1 + \cdots + j_n = k} \frac{k!}{j_1! \cdots j_n!} h_1^{j_1} \cdots h_n^{j_n} \frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}.$$

Huomautus VI.1.7. (a) Lauseen VI.1.5 kaavaa sanotaan *Taylorin kaavaksi*. Usein merkitään T_p :llä siinä esiintyvää n :n muuttujan polynomia,

$$(h_1, \dots, h_n) \mapsto f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} D^k f(\mathbf{x}) \mathbf{h}^{[k]},$$

ja sitä sanotaan f :n astetta p olevaksi *Taylorin polynomiksi* pisteessä $\mathbf{x}$. Merkitsemme myös $R_{p+1}(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - T_p(\mathbf{h})$ ja sanomme, että R_{p+1} on *Taylorin kaavan jäännöstermi*. Taylorin kaavan oikeaa puolta sanotaan myös *Taylorin kehitelmäksi*.

(b) Voidaan todistaa (ks. esim. E. Lindelöf: Differentiali- ja integralilasku ja sen sovellutukset II, s. 65) seuraava *yksikäsitteisyyslause*: Jos funktiolla f on jossakin pisteen $\mathbf{x}$ palloympäristössä voimassa kehitelmä

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = P_0 + \sum_{k=1}^p P_k(h_1, \dots, h_n) + R'_{p+1}(\mathbf{h}),$$

missä P_k on muotoa

$$P_k(h_1, \dots, h_n) = \sum_{j_1 + \cdots + j_n = k} \alpha_{j_1 \dots j_n} h_1^{j_1} \cdots h_n^{j_n},$$

ja $|R'_{p+1}(\mathbf{h})| \|\mathbf{h}\|^{-(p+1)}$ pysyy rajoitettuna, kun $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$, niin kyseessä on lauseen VI.1.5 mukainen Taylorin kehitelmä. Erityisesti tällöin

$$\alpha_{j_1 \dots j_n} = \frac{1}{j_1! \cdots j_n!} \frac{\partial^k f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}.$$

(Kääntäen nähdään helposti, että Taylorin kehitelmä on yllä mainittua tyyppiä.)

Esimerkki VI.1.8. Määritetään Taylorin lauseen (ja huomautuksessa VI.1.7 (b) mainitun yksikäsitteisyyslauseen) avulla funktion f osittaisderivaatat $D_{xxx}f(0,0)$ ja $D_{xyy}f(0,0)$, kun

$$f(x,y) = \sqrt{1+x-2y^2}.$$

Binomisarjasta saadaan

$$\begin{aligned}\sqrt{1+t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} t^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-(k-1))}{k!} t^k \\ &= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + t^4\psi(t),\end{aligned}$$

missä jollakin vakiolla $M \in [0, \infty)$ $|\psi(t)| < M$, kun $|t| < \frac{1}{2}$. Olkoon $t = x - 2y^2$, missä $x = r \cos \alpha$, $y = r \sin \alpha$, jolloin $t = r(\cos \alpha - 2r \sin^2 \alpha)$. Jos $r < \frac{1}{4}$, on $|t| < 2r$; siis $|t^4| < 16r^4$, ja lisäksi $|t| < \frac{1}{2}$. Suorittamalla potenssiin korottamiset f :lle saadaan origon $\frac{1}{4}$ -säteisessä avoimessa palloympäristössä esitysmuoto

$$\sqrt{1+x-2y^2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - y^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{2}xy^2 + P(x,y) + R'_4(x,y),$$

missä $|R'_4(x,y)|\|(x,y)\|^{-4} < 16M$, kun $0 < \|(x,y)\| < \frac{1}{4}$, ja $P(x,y)$ on x :n ja y :n polynomi, jonka kukin termi on vähintään astetta 4. Koska esim. $|x| \leq \|(x,y)\|$, tästä näkyy, että kehitelmä on yksikäsitteisyyslauseessa mainittua tyyppiä, joten $\frac{1}{3!}D_{xxx}f(0,0) = \frac{1}{16}$, $\frac{1}{1!2!}D_{xyy}f(0,0) = \frac{1}{2}$, eli $D_{xxx}f(0,0) = \frac{3}{8}$ ja $D_{xyy}f(0,0) = \frac{1}{1}$.

Esimerkki VI.1.9. Olkoon $f(x,y) = x^2y + 3y - 2$. Johdetaan kahdella tavalla f :n Taylorin kehitelmä pisteen $(1, -2)$ suhteen. Derivoimalla todetaan, että $f_x(x,y) = 2xy$, $f_y(x,y) = x^2 + 3$, $f_{xx}(x,y) = 2y$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x$, $f_{yy}(x,y) = 0$, $f_{xxx}(x,y) = 0$, $f_{xxy}(x,y) = 2$, $f_{xyy}(x,y) = 0$ ja $f_{yyy}(x,y) = 0$. Kaikki kertalukua neljä olevat osittaisderivaatat häviävät. Merkitään $h = x - 1$ ja $k = y + 2$, jolloin Taylorin lauseen mukaan

$$\begin{aligned}f(x,y) &= f(1,-2) + hf_x(1,-2) + kf_y(1,-2) \\ &+ \frac{1}{2!} [h^2 f_{xx}(1,-2) + 2hk f_{xy}(1,-2) + k^2 f_{yy}(1,-2)] \\ &+ \frac{1}{3!} [h^3 f_{xxx}(1,-2) + 3h^2 k f_{xxy}(1,-2) + 3hk^2 f_{xyy}(1,-2) + k^3 f_{yyy}(1,-2)] \\ &+ R_4(h,k),\end{aligned}$$

missä nyt $R_4 = 0$. Toisin merkinnöin siis

$$x^2y + 3y - 2 = -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + (x-1)^2(y+2).$$

Toinen (paljon yksinkertaisempi) tapa on kirjoittaa $x = (x-1)+1$, $y = (y+2)-2$, jolloin suoralla laskulla saadaan

$$\begin{aligned}x^2y + 3y - 2 &= [(x-1) + 1]^2[(y+2) - 2] + 3[(y+2) - 2] - 2 \\ &= -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + (x-1)^2(y+2).\end{aligned}$$

Yksikäsitteisyyslause (ks. huom. VI.1.7 (b)) osoittaa heti, että tässä on kyseessä Taylorin kehitelmä.

VI.2 Taylorin lauseen soveltaminen paikallisten ääriarvojen tutkimiseen

Taylorin lauseen yksi tärkeä käytännön merkitys on siinä, että tietyissä tilanteissa funktio käyttäytyy lokaalisti oleellisesti samoin kuin sen sopiva Taylorin polynomi. Tätä ilmiötä hyödynnetään seuraavan lauseen todistuksessa.

Lause VI.2.1. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko ja $\mathbf{p} \in A$. Olkoon $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -funktio, jolla $\nabla f(\mathbf{p}) = 0$ (ts. $Df(\mathbf{p}) = 0$).*

(a) *Jos $D^2f(\mathbf{p})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) > 0$ kaikilla $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, niin f :llä on oleellinen paikallinen minimi pisteessä $\mathbf{p}$.*

(b) *Jos $D^2f(\mathbf{p})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) < 0$ kaikilla $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, niin f :llä on oleellinen paikallinen maksimi pisteessä $\mathbf{p}$.*

(c) *Jos on olemassa $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ja $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, joille $D^2f(\mathbf{p})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) > 0$ ja $D^2f(\mathbf{p})(\mathbf{k}, \mathbf{k}) < 0$, niin $\mathbf{p}$ ei ole f :n ääriarvopiste.*

TODISTUS. (a) Kuvaus

$$\mathbf{h} \mapsto D^2f(\mathbf{p})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p}) h_i h_j$$

on jatkuva ja positiivinen joukossa $T = \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{h}\| = 1\}$, ja koska T on kompakti, on olemassa sellainen $\eta > 0$, että $D^2f(\mathbf{p})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) > \eta$, jos $\|\mathbf{h}\| = 1$. Koska kuvaus $(h_1, \dots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |h_i h_j|$ on jatkuva ja T on kompakti, on olemassa $M > 0$, jolle $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |h_i h_j| \leq M$, jos vektorille $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$

on $\|\mathbf{h}\| = 1$. Merkitään $\varepsilon = \frac{\eta}{2M}$. Koska jokainen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ on jatkuva pisteessä $\mathbf{p}$, on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p}) \right| < \varepsilon$$

kaikilla $i, j = 1, \dots, n$, jos $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta$. (Valitaan näille äärellisen monelle funktiolle saatavista δ -lukuista pienin.) Siis jos $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta$, on

$$\begin{aligned} D^2f(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) &= D^2f(\mathbf{p})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) - [D^2f(\mathbf{p})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) - D^2f(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{h})] \\ &\geq D^2f(\mathbf{p})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) - |D^2f(\mathbf{p})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) - D^2f(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{h})| > \eta - \frac{\eta}{2M}M = \frac{\eta}{2} > 0, \end{aligned}$$

aina, kun $\|\mathbf{h}\| = 1$, sillä selvästi

$$|D^2f(\mathbf{p})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) - D^2f(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{h})| \leq \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p}) \right| |h_i h_j| < \varepsilon M.$$

Tästä seuraa, että $D^2f(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|^2 D^2f(\mathbf{x})(\|\mathbf{h}\|^{-1}\mathbf{h}, \|\mathbf{h}\|^{-1}\mathbf{h}) > 0$ kaikilla $\mathbf{h} \neq 0$, jos $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta$. Koska $Df(\mathbf{p}) = 0$, Taylorin lauseen VI.1.5 mukaan jokaista $\mathbf{x}$, jolle $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta$, vastaa sellainen $\xi \in L(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, että

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} D^2f(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{p}) > f(\mathbf{p}).$$

Siis $\mathbf{p}$ on f :n oleellinen paikallinen minimikohta.

Kohta (b) seuraa (a):sta, kun sitä sovelletaan funktioon $-f$.

(c) Olkoon $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sellainen, että $D^2f(\mathbf{p})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) > 0$. Olkoon $\delta > 0$ mielivaltainen. Osoitamme, että $f(\mathbf{p})$ ei ole suurin f :n joukossa $B(\mathbf{p}, \delta)$ saamista arvoista. Koska kuvaus $\mathbf{x} \mapsto D^2f(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{h})$ on jatkuva ja saa $\mathbf{p}$:ssä positiivisen arvon, on olemassa sellainen $\delta_1 > 0$, että $\delta_1 < \delta$ ja $D^2f(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) > 0$ aina, kun $\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, \delta_1)$. Valitaan $t > 0$ siten, että $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{h} \in B(\mathbf{p}, \delta_1)$. Taylorin lauseen nojalla saadaan sopivalle $\mathbf{p}$:n ja $\mathbf{x}$:n yhdysjanalla olevalle pisteelle ξ

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \frac{1}{2}D^2f(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) + \frac{1}{2}t^2D^2f(\xi)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) > f(\mathbf{p}).$$

Siis $\mathbf{p}$ ei voi olla f :n paikallinen maksimipiste. Vastaavasti nähdään $\mathbf{k}$:ta koskevan oletuksen avulla, että $\mathbf{p}$ ei ole f :n paikallinen minimipiste. $\square$

Huomautus VI.2.2. Oletetaan, että funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on kahdesti differentioituva joukon A sisäpisteessä $\mathbf{x}$. Matriisia

$$H(\mathbf{x}) = Hf(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

missä $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$, sanotaan f :n *Hessen matriisiksi* pisteessä $\mathbf{x}$. Jos tässä esiintyvät toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvat pisteessä $\mathbf{x}$, niin derivoimisjärjestyksen vaihtamista koskevan lauseen II.1.5 nojalla $H(\mathbf{x})$ on symmetrinen eli sama kuin transpoosinsa. Selvästi vektorille $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ $D^2f(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \mathbf{h})$ voidaan esittää sisätulona $\mathbf{h} \cdot H(\mathbf{x})\mathbf{h}$, missä $H(\mathbf{x})\mathbf{h}$ tulkitaan jaksossa I.7 selitetyllä tavalla. Seuraavan määritelmän terminologiaa käyttäen esim. edellisen lauseen ehto (a) voidaan ilmaista sanomalla, että f :n Hessen matriisi pisteessä $\mathbf{p}$ on positiividefiniitti.

Määritelmä VI.2.3. Neliömatriisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

on *positiividefiniitti*, jos $\mathbf{h} \cdot A\mathbf{h} > 0$ aina, kun $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Tällöin sanotaan myös vastaavaa *neliömuotoa* $g_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, jolle

$$g_A(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}h_ih_j,$$

positiividefiniitiksi. Matriisi A (ja vastaava neliömuoto) on *negatiividefiniitti*, jos $-A$ on positiividefiniitti. Matriisi A on *indefiniitti*, jos $\mathbf{h} \cdot A\mathbf{h}$ saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

Jotta lausetta VI.2.1 käytännössä päästäisiin soveltamaan, täytyy esim. positiividefiniitti Hessen matriisi kyetä tunnistamaan. Seuraava lause auttaa kahden muuttujan tapauksessa.

Lause VI.2.4. Olkoon Q symmetrisen 2×2 -matriisin

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

determinantti, ts. $Q = ac - b^2$.

- (a) Jos $Q > 0$ ja $a > 0$, niin A on positiividefiniitti.
- (b) Jos $Q > 0$ ja $a < 0$, niin A on negatiividefiniitti.
- (c) Jos $Q < 0$, niin A on indefiniitti.

TODISTUS. Jos $a \neq 0$, on

$$P(x, y) = g_A(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = \frac{1}{a} [(ax + by)^2 + (ac - b^2)y^2].$$

Tästä seuraavat heti kohdat (a) ja (b). Todistetaan (c). Olkoon ensin $a > 0$. Silloin $P(1, 0) = a > 0$, ja jos $Q < 0$, on $P(\frac{b}{a}, -1) = a^{-1}Q < 0$. Tapaus $a < 0$ käsitellään vastaavasti. Olkoon nyt $a = 0$. Jos $c \neq 0$, tilanne vastaa symmetrian nojalla tapausta $a \neq 0$. Jos taas $a = c = 0$, on $b \neq 0$, koska $Q \neq 0$, ja tällöin $P(1, 1)$ ja $P(1, -1)$ ovat erimerkkiset. $\square$

Lause VI.2.5. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja $\mathbf{p} \in A$. Olkoon $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -funktio, jolle $\nabla f(\mathbf{p}) = 0$. Merkitään $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{p})$, $b = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{p})$ ja $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{p})$, jolloin $Q = ac - b^2$ on Hessen matriisin $Hf(\mathbf{p})$ determinantti.

- (a) Jos $Q > 0$ ja $a > 0$, niin f :llä on oleellinen paikallinen minimi pisteessä $\mathbf{p}$.
- (b) Jos $Q > 0$ ja $a < 0$, niin f :llä on oleellinen paikallinen maksimi pisteessä $\mathbf{p}$.
- (c) Jos $Q < 0$, niin $\mathbf{p}$ ei ole f :n ääriarvopiste.

TODISTUS. Väite seuraa lauseista VI.2.1 ja VI.2.4, sillä kaikilla $\mathbf{h} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on $D^2 f(\mathbf{p})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{p})x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{p})yx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{p})xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{p})y^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$. $\square$

Huomautus VI.2.6. Pistettä, jossa funktion gradientti häviää, sanotaan tunnetusti funktion kriittiseksi pisteeksi. Jos kriittisessä pisteessä edellisen lauseen merkinnöin $Q = 0$, niin funktiolla voi olla siinä paikallinen maksimi tai minimi tai ei kumpaakaan. (Kuten jo aikaisemmin on nähty, gradientin häviäminen, mikäli gradientti on olemassa, on välttämätön ehto ääriarvon olemassaololle.)

Esimerkki VI.2.7. Etsitään kaavalla $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ määritellyn funktion f paikalliset ääriarvopisteet. Tässä $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = (0, 0)$, jos ja vain jos $(x, y) = (0, 0)$ tai $(x, y) = (1, 1)$. Koska $D_{11}f(x, y) = 6x$, $D_{22}f(x, y) = 6y$, $D_{12}f(x, y) = -3$, on $D_{11}f(1, 1)D_{22}f(1, 1) - D_{12}f(1, 1)^2 = 27 > 0$ ja $D_{11}f(1, 1) = 6 > 0$. Siis $(1, 1)$ on paikallinen minimipiste. Koska $D_{11}f(0, 0)D_{22}f(0, 0) - D_{12}f(0, 0)^2 = -9 < 0$, ei $(0, 0)$ ole ääriarvopiste.

Esimerkki VI.2.8. Tarkastellaan kolmea funktiota: $f(x, y) = x^4 + y^2$, $g(x, y) = -x^4 - y^2$, $h(x, y) = x^3 + y^2$. Origo on kaikilla ainoa kriittinen piste. Kaikissa tapauksissa Hessen matriisin determinantti origossa häviää, joten lause VI.2.5 ei sano mitään. Suoraan nähdään, että f :llä on origossa minimi, g :llä maksimi, ja h :lla ei ole origossa ääriarvoa.

Esimerkki VI.2.9. Olkoon $f(x, y) = 4x^2 + 4xy + y^2 + 4y^3 + y^4$ kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Yhtälön

$$\nabla f(x, y) = (8x + 4y, 4x + 2y + 12y^2 + 4y^3) = (0, 0)$$

ratkaisut eli f :n kriittiset pisteet ovat $(0, 0)$ ja $(\frac{3}{2}, -3)$. Koska $D_{11}f(\frac{3}{2}, -3) = 8$, $D_{12}f(\frac{3}{2}, -3) = 4$ ja $D_{22}f(\frac{3}{2}, -3) = 38$, on tässä pisteessä lauseen VI.2.5 merkin­nön $Q > 0$ ja $a > 0$, joten kyseessä on oleellinen paikallinen minimipiste. Pisteessä $(0, 0)$ sen sijaan $Q = 0$, joten lausetta VI.2.5 ei voi käyttää. Tutkiaksemme suoraan f :n käyttäytymistä origon ympäristässä kirjoitamme lauseen VI.2.4 todistuksessa käytetyllä tavalla

$$4x^2 + 4xy + y^2 = \frac{1}{4}[(4x + 2y)^2 + (4 \cdot 1 - 2^2)y^2] = \frac{1}{4}(4x + 2y)^2.$$

Kun piste (x, y) on suoralla $y = -2x$, on siis $f(x, y) = y^3(4 + y)$, joka pienillä y :n arvoilla on saman merkinen kuin y . Siis jokaisessa origon ympäristössä f saa sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, eikä origo näin ollen ole ääriarvopiste.

Tarkastelemme vielä lyhyesti ilman todistuksia $\mathbb{R}^n$:n avoimessa osajoukossa A määritellyn C^2 -funktion f tapausta. Oletamme, että $p \in A$ on f :n kriittinen piste. Olkoon

$$Hf(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

f :n Hessen matriisi pisteessä $\mathbf{p}$. Siis $Hf(\mathbf{p})$ on symmetrinen matriisi eli $a_{ij} = a_{ji}$ kaikilla $i, j = 1, \dots, n$. Mahdollisen ääriarvon olemassaolon ja laadun tutkimiseksi lauseen VI.2.1 avulla joudutaan huomautuksen VI.2.2 ja määritelmän VI.2.3 mukaisesti selvittämään onko matriisi $M = Hf(\mathbf{p})$ esim. positiividefiniitti. Lineaarialgebrasta tiedetään, että M :llä on n ominaisarvoa (kun kukin otetaan mukaan kertalukunsa osoittama määrä kertoja). Olkoot nämä $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Merkitään

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Seuraava lause pätee mille hyvänsä symmetriselle matriisille, mutta tarvitsemme sitä vain Hessen matriiseille. Sivuutamme lauseen todistuksen. (Oleellinen kohta on todistettu esim. teoksessa Hoffman-Kunze: Linear algebra, ss. 249–251.)

Lause VI.2.10. (a) *Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

- (i) M on positiividefiniitti;
- (ii) $\lambda_i > 0$ kaikilla $i = 1, \dots, n$;
- (iii) $\Delta_i > 0$ kaikilla $i = 1, \dots, n$.

(b) *Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:* (iii) M on negatiividefiniitti; (iv) $\lambda_i < 0$ kaikilla $i = 1, \dots, n$; (v) $(-1)^i \Delta_i > 0$ kaikilla $i = 1, \dots, n$.

(c) *Jos jokainen λ_i on nollasta eriävä (eli yhtäpitävästi: $\Delta_n \neq 0$), ja kumman­kaan kohdan (a), (b) ehdot eivät ole voimassa, niin M on indefiniitti.*

Esimerkki VI.2.11. Olkoon

$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 8yz - 2x + 4y - 2z.$$

Tämän funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ainoa kriittinen piste on $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$. Hessen matriisi pisteessä $\mathbf{p}$ on

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & -8 \\ 2 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tässä $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = -4$ ja $\Delta_3 = -32$, joten lauseen VI.2.10 mukaan M on indefiniitti, ja siis $\mathbf{p}$ ei ole ääriarvopiste.

VI.3 Taylorin lause ja absoluuttiset ääriarvot

Tarkastelemme lyhyesti erästä tilannetta, missä Taylorin lauseesta on hyötyä myös absoluuttisen maksimin tai minimin toteamisessa. Muotoilemme vain minimiä koskevan lauseen; maksimia koskeva saadaan, kun f korvataan funktiolla $-f$.

Lause VI.3.1. *Olkoon $S \subset \mathbb{R}^2$ avoin ja konvekksi joukko (ts.*

$$\{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \mid t \in [0, 1]\} \subset S$$

aina, kun $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S$). Olkoon $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -funktio ja olkoon $\mathbf{p} \in S$ sellainen, että $\nabla f(\mathbf{p}) = 0$ ja $D_{11}f(\mathbf{q})D_{22}f(\mathbf{q}) - D_{12}f(\mathbf{q})^2 > 0$ kaikilla $\mathbf{q} \in S \setminus \{\mathbf{p}\}$. Jos $D_{11}f(\mathbf{q}) > 0$ kaikilla $\mathbf{q} \in S \setminus \{\mathbf{p}\}$, niin $f(\mathbf{p}) < f(\mathbf{x})$ kaikilla $\mathbf{x} \in S \setminus \{\mathbf{p}\}$.

TODISTUS. Väite seuraa siitä, että nyt Taylorin lauseen nojalla jokaista $\mathbf{x} \in S \setminus \{\mathbf{p}\}$ vastaa jokin $\mathbf{p}$:n ja $\mathbf{x}$:n yhdyshajan piste ξ , jolle $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \frac{1}{2}D^2f(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{p}) > f(\mathbf{p})$. $\square$

Esimerkki VI.3.2. Olkoot $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, n$. Oletetaan, että eivät kaikki luvut x_i ole samoja. Määrätään lukujen y_i regressiosuora lukujen x_i suhteen pienimmän neliösumman mielessä, ts. määrätään suora $y = mx + b$ siten, että $f(m, b) = \sum_{i=1}^n (mx_i + b - y_i)^2$ on mahdollisimman pieni. Välttämätön ehto ääriarvon esiintymiselle on f :n gradientin häviäminen. Tämä vaatimus johtaa yhtälöpariin

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (mx_i + b - y_i)x_i = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^n (mx_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} m \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ m \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Eliminoimalla b saadaan

$$m = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}.$$

(Tässä nimittäjä on nollasta eriävä, sillä Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n 1 \cdot x_i\right)^2 < \left(\sum_{i=1}^n 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right),$$

missä aito epäyhtälö johtuu siitä, että kaikki x_i :t eivät ole samoja eli vektorit $(1, \dots, 1)$ ja $(x_1, \dots, x_n)$ eivät ole lineaarisesti riippuvia.) Jälkimmäisestä yhtälöstä ratkaisemalla saadaan $b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{m}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Se, että kyseessä on absoluuttinen minimi, voitaisiin todeta jakson II.8 menetelmillä, mutta se näkyy myös heti edellisestä lauseesta, koska kaikilla $m, b \in \mathbb{R}$ on $D_{11}f(m, b) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ ja $D_{11}f(m, b)D_{22}f(m, b) - [D_{12}f(m, b)]^2 = n4(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2)$, ja viimeinen lauseke todettiin edellä positiiviseksi.

VII Lisää moniulotteisista integraaleista

VII.1 Sijoitus moniulotteiseen integraaliin

Seuraava lause vastaa yhden muuttujan funktioiden integraalin laskemista sijoituksen avulla. Oletukset eivät ole läheskään lievimmät mahdolliset, mutta tässäkin muodossa lause sopii suoraan moniin käytännön tilanteisiin. Sivuumme todistuksen; eräs versio, josta lause VII.1.1 seuraa, on todistettu M. Spivakin kirjan "Calculus on manifolds" sivuilla 67–71.

Lause VII.1.1. *Olkoot U ja $V \subset \mathbb{R}^n$:n avoimia rajoitettuja Jordan-mitallisia osajoukkoja (ts. reunat ∂U ja ∂V ovat Jordanin nollajoukkoja), ja olkoon $g: \bar{U} \rightarrow \bar{V}$ kuvaus, jolle $g(\partial U) \subset \partial V$. Tehdään seuraavat oletukset:*

(i) *Rajoittuma $g|_U$ on jatkuvasti differentioituva ja kuvaa U :n bijektiivisesti V :lle.*

(ii) *Jokaisessa pisteessä $\mathbf{x} \in U$ derivaatan $Dg(\mathbf{x})$ matriisin*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

determinantti eli ns. Jacobin derminantti $J_g(\mathbf{x}) \neq 0$. Silloin jokaisella integroituvalla funktiolla $f: \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio $(f \circ g)|J_g|: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ on integroitava yli $\bar{U}$:n ja

$$\int_{\bar{V}} f = \int_{\bar{U}} (f \circ g)|J_g|$$

eli

$$\int_{\bar{V}} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\bar{U}} f(g(\mathbf{x}))|J_g(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

Huomautus VII.1.2. Koska J_g on määritelty avoimessa joukossa U , integroinnissa yli sulkeuman $\bar{U}$ J_g tulkitaan edellä laajennetuksi U :n reunalle. Koska reuna on Jordanin nollajoukko, on yhdentekevää, miten laajennus suoritetaan. Integrointi voitaisiin myös rajoittaa avoimiin joukkoihin U ja V , mutta käytännössä yleensä integroimme yli kompaktien joukkojen.

Seuraavassa esimerkissä nähdään, että lause VII.1.1 yleistää lauseen III.4.1.

Esimerkki VII.1.3. Tutkitaan kiekossa määritellyn funktion integraalin laskemista napakoordinaattimuunnoksen avulla. Olkoon $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$

ja $T = \{ (r, \phi) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \phi \leq 2\pi \}$, missä $a > 0$. Olkoon $g : T \rightarrow K$ kuvaus, jolle $g(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$, sekä $U = \{ (r, \phi) \mid 0 < r < a, 0 < \phi < 2\pi \}$ ja

$$V = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < a^2 \} \setminus \{ (x, y) \mid x \geq 0, y = 0 \}.$$

Nyt $\bar{U} = T$, $\bar{V} = K$, ja lauseen VII.1.1 oletukset ovat voimassa. Tässä

$$J_g(r, \phi) = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r.$$

Siis jos esim. $f : K_\psi \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva funktio, missä $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ja

$$K_\psi = \{ (r \cos \alpha, r \sin \alpha) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \alpha \leq \psi \},$$

on

$$\begin{aligned} \int_{K_\psi} f &= \int_T f(r \cos \phi, r \sin \phi) r \, dr \, d\phi \\ &= \int_0^a dr \int_0^\psi f(r \cos \phi, r \sin \phi) r \, d\phi \\ &= \int_0^\psi d\phi \int_0^a f(r \cos \phi, r \sin \phi) r \, dr. \end{aligned}$$

Esimerkki VII.1.4. Tason napakoordinaattien vastineina avaruudessa $\mathbb{R}^3$ käytetään tilanteesta riippuen *pallokoordinaatteja* tai *sylinterikoordinaatteja*.

(a) Pisteen (x, y, z) pallokoordinaatit (ρ, θ, ϕ) toteuttavat määritelmän mukaan yhtälöt

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases}$$

Olkoon $a > 0$. Merkitään $U = \{ (\rho, \theta, \phi) \mid 0 < \rho < a, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi \}$ ja $V = \{ (x, y, z) \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 < a^2 \} \setminus A$, missä $A = \{ (x, y, z) \mid x \geq 0, y = 0 \}$. Kaavalla

$$g(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta)$$

määritelty g täyttää U :n ja V :n suhteen lauseen VII.1.1 oletukset; nyt $J_g(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \sin \theta$ (harjoitustehtävä).

(b) Pisteen (x, y, z) sylinterikoordinaatit (r, ϕ, z) toteuttavat yhtälöt

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z. \end{cases}$$

Jos $g(r, \phi, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z)$, on $J_g(r, \phi, z) = r$ (harjoitustehtävä). Lauseen VII.1.1 soveltamista varten r ja ϕ voidaan rajoittaa samoin kuin esimerkissä VII.1.3. Nyt U :ksi ja V :ksi voidaan ottaa esimerkin VII.1.3 U :n ja V :n karteesiset tulot jonkin välin $(0, h)$ kanssa.

Esimerkki VII.1.5. Olkoon $a > 0$ ja

$$A = \{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \}.$$

Kyse on siis pallon $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ja kartion $z^2 = x^2 + y^2$ rajoittamasta xy -tason yläpuolella olevasta kappaleesta. Lasketaan A :n tilavuus $m(A)$ pallokoordinaattimuunnoksen avulla. Esimerkkiä VII.1.4 (a) soveltaen saadaan

$$\begin{aligned} m(A) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \rho^2 \sin \theta d\rho \\ &= \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta = \frac{2\pi a^3}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

Esimerkki VII.1.6. Lasketaan puolipallosta

$$A = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \geq 0 \}$$

pystysuoran sylinterin $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$ sisään jäävän osan tilavuus V . Sylinterikoordinaatteja $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = z$ käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{4 \cos \phi} dr \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{4 \cos \phi} r \sqrt{16-r^2} dr \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(16-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{4 \cos \phi} d\phi = -\frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(16-16 \cos^2 \phi)^{\frac{3}{2}} - 4^3] d\phi \\ &= 2 \frac{4^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \phi) d\phi = \frac{128}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

VII.2 Integraalilla määritellyn funktion derivointi, Leibnizin sääntö

Tarkastelemme ensin otsikon tarkoittamassa tilanteessa tapausta, missä integroitirajat ovat kiinteät. Seuraavan lauseen sanotaan käsittelevän integraalin ”derivoimista parametrin suhteen” tai ”derivoimista integraalimerkin alla”.

Lause VII.2.1. *Olkoon $a < b$, $c < d$ ja $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolle osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ on olemassa ja jatkuva joukossa $[a, b] \times [c, d]$ (reunapisteissä ilmeisellä tavalla määriteltynä). Silloin funktio $y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$ on derivoituva välillä $[c, d]$ ja*

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

TODISTUS. Lause voitaisiin todistaa suoraan käyttäen väliarvolausetta ja osittaisderivaatan $\frac{\partial f}{\partial y}$ tasaista jatkuvuutta. Nopea todistus saadaan, kun käytetään jatkuvan funktion integroituvuutta ja lausetta III.3.2: Kaikilla $u \in [c, d]$ on osittaisderivaatan $\frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f$ jatkuvuuden nojalla

$$f(x, u) = f(x, c) + \int_c^u D_2 f(x, y) dy,$$

joten

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x, u) dx &= \int_a^b f(x, c) dx + \int_a^b dx \int_c^u D_2 f(x, y) dy \\ &= \int_a^b f(x, c) dx + \int_c^u dy \int_a^b D_2 f(x, y) dx,\end{aligned}$$

ja derivointi u :n suhteen antaa

$$\frac{d}{du} \int_a^b f(x, u) dx = \int_a^b D_2 f(x, u) dx. \quad \square$$

Lauseessa VII.2.3 edellinen lause yleistetään tilanteeseen, missä myös integrointirajat ovat muuttujan y funktioita. Todistamme ensin aputuloksen, jota käytetään lauseen VII.2.3 todistuksessa.

Lause VII.2.2. *Olkoot Δ_1 ja Δ_2 reaaliakselin välejä. Olkoon $f : \Delta_1 \times \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Silloin kaavalla*

$$F(u, v, w) = \int_w^v f(x, u) dx$$

määritelty funktio on jatkuva karteesisessa tulossa $\Delta_2 \times \Delta_1 \times \Delta_1$.

TODISTUS. Tarkastellaan kiinteää pistettä $(u_0, v_0, w_0) \in \Delta_2 \times \Delta_1 \times \Delta_1$ ja todistetaan f siinä jatkuvaksi. Valitaan luvut $a < b$ ja $c < d$ siten, että $v_0, w_0 \in [a, b] \subset \Delta_1$ ja $u_0 \in [c, d] \subset \Delta_2$. Oletetaan lisäksi, että kukin luvuista v_0, w_0 ja u_0 on vastaavan suljetun välin $[a, b]$ tai $[c, d]$ sisäpiste, mikäli se on kyseeseen tulevan välin Δ_i sisäpiste. Joukko $[a, b] \times [c, d]$ on kompakti, joten lauseen I.6.9 mukaan f on siinä tasaisesti jatkuva, ja lauseen I.6.3 nojalla f :n itseisarvo on siinä pienempi kuin jokin vakio $M > 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tasaisen jatkuvuuden määritelmän mukaan on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

aina, kun $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in [a, b] \times [c, d]$ ja $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta$. Pienentämällä lukua δ tarvittaessa voidaan olettaa, että $\delta < \frac{\varepsilon}{3M}$ ja pisteen (u_0, v_0, w_0) δ -säteisen palloympäristön ja joukon $\Delta_2 \times \Delta_1 \times \Delta_1$ leikkaus sisältyy joukkoon $[c, d] \times [a, b] \times [a, b]$. Oletetaan, että $(u, v, w) \in \Delta_2 \times \Delta_1 \times \Delta_1$ on sellainen, että $\|(u, v, w) - (u_0, v_0, w_0)\| < \delta$, jolloin erityisesti $(u, v, w) \in [c, d] \times [a, b] \times [a, b]$. Kolmioepäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned}|F(u, v, w) - F(u_0, v_0, w_0)| &\leq \\ |F(u, v, w) - F(u, v, w_0)| &+ \\ + |F(u, v, w_0) - F(u, v_0, w_0)| &+ |F(u, v_0, w_0) - F(u_0, v_0, w_0)|.\end{aligned}$$

Tässä $|F(u, v, w) - F(u, v, w_0)| \leq |w - w_0|M \leq \delta M < \frac{\varepsilon}{3}$,

$$|F(u, v, w_0) - F(u, v_0, w_0)| \leq |v - v_0|M \leq \delta M < \frac{\varepsilon}{3}$$

ja

$$|F(u, v_0, w_0) - F(u_0, v_0, w_0)| \leq \int_{w_0}^{v_0} |f(x, u) - f(x, u_0)| dx < (b - a) \frac{\varepsilon}{3(b - a)},$$

joten kolmioepäyhtälön nojalla $|F(u, v, w) - F(u_0, v_0, w_0)| < \varepsilon$. $\square$

Lause VII.2.3. Olkoon $a < b$, $c < d$ ja f jossakin joukon $[a, b] \times [c, d]$ sisältävässä avoimessa joukossa U jatkuva funktio, jolle osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ on olemassa ja jatkuva U :ssa. Oletetaan lisäksi, että $\phi, \psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ovat derivoituvia funktioita. Silloin

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dy} \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \\ &= \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\phi(y), y)\phi'(y) \end{aligned}$$

kaikilla $y \in [c, d]$.

TODISTUS. Merkitään $g(y) = (y, \psi(y), \phi(y))$, kun $y \in [c, d]$, sekä

$$h(u, v, w) = \int_w^v f(x, u) dx$$

kaikilla (u, v, w) sopivassa joukon $[c, d] \times [a, b] \times [a, b]$ sisältävässä avoimessa joukossa V . Silloin $\frac{\partial h}{\partial v}(u, v, w) = f(v, u)$, $\frac{\partial h}{\partial w}(u, v, w) = -f(w, u)$ ja lauseen VII.2.1 mukaan

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v, w) = \int_w^v \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) dx.$$

Selvästi kaksi ensimmäistä näistä osittaisderivaatoista ovat jatkuvia joukossa V , ja lauseesta VII.2.2 seuraa, että kolmaskin on siinä jatkuva. Näin ollen h on differentioituva V :ssä. Ketjusäännöstä (ilmeisellä tavalla sopeutettuna tilanteeseemme, jossa voi esiintyä myös toispuoleisia derivaattoja) seuraa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dy} \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = \frac{d}{dy} h(g(y)) \\ &= \nabla h(g(y)) \cdot (1, \psi'(y), \phi'(y)) \\ &= \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\phi(y), y)\phi'(y). \quad \square \end{aligned}$$

Edellistä lausetta sanotaan joskus *Leibnizin säännöksi*.

Esimerkki VII.2.4.

$$g(u) = \int_u^{u^2} \frac{\sin ux}{x} dx,$$

kun $u > 0$. Silloin *Leibnizin säännön* mukaan

$$\begin{aligned} g'(u) &= \int_u^{u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sin ux}{x} \right) dx + \frac{\sin u^3}{u^2} \frac{d}{du} u^2 - \frac{\sin u^2}{u} \frac{d}{du} u \\ &= \int_u^{u^2} \cos ux dx + \frac{2 \sin u^3}{u} - \frac{\sin u^2}{u} \\ &= \frac{3 \sin u^3 - 2 \sin u^2}{u}. \end{aligned}$$

VIII Vektorikentän potentiaali ja sen yhteys käyräinteraaleihin

VIII.1 Potentiaali ja integraalin riippumattomuus tiestä

Määrittelemme aluksi tien, jonka jälki koostuu koordinaattiakselien suuntaisista janoista.

Määritelmä VIII.1.1. Sanomme, että polku $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *porrasmurtoviivatie*, jos on olemassa sellainen välin $[a, b]$ jako $a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = b$, että jokaisella $k = 1, \dots, p$ rajoittuma $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ on muotoa

$$t \mapsto \gamma(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \lambda \mathbf{e}_j$$

jollekin $\mathbb{R}^n$:n luonnollisen kannan alkiolle $\mathbf{e}_j$ ja luvulle $\lambda \in \mathbb{R}$. Porrasmurtoviivatieen jälkeen sanomme *porrasmurtoviivaksi*.

Selvästi porrasmurtoviivatie on tie eli paloittain jatkuvasti derivoituva polku.

Lause VIII.1.2. Avoimelle joukolle $U \subset \mathbb{R}^n$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) Joukkoa U ei voida esittää kahden erillisen epätähtäjänsä avoimen joukon unionina;

(ii) mitkä tahansa kaksi U :n pistettä voidaan yhdistää toisiinsa U :hun sisältyvällä käyrällä;

(iii) mitkä tahansa kaksi U :n pistettä voidaan yhdistää toisiinsa U :hun sisältyvällä porrasmurtoviivalla.

TODISTUS. (i) $\implies$ (iii): Olkoon $\mathbf{x} \in U$. Merkitään A :lla niiden U :n pisteiden joukkoa, joihin $\mathbf{x}$ voidaan yhdistää joukon U sisältyvällä porrasmurtoviivalla. Selvästi $\mathbf{x} \in A$, joten $A \neq \emptyset$. Oletetaan, että $\mathbf{y} \in A$. Koska U on avoin, jollekin $r > 0$ $B(\mathbf{y}; r) \subset U$. Koska jokainen $B(\mathbf{y}; r)$:n piste voidaan yhdistää pisteeseen $\mathbf{y}$ joukkoon U sisältyvällä porrasmurtoviivalla, selvästi $B(\mathbf{y}; r) \subset A$. Siis A on avoin. Olkoon toisaalta $\mathbf{z} \in U \setminus A$. Koska U on avoin, jollakin $r' > 0$ $B(\mathbf{z}; r') \subset U$. Jos jokin $B(\mathbf{z}; r')$:n piste voitaisiin yhdistää pisteeseen $\mathbf{x}$ joukkoon U sisältyvällä porrasmurtoviivalla, selvästi tämä pätesi myös $\mathbf{z}$:lle, koska mikä tahansa $B(\mathbf{z}; r')$:n piste voidaan yhdistää pisteeseen $\mathbf{z}$ U :hun sisältyvällä porrasmurtoviivalla. Näin ollen täytyy olla $B(\mathbf{z}; r') \subset U \setminus A$. Siis myös $U \setminus A$ on avoin, ja koska $A \neq \emptyset$, on (i):n nojalla $U \setminus A = \emptyset$ eli $A = U$. Siis jokainen $\mathbf{x} \in U$ voidaan yhdistää mihin tahansa pisteeseen $\mathbf{y} \in U$ U :hun sisältyvällä porrasmurtoviivalla, eli (iii) pätee.

(iii) $\implies$ (ii): Selvä.

(ii) $\implies$ (i): Tehdään vastaoletus, että $U = A \cup B$, missä A ja B ovat erillisiä epätähtäjiä avoimia joukkoja. Valitaan $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in B$ ja (ii):n nojalla polku $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, jolle $\gamma(a) = \mathbf{x}$ ja $\gamma(b) = \mathbf{y}$. Määritellään kuvaus $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ antamalla ϕ :lle vakioarvo 0 A :ssa ja vakioarvo 1 B :ssä. Koska A ja B ovat avoimia, ϕ on jatkuva. Yhdistetty funktio $\phi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ saa a :ssa arvon 0 ja b :ssä arvon 1, mutta ei saa mitään muita arvoja. Koska $\phi \circ \gamma$ on jatkuva, tämä on ristiriidassa Bolzanon lauseen kanssa. $\square$

Määritelmä VIII.1.3. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ epätähtäjänsä avointa osajoukkoa U , joka täyttää edellisen lauseen kolme yhtäpitävää ehtoa, sanotaan *alueeksi*.

Huomautus VIII.1.4. Yleisesti joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *yhtenäinen*, jos ei ole olemassa avoimia joukkoja $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$, joille $A \cap V_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, $(A \cap V_1) \cap (A \cap V_2) = \emptyset$ ja $(A \cap V_1) \cup (A \cap V_2) = A$. Joukko on *polkuyhtenäinen* eli *käyräyhtenäinen*, jos sen mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää kyseiseen joukkoon sisältyvällä käyrällä. Polkuyhtenäisyydestä seuraa aina yhtenäisyys (mikä nähdään oleellisesti samalla päättelyllä kuin implikaatio (ii) $\implies$ (i) edellisen lauseen todistuksessa), mutta ei yleensä kääntäen. Näimme kuitenkin juuri, että avoimelle joukolle yhtenäisyys ja polkuyhtenäisyys ovat yhtäpitävät. Erityisesti $\mathbb{R}^n$ on yhtenäinen.

Oletamme koko tässä jaksossa, että $U \subset \mathbb{R}^n$ on alue.

Määritelmä VIII.1.5. Olkoon $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ kuvaus. Sanomme, että f on *vektorikenttä*. Jos on olemassa sellainen funktio $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, että $f = \nabla u$:ssa, ts.

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = f_j(\mathbf{x})$$

kaikilla $\mathbf{x} \in U$, $j = 1, \dots, n$, u :ta sanotaan vektorikentän f *potentiaaliksi*. Tällöin sanotaan, että $f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ on *eksakti* (U :ssa) ja u on sen *integraalifunktio* (U :ssa).

Huomautus VIII.1.6. Tässä yhteydessä lausekkeelle $f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ ei tarvitse antaa tulkintaa. Käytämme kuitenkin puhetapaa, että differentiaali-muoto $f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ on jatkuva, differentioituva, jatkuvasti differentioituva tai C^p -luokkaan kuuluva, jos vastaava vektorikenttä f on sellainen.

Lause VIII.1.7. Olkoon $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorikenttä.

(a) Jos u on f :n potentiaali, myös $u + c$ on f :n potentiaali jokaisella vakiolla $c \in \mathbb{R}$.

(b) Jos u ja v ovat f :n potentiaaleja U :ssa, niin $u - v$ on vakio U :ssa.

TODISTUS. (a) Selvä.

(b) Merkitään $w = u - v$ ja osoitetaan, että $w(\mathbf{x}) = w(\mathbf{y})$ kaikilla U :n pisteillä $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Koska mitkä tahansa U :n pisteet voidaan yhdistää toisiinsa U :hun sisältyvällä porrasmurtoviivalla, yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $\mathbf{x}$:n ja $\mathbf{y}$:n yhdysjana $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sisältyy U :hun ja on muotoa

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{ \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \mid x_j \leq z_j \leq y_j; x_i = z_i = y_i, \text{ jos } i \neq j \}$$

jollakin $j = 1, \dots, n$. (Muuten toistetaan päättely äärellisen monta kertaa.) Väite seuraa nyt siitä, että (jos esim. $x_j < y_j$) funktio $\phi : [x_j, y_j] \rightarrow \mathbb{R}$, jolle $\phi(t) = w(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)$, on vakio, koska

$$\phi'(t) = \frac{\partial w}{\partial x_j}(\alpha(t)) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(\alpha(t)) - \frac{\partial v}{\partial x_j}(\alpha(t)) = 0$$

kaikilla $t \in [x_j, y_j]$, missä $\alpha(t) = (x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)$. □

Lause VIII.1.8. Jos $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on jatkuva vektorikenttä, jolla on potentiaali u U :ssa, niin kaikille $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ ja jokaiselle tielle $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, jolle $\gamma(a) = \mathbf{x}$, $\gamma(b) = \mathbf{y}$, on

$$u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n.$$

TODISTUS. Oletetaan ensin, että γ on jatkuvasti derivoituva. Lauseen IV.3.3 ja ketjusäännön nojalla

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f \cdot d\mathbf{x} &= \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} u(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt \\ &= \int_a^b (u \circ \gamma)'(t) dt = u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) = u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Paloittain jatkuvasti derivoituvan polun tapauksessa käytetään hyväksi tätä erikoistapausta ja integraalin additiivisuutta välin suhteen. $\square$

Huomautus VIII.1.9. Lauseen VIII.1.8 avulla saataisiin toinen todistus lauseelle VIII.1.7 (b) jatkuvan vektorikentän tapauksessa. Lauseessa VIII.1.7 jatkuvuusoletusta ei kuitenkaan tehty.

Lauseen IV.3.2 nojalla seuraavan lauseen ehto (ii) (vast. (iii)) voidaan ilmaista myös siten, että f :n käyräintegraali yli tien (vast. porrasmurtoviivien), jonka jälki sisältyy U :hun, riippuu vain päätepisteistä.

Lause VIII.1.10. Jos $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on jatkuva vektorikenttä, seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- (i) differentiaalimuoto $f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ on eksakti U :ssa (ts. f :llä on potentiaali U :ssa);
- (ii) $\int_{\gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n = 0$ jokaiselle sulkeutuvalla tielle γ , jolle $\gamma^* \subset U$;
- (iii) $\int_{\gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n = 0$ jokaiselle sulkeutuvalla porrasmurtoviivatielle γ , jolle $\gamma^* \subset U$.

TODISTUS. Lauseen VIII.1.8 mukaan (i) $\implies$ (ii) ja triviaalisti (ii) $\implies$ (iii). Osoitetaan, että (iii) $\implies$ (i). Valitaan kiinteä $\mathbf{p} \in U$ ja määritellään kullekin $\mathbf{x} \in U$

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n,$$

missä γ on jokin porrasmurtoviivatie, jolle $\gamma^* \subset U$ ja jonka alkupiste on $\mathbf{p}$ ja loppupiste $\mathbf{x}$. Lauseen VIII.1.2 mukaan tällainen γ on olemassa. Oletetaan (iii). Silloin lauseesta IV.3.2 seuraa, että $u(\mathbf{x})$:n määritelmä ei riipu γ :n valintatavasta. Osoitetaan nyt, että $\frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = f_j(\mathbf{x})$ mielivaltaisessa pisteessä $\mathbf{x} \in U$. Olkoon $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sellainen, että $B(\mathbf{x}, |h|) \subset U$. Funktion u määrittelystä seuraa, että kantavektorille $\mathbf{e}_j$

$$u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - u(\mathbf{x}) = \int_{\gamma_0} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n,$$

missä (jos esim. $h > 0$) $\gamma_0 : [x_j, x_j + h] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on määritelty kaavalla

$$\gamma_0(t) = (x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

Siis

$$u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - u(\mathbf{x}) = \int_{x_j}^{x_j+h} f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n) dt,$$

joten f_j :n jatkuvuuden nojalla $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - u(\mathbf{x})] = f_j(\mathbf{x})$. $\square$

Lause VIII.1.11. Jos jatkuvasti differentioituva vektorikentällä $f = (f_1, \dots, f_n)$ on potentiaali U :ssa, niin

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

U :ssa kaikilla $i, j = 1, \dots, n$.

TODISTUS. Jos $f = \nabla u$, niin

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

derivoimisjärjestyksen vaihtamista koskevan lauseen II.1.5 mukaan. $\square$

Edellisen lauseen ehto $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, ilmaistaan joskus sanomalla, että differentiaalimuoto $f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ on *suljettu differentiaalimuoto*. Siis jokaisessa alueessa jokainen jatkuvasti differentioituva eksakti differentiaalimuoto $f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ on suljettu. Käänteinen implikaatio ei ilman muuta ole voimassa, vaan tilanne riippuu alueen topologisesta luonteesta. Seuraavassa esimerkissä mainitaan eräs suljettu differentiaalimuoto, joka ei ole eksakti.

Esimerkki VIII.1.12. Vektorikentälle $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, jolle $f_1(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ ja $f_2(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, on

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial f_1}{\partial y},$$

mutta lauseesta VIII.1.10 seuraa, että f :llä ei ole potentiaalia $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:ssa, sillä sulkeutuvalla tiellä $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, jolle $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, on esimerkin IV.3.6 mukaan $\int_{\gamma} f_1 dx + f_2 dy = 2\pi \neq 0$.

VIII.2 Potentiaalin olemassaolo ja konstruointi

Jos U :lle asetetaan sopivia rajoituksia, lause VIII.1.11 voidaan kääntää.

Määritelmä VIII.2.1. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *tähtimäinen*, jos on olemassa sellainen A :n piste $\mathbf{p}$, että jokaisella $\mathbf{x} \in A$ $\mathbf{p}$:n ja $\mathbf{x}$:n yhdyksjana $L(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \{\mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \mid t \in [0, 1]\}$ sisältyy A :han. Joukko A on *konvekksi*, jos $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subset A$ kaikilla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$.

Selvästi epätyhjät konvekssit joukot ovat tähtimäisiä. Joukko

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid y = 0, x \leq 0\}$$

on tähtimäinen, mutta ei konvekssi. Tähtimäinen avoin joukko on lauseen VIII.1.2 mukaan aina alue.

Seuraavaa lausetta sanotaan *Poincarén lemmaksi*.

Lause VIII.2.2. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$ tähtimäinen alue. Jos $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on jatkuvasti differentioituva vektorikenttä, jolle

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

U :ssa kaikilla $i, j = 1, \dots, n$, niin f :llä on potentiaali U :ssa.

TODISTUS. Olkoon $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in U$ sellainen piste, että $L(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \subset U$ kaikilla $\mathbf{x} \in U$. Määritellään

$$u(\mathbf{x}) = \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p}))(x_j - p_j) \right] dt \quad \left(= \int_{L(\mathbf{p}, \mathbf{x})} f \cdot d\mathbf{x} \right).$$

Olkoot nyt $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$ ja k , $1 \leq k \leq n$, kiinteät. Osoitamme, että

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}).$$

Valitaan $\delta > 0$ siten, että $B(\mathbf{x}, \delta) \subset U$, ja merkitään

$$\phi(t, s) = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_k - \mathbf{p}))(x_j + s\delta_{jk} - p_j),$$

jos $t \in [0, 1]$, $s \in (-\delta, \delta)$. (Tässä $\mathbf{e}_k$ on tavalliseen tapaan $\mathbb{R}^n$:n luonnollisen kannan alkio, $\delta_{jk} = 0$, kun $j \neq k$, ja $\delta_{jk} = 1$, kun $j = k$.) Silloin

$$u(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_k) = \int_0^1 \phi(t, s) dt,$$

kun $s \in [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$. Ketjusäännön mukaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \phi(t, s) &= \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_k - \mathbf{p}))t(x_j - p_j) \\ &\quad + \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_k - \mathbf{p}))t(x_k + s - p_k) + f_k(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_k - \mathbf{p})). \end{aligned}$$

Siis $\frac{\partial}{\partial s} \phi$ on jatkuva suorakulmiossa $[0, 1] \times [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$. Lisäksi

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial s} \phi(t, s) \right]_{s=0} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p}))t(x_j - p_j) + f_k(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p})) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p}))t(x_j - p_j) + f_k(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p})) \\ &= \frac{d}{dt} f_k(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p}))t. \end{aligned}$$

Koska vielä ϕ on jatkuva joukossa $[0, 1] \times [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$, on

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_k}(\mathbf{x}) &= \left[\frac{d}{ds} u(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_k) \right]_{s=0} = \left[\frac{d}{ds} \int_0^1 \phi(t, s) dt \right]_{s=0} \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial s} \phi(t, s) \right]_{s=0} dt = \int_0^1 f_k(\mathbf{p} + t(\mathbf{x} - \mathbf{p}))t dt = f_k(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

integraalin derivoimista parametrin suhteen koskevan lauseen VII.2.1 nojalla. $\square$

Huomautus VIII.2.3. Lauseen VIII.2.2 todistusperiaate antaa erään menetelmän potentiaalin konstruointiseksi. Lähtöpisteestä $\mathbf{p}$ riippuen saadaan eri potentiaaleja, jotka eroavat toisistaan korkeintaan lisättävällä vakiolla. Käytännössä yksinkertaisempiin laskuihin kuin integrointi janaa $L(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ pitkin johtaa kuitenkin usein integrointi sopivasti valittua porrasmurtoviivaa pitkin. Niin pian kuin potentiaalin olemassaolo tiedetään, voidaan näet käyttää lausetta VIII.1.10 (ja sitä edeltävää toteamusta) ja valita integroimistie vapaasti.

Esimerkki VIII.2.4. Vektorikentällä $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, missä $f_1(x, y) = 2x - y$ ja $f_2(x, y) = y^2 - x$, on potentiaali koko $\mathbb{R}^2$:ssa, sillä $\mathbb{R}^2$ on tähtimäinen ja $D_2 f_1 = -1 = D_1 f_2$. Etsitään nyt kaikki potentiaalit.

1. *tapa*: Valitaan $\mathbf{p} = (0, 0)$ ja käytetään lauseen VIII.2.2 todistusperiaatetta:

$$u(x, y) = \int_0^1 [f_1(tx, ty)x + f_2(tx, ty)y] dt \\ \int_0^1 (2x - y)xt dt + \int_0^1 (y^3 t^2 - xyt) dt = x^2 - xy + \frac{1}{3}y^3.$$

Kaikki potentiaalit saadaan parvesta $x^2 - xy + \frac{1}{3}y^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

2. *tapa*: Valitaan taas lähtöpisteeksi origo, mutta integroidaan nyt pitkin murtoviivaa, jonka muodostavat jana origosta pisteeseen $(x, 0)$ ja jana pisteestä $(x, 0)$ pisteeseen (x, y) :

$$u(x, y) = \int_0^x f_1(t, 0) dt + \int_0^y f_2(x, t) dt = \int_0^x 2t dt + \int_0^y (t^2 - x) dt \\ = x^2 + \frac{1}{3}y^3 - xy.$$

Taas kaikki potentiaalit saadaan parvesta $x^2 + \frac{1}{3}y^3 - xy + c$, $c \in \mathbb{R}$.

3. *tapa*: Olkoon u f :n potentiaali; olemassaolohan tiedetään. Koska

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x - y,$$

vastaa jokaista $y \in \mathbb{R}$ jokin vakio $g(y)$, jolle $u(x, y) = x^2 - xy + g(y)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$; $g(y)$ on integroimisvakio kun integroidaan x :n suhteen. Tästä näkyy, että funktio $y \mapsto g(y)$ on derivoituva. Koska $y^2 - x = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -x + g'(y)$, on $g'(y) = y^2$ eli $g = \frac{1}{3}y^3 + c$. Siis $u(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{3}y^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Esimerkki VIII.2.5. Määritellään vektorikenttä $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ asettamalla

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = \sin x \cos x + e^x y^2 z^3 \\ f_2(x, y, z) = 2e^x y z^3 \\ f_3(x, y, z) = 3e^x y^2 z^2. \end{cases}$$

Suora lasku osoittaa, että $\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}$ ja $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$. Koska f on jatkuvasti differentioituva ja $\mathbb{R}^3$ on tähtimäinen, f :llä on potentiaali. Eräs potentiaali saadaan integroimalla origosta lähtien pitkin porrasmurtoviivapolkua:

$$u(x, y, z) = \int_0^x [\sin t \cos t + e^t 0^2 0^3] dt + \int_0^y 2e^x t 0^3 dt + \int_0^z 3e^x y^2 t^2 dt \\ = \frac{1}{2} \sin^2 x + e^x y^2 z^3.$$

Lasketaan käyräintegraali $\int_{\gamma} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$, missä polku $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ määritellään kaavalla $\gamma(t) = (t^2 \cos t, e^{t^2} \sin t, \ln(1 + t^2))$. Lauseen VIII.1.8 nojalla kyseinen käyräintegraali on

$$u(\gamma(\frac{\pi}{2})) - u(\gamma(0)) = \exp\left(\frac{\pi^2}{2}\right) \left(\ln\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)\right)^3.$$

IX Greenin, Stokesin ja Gaussin lauseet

IX.1 Greenin lause singulaariselle 2-kuutiolle tasossa

Tämän jakson keskeisessä lauseessa IX.1.6 (ja jatkossa vastaavissa tilanteissa) käytetään seuraavaa puhetapaa:

Määritelmä IX.1.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko, jonka sisäosan sulkeuma on sama kuin A :n oma sulkeuma. Sanomme, että kuvaus $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ on *luokkaa* C^p eli C^p -kuvaus, $p \geq 1$, jos on olemassa jossakin A :n sisältävässä avoimessa joukossa määriteltä C^p -kuvaus, joka saa A :ssa samat arvot kuin f . Tällöin sovitaan f :n komponenttifunktioiden korkeintaan kertalukua p olevien osittaisderivaattojen arvoiksi A :ssa tällaiselle laajennukselle saatavat vastaavat osittaisderivaattojen arvot.

Huomautus IX.1.2. Mainitunlainen f :n laajennus ei ole yleensä yksikäsitteinen, mutta silti kaikki tässä käyttöön otetut korkeintaan kertaluvun p osittaisderivaatat A :ssa ovat yksikäsitteisesti määrättyt. Tämä johtuu siitä, että jokaista pistettä $\mathbf{x} \in A$ kohti voidaan valita sitä kohti suppeneva jono $(\mathbf{x}_k)$ A :n sisäosan pisteitä, ja koska sisäosassa kyseiset osittaisderivaatat ovat tavallisessa mielessä yksikäsitteisinä olemassa, voidaan käyttää lausetta I.4.5 ja jonon raja-arvon yksikäsitteisyyttä. Selvästi myös derivoimisjärjestyksen vaihtamista koskeva lause II.1.5 pätee tässä yleisessä tilanteessa.

Käytämme nimitystä *singulaarinen 2-kuutio* (avaruudessa $\mathbb{R}^2$) jatkuvalla kuvaukselle $c : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. (Tässä yhteydessä oudohko nimitys selittyy myöhemmin käsiteltävästä kolmiulotteisesta analogiasta.) Tällainen kuvaus määrää neljä jatkuvaa funktiota (polkua) $c_{i\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, $\alpha = 0, 1$, jotka määritellään kaavoilla $c_{10}(t) = c(0, t)$, $c_{11}(t) = c(1, t)$, $c_{20}(t) = c(t, 0)$, $c_{21}(t) = c(t, 1)$. (Siis i :n osoittama c :n muuttuja korvataan luvulla α , ja jäljelle jäävästä muuttujasta tulee funktion $c_{i\alpha}$ argumentti.)

Esimerkki IX.1.3. Olkoon $c : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ inklusiokuvaus, ts. $c(u, v) = (u, v)$ kaikilla $(u, v) \in [0, 1]^2$. Funktiot $c_{i\alpha}$ ovat polkuja, joiden jälkien unioni on joukon $[0, 1]^2$ reuna. Kulkussuunnat ovat kuitenkin sellaiset, että jos halutaan integroida jatkuva vektorifunktio $f = (f_1, f_2)$ positiiviseen kiertosuuntaan yli joukon $[0, 1]^2$ reunakäyrän, oikea tulos saadaan summana

$$\int_{c_{20}} f + \int_{c_{11}} f - \int_{c_{21}} f - \int_{c_{10}} f = \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha \in \{0,1\}} (-1)^{i+\alpha} \int_{c_{i\alpha}} f.$$

Huomautus IX.1.4. Muistutamme, että Jordanin käyrän (parametriesityksen) positiivista kiertosuuntaa emme ole tarkasti määritelleet, vaan olemme

tyytyneet intuitiiviseen selitykseen: kuljettaessa Jordanin käyrää positiiviseen kiertosuuntaan sen rajoittama sisäpuolelle jäävä alue eli sisäalue on vasemmalla puolella. Jotta ”Jordanin käyrän C sisäalueesta” voitaisiin järkevästi puhua, täytyisi itse asiassa ensin todistaa syvällinen ns. *Jordanin käyrälause*, joka sanoo, että $\mathbb{R}^2$ on erillisten joukkojen unioni $\mathbb{R}^2 = A \cup C \cup B$, missä A ja B ovat alueita, joista yksi ja vain yksi on rajoitettu. Käytämme Jordanin käyrälausetta ilman todistusta ja sanomme edellä mainittua rajoitettua aluetta käyrän C *sisäalueeksi*. Edellisessä esimerkissä (ja monissa muissa riittävän yksinkertaisissa tilanteissa) Jordanin käyrälauseen totuus on ilmeinen, ja on mahdollista esittää mainitun intuitiivisen selityksen pohjalta kunnollinen matemaattinen määritelmä seuraavasti. Jos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, vektori $(-y, x)$ on sitä vastaan kohtisuorassa (näiden vektoreiden sisätulo on nolla). Sanomme, että jokaisella $\lambda > 0$ $(-\lambda y, \lambda x)$ on vektorin (x, y) (eräs) *vasen normaalivektori* ja $(\lambda y, -\lambda x)$ sen *oikea normaalivektori*. Taustalla on se havainto, että

$$(\cos(t + \frac{\pi}{2}), \sin(t + \frac{\pi}{2})) = (-\sin t, \cos t).$$

Edellisessä esimerkissä poluilla c_{20} ja c_{11} sekä polkujen c_{21} ja c_{10} käänteispoluilla on se ominaisuus, että (kun käytetään tällaiselle polulle merkintää $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$) mille tahansa parametrivälin $[0, 1]$ sisäpisteelle t tangenttivektorin vasemman normaalivektorin avulla esitetty piste $\gamma(t) + \delta(-\gamma'_2(t), \gamma'_1(t))$ kuuluu kaikilla kyllin pienillä luvuilla $\delta > 0$ joukon $[0, 1]^2$ sisäosaan $(0, 1)^2$. Tällä perusteella voidaan sanoa mainituista poluista ilmeisillä parametrin vaihdoilla ja tulopolkujen muodostamisella saatavaa tietä positiivisesti suunnistetuksi.

Esimerkki IX.1.5. Tarkastellaan ellipsiä

$$C = \{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \},$$

missä $a > 0, b > 0$. Piste (x, y) kuuluu tähän ellipsiin, jos ja vain jos piste $(\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$ on yksikköympyrällä eli $x = a \cos \phi, y = b \sin \phi$ jollakin $\phi \in [0, 2\pi]$. Helposti nähdään, että käyrä C on joukon

$$A = \{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \}$$

reuna. Oletetaan, että $\psi_1 < \psi_2 \leq \psi_1 + 2\pi$ ja $0 \leq \rho < 1$, jolloin joukko

$$B_{\rho, \psi_1, \psi_2} = \{ (a s \cos \phi, b s \sin \phi) \mid \psi_1 \leq \phi \leq \psi_2, \rho \leq s \leq 1 \}$$

on A :n osajoukko, joka saadaan yksikköneliön $[0, 1]^2$ kuvana kuvauksessa c , jolle

$$c(u, v) = (a[(1-u)\rho + u] \cos((1-v)\psi_1 + v\psi_2), b[(1-u)\rho + u] \sin((1-v)\psi_1 + v\psi_2))$$

kaikilla $(u, v) \in [0, 1]^2$. Tällöin

$$c_{10}(t) = c(0, t) = (a\rho \cos((1-t)\psi_1 + t\psi_2), b\rho \sin((1-t)\psi_1 + t\psi_2)),$$

$$c_{11}(t) = c(1, t) = (a \cos((1-t)\psi_1 + t\psi_2), b \sin((1-t)\psi_1 + t\psi_2)),$$

$$c_{20}(t) = c(t, 0) = (a[(1-t)\rho + t] \cos \psi_1, b[(1-t)\rho + t] \sin \psi_1),$$

$$c_{21}(t) = c(t, 1) = (a[(1-t)\rho + t] \cos \psi_2, b[(1-t)\rho + t] \sin \psi_2)$$

kaikilla $t \in [0, 1]$. (Piirrä kuvio!) Rajatapauksessa, jossa $\rho = 0$, sisempi ellipsin kaari surkastuu pisteeksi eli c_{10} saa vakioarvon $(0, 0)$. Jos $\psi_2 = \psi_1 + 2\pi$, poluilla c_{20} ja c_{21} on sama jälki, mutta se kuljetaan vastakkaisiin suuntiin.

Seuraava lause on ns. *Greenin lauseen* singulaarisille 2-kuutioille muotoiltu versio. Siinä tehtyä C^2 -oletusta voidaan sopivalla approksimoinnilla lieventää, mutta tämä yleisyys riittää moniin sovelluksiin. Käytämme siinä (ja myöhemmin vastaavissa tilanteissa) merkintää

$$\int_{\partial c} f = - \int_{c_{10}} f + \int_{c_{11}} f + \int_{c_{20}} f - \int_{c_{21}} f$$

ja sanomme, että näin määritelty $\int_{\partial c} f$ on vektorikentän f integraali yli singulaarisen 2-kuution c reunan. Emme määrittele itse reunan ∂c käsitettä, vaan tyydymme tähän sanontaan. Koska c on kuvaus, ei ole kysymys reunasta topologisessa mielessä. Merkkien valinta integraaleissa on sopusoinnussa esimerkin IX.1.3 kanssa, mutta kuvauksen c luonteesta riippuu, onko polkujen $c_{i\alpha}$ jälkien unioni kuvan $c([0, 1]^2)$ reuna ja vastaako tässä mainittu integrointi kiertämistä ”positiiviseen kiertosuuntaan”.

Lause IX.1.6. *Olkoon singulaarinen 2-kuutio $c : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^2 -kuvaus ja $f = (f_1, f_2)$ jossakin kuvajoukon $c([0, 1]^2)$ sisältävässä avoimessa joukossa määritelty $\mathbb{R}^2$ -arvoinen C^1 -kuvaus. Silloin*

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} f &= \int_{[0,1]^2} [(D_1 f_2 - D_2 f_1) \circ c] J_c \\ &= \int_{[0,1]^2} \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(c(u, v)) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(c(u, v)) \right] J_c(u, v) du dv, \end{aligned}$$

missä $J_c(u, v)$ on kuvauksen c Jacobin determinantti pisteessä $(u, v) \in [0, 1]^2$.

TODISTUS. Termejä järjestelemällä nähdään differentiaali- ja integraalilaskennan päälauseen avulla, että

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} f &= - \int_{c_{10}} f + \int_{c_{11}} f + \int_{c_{20}} f - \int_{c_{21}} f \\ &= - \int_0^1 f_1(c(0, t)) D_2 c_1(0, t) dt - \int_0^1 f_2(c(0, t)) D_2 c_2(0, t) dt \\ &\quad + \int_0^1 f_1(c(1, t)) D_2 c_1(1, t) dt + \int_0^1 f_2(c(1, t)) D_2 c_2(1, t) dt \\ &\quad + \int_0^1 f_1(c(t, 0)) D_1 c_1(t, 0) dt + \int_0^1 f_2(c(t, 0)) D_1 c_2(t, 0) dt \\ &\quad - \int_0^1 f_1(c(t, 1)) D_1 c_1(t, 1) dt - \int_0^1 f_2(c(t, 1)) D_1 c_2(t, 1) dt \\ &= \int_0^1 dt \int_0^1 D_1 [f_1(c(s, t)) D_2 c_1(s, t)] ds + \int_0^1 dt \int_0^1 D_1 [f_2(c(s, t)) D_2 c_2(s, t)] ds \\ &\quad - \int_0^1 dt \int_0^1 D_2 [f_1(c(t, s)) D_1 c_1(t, s)] ds - \int_0^1 dt \int_0^1 D_2 [f_2(c(t, s)) D_1 c_2(t, s)] ds. \end{aligned}$$

Tulon derivoimisäännön ja ketjusäännön avulla integroitaviksi saadaan seuraa-

vat lausekkeet:

$$\begin{aligned}
& D_1 f_1(c(s, t)) D_1 c_1(s, t) D_2 c_1(s, t) + D_2 f_1(c(s, t)) D_1 c_2(s, t) D_2 c_1(s, t) \\
& + f_1(c(s, t)) D_1 D_2 c_1(s, t), \\
& D_1 f_2(c(s, t)) D_1 c_1(s, t) D_2 c_2(s, t) + D_2 f_2(c(s, t)) D_1 c_2(s, t) D_2 c_2(s, t) \\
& + f_2(c(s, t)) D_1 D_2 c_2(s, t), \\
& D_1 f_1(c(t, s)) D_2 c_1(t, s) D_1 c_1(t, s) + D_2 f_1(c(t, s)) D_2 c_2(t, s) D_1 c_1(t, s) \\
& + f_1(c(t, s)) D_2 D_1 c_1(t, s), \\
& D_1 f_2(c(t, s)) D_2 c_1(t, s) D_1 c_2(t, s) + D_2 f_2(c(t, s)) D_2 c_2(t, s) D_1 c_2(t, s) \\
& + f_2(c(t, s)) D_2 D_1 c_2(t, s).
\end{aligned}$$

Kun otetaan huomioon integraalien merkit, toisen kertaluvun osittaisderivaattojen riippumattomuus derivoimisjärjestyksestä ja iteroitujen integraalien riippumattomuus integroimisjärjestyksestä, alkuperäinen neljä integraalia sisältävä lauseke saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dt \int_0^1 D_2 f_1(c(s, t)) D_1 c_2(s, t) D_2 c_1(s, t) ds \\
& + \int_0^1 dt \int_0^1 D_1 f_2(c(s, t)) D_1 c_1(s, t) D_2 c_2(s, t) ds \\
& - \int_0^1 dt \int_0^1 D_2 f_1(c(t, s)) D_2 c_2(t, s) D_1 c_1(t, s) ds \\
& - \int_0^1 dt \int_0^1 D_1 f_2(c(t, s)) D_2 c_1(t, s) D_1 c_2(t, s) ds.
\end{aligned}$$

Toisaalta väitetyt yhtälön oikea puoli voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_{[0,1]^2} [D_1 c_1(s, t) D_2 c_2(s, t) - D_2 c_1(s, t) D_1 c_2(s, t)] [D_1 f_2(c(s, t)) - D_2 f_1(c(s, t))] ds dt,$$

josta suoralla laskulla saadaan edellä alkuperäisen väitteen vasemmaksi puoleksi todettu integraalien lineaarikombinaatio. $\square$

Esimerkki IX.1.7. Oletetaan, että edellisen lauseen tilanteessa vektorikentän $f = (f_1, f_2)$ määräämä differentiaalimuoto $f_1 dx + f_2 dy$ on suljettu, ts. $D_1 f_2 = D_2 f_1$. Silloin oikeanpuoleinen ja siis myös vasemmanpuoleinen integraali on nolla. Vasemmanpuoleinen integraali on sama kuin erään sulkeutuvan tien yli otettu käyräintegraali. Jos esimerkiksi $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on kaavalla $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ määritelty polku, sen yli integrointi ei voi tässä mielessä vastata minkään C^2 -luokan singulaarisen 2-kuution $c : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ reunan yli integrointia. Sillä esimerkkien IV.3.6 ja VIII.1.12 nojalla on olemassa joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ määritelty suljettu differentiaalimuoto, jonka integraali yli γ :n ei häviä.

Esimerkki IX.1.8. Pidetään voimassa esimerkin IX.1.5 oletukset ja merkinnot. Olkoon $f = (f_1, f_2)$ jossakin joukon $c([0, 1]^2)$ sisältävässä avoimessa joukossa määritelty C^1 -luokan $\mathbb{R}^2$ -arvoinen kuvaus. Helpolla laskulla nähdään, että kuvauksen c Jacobin determinantille on voimassa

$$J_c(u, v) = ab(1 - \rho)((1 - u)\rho + u)(\psi_2 - \psi_1) > 0$$

kaikilla $(u, v) \in (0, 1)^2$. Integraalin muunnoskaava lauseesta VII.1.1 soveltamalla nähdään, että tässä tapauksessa lauseen IX.1.6 kaavan oikean puolen integraali $\int_{[0,1]^2} (D_1 f_2 - D_2 f_1) \circ J_c$ on sama kuin integraali $\int_{c([0,1]^2)} (D_1 f_2 - D_2 f_1)$. Tässä esimerkissä Jacobin determinantin melko mutkikas muoto johtui normitustekijöistä, kun muunnoskuvauksen c määrittelyjoukoksi haluttiin yksikköneliö $[0, 1]^2$. Integraali $\int_{c([0,1]^2)} (D_1 f_2 - D_2 f_1)$ voidaan myös laskea esim. käyttäen muunnoskuvausta $g : [\rho a, a] \times [\psi_1, \psi_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, jolle

$$g(r, \phi) = (r \cos \phi, r \frac{b}{a} \sin \phi).$$

Nyt Jacobin determinantiksi saadaan $J_g(r, \phi) = r \frac{b}{a}$, josta erikoistapauksessa $a = b$ tulee tuttu napakoordinaattimuunnoksen Jacobin determinantti r .

Huomautus IX.1.9. Edellisen esimerkin havainto sopii yleisemminkin tilanteisiin, joissa J_c on aina positiivinen joukossa $(0, 1)^2$ ja integraalin muunnoslauseen VII.1.1 oletukset ovat voimassa. (Jos jatkuva funktio J_c saa vain nollasta eriäviä arvoja joukossa $(0, 1)^2$, se on joko kaikkialla positiivinen tai kaikkialla negatiivinen, mikä näkyy lauseesta VIII.1.2, koska avoimien joukkojen $(-\infty, 0)$ ja $(0, \infty)$ alkukuvat ovat erillisiä avoimia joukkoja, joiden unioni on $(0, 1)$.)

Esimerkki IX.1.10. Pidetään voimassa lauseen IX.1.6 oletukset, mutta sovelletaan sitä vektorikentän (f_1, f_2) sijasta vektorikenttään $(-f_2, f_1)$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^2} [(D_1 f_1 + D_2 f_2) \circ c] J_c \\ &= \int_{[0,1]^2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}(c(u, v)) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(c(u, v)) \right] J_c(u, v) du dv \\ &= - \int_{c_{10}} (-f_2, f_1) + \int_{c_{11}} (-f_2, f_1) + \int_{c_{20}} (-f_2, f_1) - \int_{c_{21}} (-f_2, f_1). \end{aligned}$$

Kullekin tässä esiintyvälle polulle $c_{i\alpha} = \gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ on voimassa

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (-f_2, f_1) &= \int_0^1 [-f_2(\gamma(t))\gamma_1'(t) + f_1(\gamma(t))\gamma_2'(t)] dt \\ &= \int_0^1 (f_1(\gamma(t)), f_2(\gamma(t))) \cdot \|(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))\| (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)) \|\gamma'(t)\| dt, \end{aligned}$$

mikäli $\gamma'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [0, 1]$. Tällöin kyseessä on siis integraali kaarenpituuden suhteen funktiolle, jonka arvo pisteessä $\gamma(t)$ on vektorin $f(\gamma(t))$ sekä vektorin $\gamma'(t)$ yksikön mittaisen oikean normaalivektorin sisätulo. Positiivisen kiertosuunnan (tarpeeksi säännöllisessä) tapauksessa tällaisten integraalien edellä tarkasteltuna lineaarikombinaationa saadaan vektorikentän *vuoto*, joka tässä on integraali kaarenpituuden suhteen yli sulkeutuvan tien vektorikentän projektiolle käyrän ulkonormaalille.

Sekä Greenin lauseella IX.1.6 että sen edellisessä esimerkissä selitetyllä muotoilulla on kolmiulotteiset vastineet, ns. Stokesin lause ja Gaussin lause, joita käsittelemme jaksossa IX.7. Tätä varten kehitetään mm. avaruudessa $\mathbb{R}^3$ sijaitsevilla pinnalla määriteltyjen skalaari- ja vektorifunktioiden integrointiteoriaa. Sitä ennen kuitenkin mainitsemme seuraavassa jaksossa Greenin lauseen version, jossa ei käytetä singulaarisia 2-kuutioita.

IX.2 Greenin lause Jordanin alueelle

Pidämme seuraavassa lauseessa, joka on eräs Greenin lauseen versio, Jordanin käyräalueen tunnettuna, samoin siihen liittyvän Jordanin käyrän sisäalueen (ns. *Jordanin alueen*) käsitteen. Tyydymme intuitiiviseen Jordanin käyrän suunnistuksen käsitteeseen: positiivisessa kiertosuunnassa sisäalue jää vasemmalle. Sivuutamme lauseen todistuksen tässä yleisyydessä, joskin monissa erikoistapauksissa se olisi helppo palauttaa edellisen jakson tarkasteluihin.

Lause IX.2.1. *Olkkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ alue ja $f = (f_1, f_2) : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ jatkuvasti differentioituva vektorikenttä. Oletetaan, että $C \subset U$ on Jordanin käyrä, jolla on huomautuksen IV.3.4 (b) ehdot (1) ja (2) täyttävä paloittain jatkuvasti derivoituva positiivisesti suunnistettu parametriesitys $\gamma : [a, b] \rightarrow U$. Oletetaan, että myös C :n sisäalue S sisältyy U :hun. Silloin*

$$\int_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_\gamma f.$$

Esimerkki IX.2.2. Määritellään $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ asettamalla

$$f(x, y) = (2xy - x^2, x + y^2).$$

Olkkoon C paraabeleiden $y = x^2$ ja $x = y^2$ rajoittaman (rajoitetun) alueen S reunakäyrä. Vektorikentän käyräintegraaliksi yli (sopivasti parametrisoidun) C :n positiiviseen kiertosuuntaan saadaan summa integraalista yli paraabelin $y = x^2$ kaaren origosta pisteeseen $(1, 1)$ sekä integraalista yli paraabelin $x = y^2$ kaaren pisteestä $(1, 1)$ origoon. Edellinen integraali on

$$\int_0^1 [(2x \cdot x^2 - x^2) + (x + (x^2)^2)2x] dx = \frac{7}{6}$$

ja jälkimmäinen

$$- \int_0^1 [(2y^2y - (y^2)^2)2y + (y^2 + y^2)] dy = -\frac{17}{15},$$

joten $\oint_C f = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}$. Toisaalta

$$\begin{aligned} \int_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy &= \int_S \left[\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2) \right] dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy \\ &= \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} - x^2 + 2x^3) dx = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Greenin lauseen seurauksena saadaan (riittävän säännöllisen) Jordanin käyrän rajoittaman alueen pinta-alan laskemiseksi kaava:

Lause IX.2.3. *Olkkoon $C \subset \mathbb{R}^2$ Jordanin käyrä, jolla on huomautuksen IV.3.4 (b) ehdot (1) ja (2) täyttävä positiivisesti suunnistettu paloittain jatkuvasti derivoituva parametriesitys $\gamma : [a, b] \rightarrow U$. Silloin C :n sisäalue S on Jordanimittallinen, ja sen pinta-ala on*

$$m(S) = \frac{1}{2} \int_\gamma x dy - y dx.$$

TODISTUS. Valitaan $f_1(x, y) = -y$ ja $f_2(x, y) = x$ Greenin lauseessa IX.2.1, jolloin saadaan

$$\int_{\gamma} x dy - y dx = \int_S \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right) dx dy = 2 \int_S dx dy = 2m(S).$$

(Erityisesti vakio 1 on integroitava yli S :n, joten S on Jordan-mitallinen.) $\square$

Esimerkki IX.2.4. Olkoot $a > 0$ ja $b > 0$. Ellipsi $\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \}$ on Jordanin käyrä, jolla on parametriesitys $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$. Vastaavan sisäalueen pinta-alaksi saadaan siis

$$\begin{aligned} m(S) &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(b \cos t) - (b \sin t)(-a \sin t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab. \end{aligned}$$

IX.3 Vektoritulo

Kertaamme myöhempiä tarkasteluja varten vektoritulon käsitteen ja perusominaisuudet.

Määritelmä IX.3.1. Olkoot $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektoreita $\mathbb{R}^3$:ssa. Niiden *vektoritulo* eli *ristitulo* on vektori

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Vektoritulon määritelmästä johtuu seuraava muodollinen muistisääntö:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

missä ylärivillä ovat luonnollisen kannan vektorit.

Lause IX.3.2. Olkoot $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektoreita $\mathbb{R}^3$:ssa.

- (a) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$.
- (b) $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$.

TODISTUS. Harjoitustehtävä.

Huomautus IX.3.3. Koska $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \cos^2 \theta$, missä θ on vektoreiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ välinen kulma ($0 \leq \theta \leq \pi$), lauseesta IX.3.2 (b) seuraa, että

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \theta.$$

Geometrisesti tämä merkitsee, että vektoritulon $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ normi on vektoreiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ määräämän suunnikkaan pinta-ala.

Määritelmä IX.3.4. Olkoot $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ja $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ vektoreita $\mathbb{R}^3$:ssa. Niiden *skalaarikolmitulo* määritellään lausekkeella $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \times \mathbf{z}$ ($= \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$).

Lause IX.3.5. Olkoot $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ja $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ vektoreita $\mathbb{R}^3:ssa$.

(a)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \times \mathbf{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(b) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$.

TODISTUS. Harjoitustehtävä.

Lause IX.3.6. Jos $\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$, niin $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = 0$.

TODISTUS. Skalaarikolmituloa $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ esittävässä determinantissa esiintyy sama vaakarivi kahdesti, joten $\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = 0$. Vastaavasti $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = 0$. $\square$

IX.4 Säännöllinen pinnanpala, pinta-ala ja integraali pinta-alan suhteen

Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ sijaitsevalla pinnalla on kirjallisuudessa monenlaisia määritelmiä. Käytämme tätä sanaa toisinaan epämuodollisesti ilman tyhjentävää määrittelyä. Otamme kuitenkin käyttöön seuraavan määritelmän mukaisen puhutavan.

Määritelmä IX.4.1. Olkoon $p \in \mathbb{N}$. Sanomme, että joukko $V \subset \mathbb{R}^3$ on C^p -pinnanpala, jos on olemassa sellainen alue (ts. epätyhjä yhtenäinen avoin joukko) $U \subset \mathbb{R}^2$ ja sellainen homeomorfismi $\phi : U \rightarrow V$, että (tulkittuna kuvauksena avaruuteen $\mathbb{R}^3$) ϕ on C^p -kuvaus, jonka Jacobin matriisin aste on maksimaalinen (eli kaksi) jokaisessa joukon U pisteessä. Tällöin sanotaan, että ϕ (tai täydellisemmin pari (ϕ, U)) on V :n (eräs) (C^p) -parametriesitys. Jos V on C^p -pinnanpala jollakin $p \in \mathbb{N}$, sanomme myös, että V on säännöllinen pinnanpala.

Kuvauksen ϕ osoittamiseen homeomorfismiksi voidaan usein käyttää seuraavaa lausetta.

Lause IX.4.2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu avoin joukko ja $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^m$ sellainen jatkuva kuvaus, että $f(A) \cap f(\partial A) = \emptyset$. Jos rajoittuma $f|_A$ on injektio, se määrittelee A :n homeomorfismin joukolle $f(A)$.

TODISTUS. Olkoon $g : f(A) \rightarrow A$ rajoittuman $f|_A : A \rightarrow f(A)$ käänteisfunktio. Osoitetaan g jatkuvaksi lauseen I.4.8 avulla. Olkoon $F \subset \mathbb{R}^n$ suljettu joukko. Sulkeuma $\bar{A}$ on kompakti ja se on A :n ja sen reunan ∂A erillinen unioni. Koska $f(A) \cap f(\partial A) = \emptyset$, on

$$g^{-1}(F) = f(A \cap F) = [f(A \cap F) \cup f(\partial A \cap F)] \cap f(A) = f(\bar{A} \cap F) \cap f(A).$$

Koska $\bar{A} \cap F$ on kompakti, joukko $f(\bar{A} \cap F)$ on lauseen nojalla kompakti ja siis suljettu. $\square$

Esimerkki IX.4.3. Kuvaus $\phi : [0, 2\pi] \times [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^3$, missä

$$\phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

on jatkuva, ja sen rajoittuma avoimeen joukkoon $(0, 2\pi) \times (0, 3)$ on injektio. Edellisestä lauseesta nähdään, että tämä rajoittuma on joukon $(0, 2\pi) \times (0, 3)$ homeomorfismi joukolle $\phi((0, 2\pi) \times (0, 3))$.

Määritelmä IX.4.4. Oletetaan, että $U \subset \mathbb{R}^2$ on rajoitettu Jordan-mitallinen alue ja $\phi : U \rightarrow V$ C^p -pinnanpalan V C^p -parametriesitys. Jos funktio $(u, v) \mapsto \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\|$ on integroituva yli joukon U , sen integraalia

$$A(V) = \int_U \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\| dudv$$

sanotaan säännöllisen pinnanpalan V (*pinta-*)*alaksi*.

Huomautus IX.4.5. (a) Ylläolevan määritelmän järkevyyks näkyy, kun tarkastellaan tangenttitasoissa tangenttivektoreiden virittämiä pieniä suunnikkaita. Derivaattakuvausta $D\phi(u, v)$ voidaan käyttää approksimoimaan ϕ :n arvon muutosta, kun argumentti muuttuu vähän. Tarkastellaan pienen suorakulmion kuvautumista. Olkoon sen yksi kärki pisteessä (u, v) ja pinta-ala $|\Delta u \Delta v|$. Derivaatta $D\phi(u, v)$ kuvaa tällaisen suorakulmion suunnikkaaksi, jonka pinta-ala on huomautuksen IX.3.3 mukaan

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \Delta u \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\| |\Delta u \Delta v|,$$

joten approksimoimalla määritelmän IX.4.4 integraalia tavalliseen tapaan summilla voidaan saada tukea näkemykselle, että tämä integraali vastaa tavallista käsitystä pinta-alasta.

(b) Määritelmä on sikäli ontuva, että puhutaan pinnanpalan alasta, vaikka se lasketaan parametriesityksen avulla. Voidaan kuitenkin osoittaa, että tulos ei riipu mainitut ehdot täyttävän parametriesityksen valinnasta.

Huomautus IX.4.6. (a) Pinnoiksi (ilman tyhjentävää määritelmää) sanomme avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukot ovat yleensä muotoa

$$P = \cup_{i=1}^k V_i \cup E,$$

missä joukot $V_1, \dots, V_k$ ovat erillisiä säännöllisiä pinnanpaloja ja E on äärellisen unioni joukoista, joista kukin on piste tai jatkuvasti differentioituvan polun jälki. Jos tässä jokaisella V_i :llä on pinta-ala $A(V_i)$ määritelmän IX.4.4 mielessä, merkitsemme

$$A(P) = \sum_{i=1}^k A(V_i)$$

ja sanomme, että tämä luku on P :n (*pinta-*)*ala*. Voidaan osoittaa, että tulos ei riipu P :n esittämistavasta edellä mainitussa muodossa.

(b) Tyypillinen tilanne, jossa kohdan (a) sopimusta käytetään, on sellainen, jossa U on rajoitettu Jordan-mitallinen alue, jonka reuna koostuu äärellisestä määrästä jatkuvasti derivoituvien polkujen jälkiä, ja $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ on injektiiivinen C^p -kuvaus, jonka Jacobin matriisiin aste on kaksi jokaisessa U :n pisteessä. Jos ϕ voidaan laajentaa jatkuvaksi kuvaukseksi $\tilde{\phi} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, jolle $\phi(U) \cap \tilde{\phi}(\partial U) = \emptyset$, lauseen IX.4.2 mukaan $\phi : U \rightarrow \phi(U) = V$ on homeomorfismi, ja siis V on säännöllinen pinnanpala. Yleensä nähdään myös helposti, että $E = \tilde{\phi}(\partial U)$ on kohdassa (a) selitettyä muotoa, joten pinnan $\tilde{\phi}(\bar{U})$ ala saadaan säännöllisen pinnanpalan V alana. Sanomme tässä tilanteessa, että $\tilde{\phi}$ on pinnan $\tilde{\phi}(\bar{U})$ parametriesitys.

Esimerkki IX.4.7. Oletetaan, että $a < b$ ja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva funktio, jolle $f(x) > 0$ kaikilla $x \in (a, b)$. Kun funktion f xy -tasossa sijaitseva kuvaaja pyörähtää xyz -avaruudessa x -akselin ympäri, saadaan pyörähdyspinta, joka on kuvauksen $\phi : [0, 2\pi] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\phi(\alpha, t) = (t, f(t) \cos \alpha, f(t) \sin \alpha),$$

arvojoukko. Käytetään edellistä huomautusta. Nyt

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\alpha, t) \times \frac{\partial \phi}{\partial t}(\alpha, t) = (-f'(t)f(t), f(t) \cos \alpha, f(t) \sin \alpha)$$

ja

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\alpha, t) \times \frac{\partial \phi}{\partial t}(\alpha, t) \right\| = f(t) \sqrt{[f'(t)]^2 + 1}.$$

Siis pyörähdyspinnan alaksi saadaan

$$\int_{[0, 2\pi] \times [a, b]} f(t) \sqrt{[f'(t)]^2 + 1} d\alpha dt = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{[f'(t)]^2 + 1} dt.$$

Huomautus IX.4.8. Jos S voidaan esittää (riittävän säännöllisen) funktion kuvaajana, ts. jos S on esitetty yhtälöllä $z = f(x, y)$, parametriesitykseksi saadaan $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, ja vektorifunktion ϕ osittaisderivaatoiksi tulee $\phi_x = (1, 0, f_x)$ ja $\phi_y = (0, 1, f_y)$, ja siis $\phi_x \times \phi_y = (-f_x, -f_y, 1)$, joten

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) \right\| = \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}.$$

Esimerkki IX.4.9. Pinnasta $\{(x, y, z) \mid xy - z = 0\}$ sylinterin $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ sisään jäävän osan pinta-alaksi saadaan

$$\int_K \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} dx dy = \int_K \sqrt{y^2 + x^2 + 1} dx dy,$$

missä $K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ja $f(x, y) = xy$. Napakoordinaattien avulla laskien tästä tulee

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} r dr = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

Yleistämme nyt määritelmän IX.4.4 korvaamalla vakiofunktion $\mathbf{x} \mapsto 1$ yleisemmällä funktiolla, joka on määritelty sopivalla avaruudessa $\mathbb{R}^3$ sijaitsevalla pinnalla.

Määritelmä IX.4.10. Oletetaan, että $U \subset \mathbb{R}^2$ on rajoitettu Jordan-mitallinen alue ja $\phi : U \rightarrow V$ C^p -pinnanpalan V C^p -parametriesitys. Olkoon $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ funktio. Jos funktio $(u, v) \mapsto f(\phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\|$ on integroituva yli joukon U (ja siis erityisesti rajoitettu), merkitsemme

$$\int_V f dA = \int_V f dS = \int_U f(\phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\| dudv$$

ja sanomme tätä integraalia funktion f *integraaliksi pinta-alan suhteen* eli *pinta-alaintegraaliksi* yli säännöllisen pinnanpalan V . Tällöin sanotaan, että f on *integroituva pinta-alan suhteen* yli V :n. (Edellä merkinnän $\int_V$ sijasta voidaan myös merkitä $\int_\phi$ tai $\int_{(V, \phi)} \cdot$)

Huomautus IX.4.11. Huomautukset IX.4.5 (b) ja IX.4.6 voidaan ilmeisellä tavalla laajentaa koskemaan myös edellisen määritelmän yleisempää tilannetta. Niinpä voimme puhua funktion integraalista pinta-alan suhteen yli pinnan, joka on huomautuksessa IX.4.6 (a) kuvattua tyyppiä. Tällainen integraali on summa edellisessä määritelmässä tarkastelluista integraaleista yli äärellisen monen säännöllisen pinnanpalan. Usein määritelmän IX.4.10 integroitavalla on jatkuva laajennus säännöllisen pinnanpalan parametriesityksen määrittelyalueen (kompaktiin) sulkeumaan, jolloin integroitavuus on automaattista. Yleensäkin integrointi voidaan laajentaa määrittelyalueen sulkeumaan, koska kyseessä on Jordan-mitallinen joukko, jonka reuna siis on Jordanin nollajoukko.

Esimerkki IX.4.12. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ rajoitettu Jordan-mitallinen alue ja K sen sulkeuma. Olkoon $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jonka rajoittuma $f|U$ on C^1 -funktio. Ajattelemmme f :n kuvaajan xyz -avaruudessa esittävän maaston muotoa ja oletamme, että maastoon sataa vettä suoraan ylhäältä. Pisteessä $(x, y, f(x, y))$ f :n kuvaajan normaali on vektorin

$$N(x, y) = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)$$

suuntainen (ks. V.1.10), ja pisteen $(x, y, f(x, y))$ ympäristössä olevalle pienelle pinta-alaltaan A :n suuruiselle alueelle sataa aikayksikössä $cA \cos \alpha$ tilavuusyksikköä vettä, missä α on vektoreiden $N(x, y)$ ja $(0, 0, 1)$ välinen kulma ja c on vakio. Koska

$$\cos \alpha = \|N(x, y)\|^{-1} N(x, y) \cdot (0, 0, 1) = \|N(x, y)\|^{-1},$$

saadaan koko maastoon aikayksikössä satavaksi vesimääräksi V f :n kuvaajassa määritellyn funktion $(x, y, f(x, y)) \mapsto c \|N(x, y)\|^{-1}$ integraali pinta-alan suhteen eli

$$V = \int_K c \|N(x, y)\|^{-1} \|N(x, y)\| \, dx \, dy.$$

Tämä on c kertaa K :n pinta-ala, joten sademäärä maastoon on sama kuin olisi tasaiselle K :lle, mikä seikka ei ketään hämmästyttäne.

IX.5 Vektorikentän pintaintegraali

Tarkastellaan ensin johdattavaa esimerkkiä.

Esimerkki IX.5.1. Katiska on purossa, jossa (sopivassa koordinaatistossa) veden virtausnopeutta pisteessä (x, y, z) esittää vektori $f(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (joka oletetaan ajan suhteen vakioksi). (Tarkemmin: pisteessä (x, y, z) virtauksen suunta on $f(x, y, z)$ ja vauhti $\|f(x, y, z)\|$ cm/s.) Jos pisteen (x, y, z) välittömässä läheisyydessä olevan katiskaverkon silmän pinta-ala on A cm², silmän läpi virtaa sekunnissa $A \|f(x, y, z)\| \cos \alpha$ cm³ vettä, missä α on vektorin $f(x, y, z)$ ja silmän ulospäin suuntautuvan normaalivektorin välinen kulma, ja käytämme merkkisopimusta, jonka mukaan katiskasta ulospäin virtaava vesi on plusmerkkistä ja sisäänpäin virtaava miinusmerkkistä. (Piirrä kuvio ja vakuutu!) Oletamme, että (x, y, z) on verkonsilmän määräämässä tasossa silmän sisällä, jolloin

$$A \|f(x, y, z)\| \cos \alpha = \mathbf{A} \mathbf{n}(x, y, z) \cdot f(x, y, z),$$

missä $\mathbf{n}(x, y, z)$ on pisteeseen (x, y, z) asetettu ykkösen pituinen ulkonormaalivektori. Summaamalla lauseke $\mathbf{A} \mathbf{n}(x, y, z) \cdot f(x, y, z)$ yli kaikkien tietyllä alueella S

olevien verkkonsilmiin saadaan luku, joka hyvin approksimoi pinta-alan suhteen otettua pinta-integraalia $\int_S f \cdot \mathbf{n} dA$. Voimme siis sanoa, että tämä integraali ilmaisee, kuinka monta kuutiokeskiteometriä sekunnissa vettä virtaa alueen S läpi, kun otetaan edellä tehty merkkisopimus huomioon.

Seuraava johdettava esimerkki on edellistä hivenen abstraktimmalla tasolla.

Esimerkki IX.5.2. Oletetaan, että $U \subset \mathbb{R}^2$ on rajoitettu Jordan-mitallinen alue. Oletetaan myös, että $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ on määritelmän IX.4.1 mukainen säännöllisen pinnanpalan V parametriesitys. Erityisesti

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \neq 0$$

kaikilla $(u, v) \in U$. Jos $\phi(U) \subset A \subset \mathbb{R}^3$ ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ on vektorikenttä, voidaan kirjoittaa

$$f(\phi(u, v)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) = f(\phi(u, v)) \cdot \mathbf{n}(\phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\|,$$

missä $\mathbf{n}(\phi(u, v))$ on normillaan jaettu ristitulo $\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v)$. Tällöin yksikkövektori $\mathbf{n}(\phi(u, v))$ on kohtisuorassa $\phi(U)$:n pisteeseen $\phi(u, v)$ asetettua tangenttitasoa vastaan (mikä seuraa jakson V.1 tarkasteluista ja lauseesta IX.3.6). Toisaalta kaavan vasemmalla puolella oleva skalaarikolmitulo voidaan kirjoittaa determinanttina

$$\begin{vmatrix} f_1(\phi(u, v)) & f_2(\phi(u, v)) & f_3(\phi(u, v)) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi_3}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial \phi_3}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}.$$

Siis vektorikentälle f voidaan todeta, että

$$\int_K f(\phi(u, v)) \cdot \mathbf{n}(\phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\| dudv$$

on sama kuin

$$\int_K \begin{vmatrix} f_1(\phi(u, v)) & f_2(\phi(u, v)) & f_3(\phi(u, v)) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi_3}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial \phi_3}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} dudv,$$

mikäli toinen (ja siis toinenkin) integraali on olemassa. Viimeistä edellinen integraali on määritelmän IX.4.10 mukaan funktion

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)$$

integraali pinta-alan suhteen yli säännöllisen pinnanpalan $\phi(U)$. Tämä asian muotoilu on kuitenkin sikäli harhaanjohtava, että siitä ei käy ilmi yksikkönormaalivektorin $\mathbf{n}$ riippuvuus parametriesityksen ϕ valinnasta. Toisella parametriesityksen valinnalla tämä suunta voi vaihtua vastakkaiseksi. Näin käy esimerkiksi, jos ϕ korvataan parametriesityksellä $(u, v) \mapsto \phi(v, u)$. Palaamme asiaan huomautuksessa IX.5.6.

Edellinen esimerkki antaa aiheen seuraavaan määritelmään.

Määritelmä IX.5.3. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^2$ rajoitettu Jordan-mitallinen alue. Olkoon $\phi(K) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ säännöllisen pinnanpalan $V \subset A \subset \mathbb{R}^3$ parametriesitys ja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ jatkuva vektorikenttä. Merkitsemme

$$\int_{\phi} f = \int_{(V, \phi)} f = \int_U \begin{vmatrix} f_1(\phi(u, v)) & f_2(\phi(u, v)) & f_3(\phi(u, v)) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi_3}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial \phi_3}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} dudv,$$

mikäli tämä integraali on olemassa, ja sanomme, että kyseessä on vektorikentän f pintaintegraali yli parametriesityksen ϕ tai yli (säännöllisen) pinnan(palan) V (parametriesityksen ϕ suhteen).

Huomautus IX.5.4. Käytämme edellisen määritelmän mukaista merkintää

$$\int_{\phi} f = \begin{vmatrix} f_1(\phi(u, v)) & f_2(\phi(u, v)) & f_3(\phi(u, v)) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi_3}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u, v) & \frac{\partial \phi_3}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} dudv$$

siinäkin tapauksessa, että $K \subset \mathbb{R}^2$ on kompakti Jordan-mitallinen joukko, joka on sisäosansa sulkeuma, $\phi : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^1 -kuvaus ja f jossakin joukon $\phi(K)$ sisältävässä $\mathbb{R}^3$:n osajoukossa määritelty jatkuva $\mathbb{R}^3$ -arvoinen kuvaus. Sanomme tätä integraalia f pintaintegraaliksi yli parametriesityksen ϕ , mikäli ϕ :n rajoittuma K :n sisäosaan on säännöllisen pinnanpalan parametriesitys.

Esimerkki IX.5.5. Valitaan pinnalle $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 3\}$ parametriesitykseksi kuvaus $\phi : [0, 2\pi] \times [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^3$, missä

$$\phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Tarkastellaan vektorikenttää $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, missä $f(x, y, z) = (x + y, y, z^2)$. Silloin

$$\begin{aligned} \int_{\phi} f &= \int_0^{2\pi} du \int_0^3 \begin{vmatrix} \cos u + \sin u & \sin u & v^2 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dv \\ &= 3 \int_0^{2\pi} (1 + \sin u \cos u) du = 6\pi. \end{aligned}$$

Huomautus IX.5.6. (a) Kuten esimerkissä IX.5.1 nähtiin, edellä määritellyllä pintaintegraalilla on luonnollinen fysikaalinen tulkinta esim. virtausilmäiden yhteydessä. Jos F kussakin määrittelyjoukkonsa pisteessä saa arvokseen neste-virtauksen nopeusvektorin, niin integraali

$$\int_{(S, \phi)} F = \int_S F \cdot \mathbf{n} dA$$

ilmaisee pinnan S läpi virtaavan nesteen määrän aikayksikköä kohti. Tästä syystä sanotaan toisinaan muissakin yhteyksissä, että kyseinen integraali on vektorikentän F vuo (engl. *flux*) pinnan S läpi. Sopimuksenvaraisesti kiinnitetyltä

pinnan puolelta ulospäin osoittavan normaalivektorin $\mathbf{n}$ suuntainen virtaus katsotaan positiiviseksi ja sille vastakkainen virtaus negatiiviseksi. Tämä edellyttää, että pinta on *kaksipuolinen*, jolloin voidaan sopia, kumpi pinnan puoli on positiivinen. Silloin käytetään parametriesitystä, johon liittyvä yksikkönormaalivektori osoittaa pinnan positiivisesta puolesta ulospäin eli on pinnan *ulkonormaalivektori*. (On olemassa myös yksipuolisia eli suunnistumattomia pintoja, tunnetuimpana esimerkkinä ns. Möbiuksen nauha, jonka voi valmistaa kiertämällä paperiliuskaa puoli kierrosta ennen kuin sen päät liimaa yhteen.) Ryhtymättä selvittämään suunnistuskysymyksiä tarkemmin tyydytään näihin ylimalkaisiin huomautuksiin.

(b) Varsin yleisillä ehdoilla pintaintegraali on (merkkiä vaille) riippumaton parametriesityksen valinnasta, mikä monissa yksinkertaisissa tapauksissa mahdollistaa pintaintegraalista puhumisen parametriesitystä eksplisiittisesti mainitsematta. Myös pintaintegraali sopivien edellä käsiteltyä tyyppiä olevien pintojen unionien yli voidaan usein luonnollisella tavalla ilmaista. Tätäkään kysymystä emme ryhdy tarkemmin käsittelemään.

IX.6 Vektorikentän integrointi yli singulaarisen 2- tai 3-kuution reunan

Määrittelemme tässä jaksossa joitakin jatkossa tarvittavia käsitteitä ja merkintöjä. Käytännön laskuesimerkkejä on seuraavassa jaksossa.

Määritelmä IX.6.1. Olkoon $U \subset \mathbb{R}^n$. Jokaista $\mathbb{R}^3$:n yksikkökuutiossa $[0, 1]^3$ määriteltyä jatkuvaa kuvausta $c : [0, 1]^3 \rightarrow U$ sanotaan *singulaariseksi 3-kuutioksi* U :ssa. Vastaavasti jatkuvaa kuvausta $c : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow U$ sanotaan *singulaariseksi 2-kuutioksi* U :ssa.

Seuraavassa yleistetään jaksossa IX.1 käytettyjä merkintöjä $\mathbb{R}^n$ -arvoisen singulaarisen 2-kuution tapaukseen.

Määritelmä IX.6.2. Olkoon $c : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ singulaarinen 2-kuutio. Määritellään välillä $[0, 1]$ $\mathbb{R}^n$ -arvoiset polut c_{10} , c_{11} , c_{20} ja c_{21} kaavoilla

$$\begin{cases} c_{10}(t) = c(0, t) \\ c_{11}(t) = c(1, t) \\ c_{20}(t) = c(t, 0) \\ c_{21}(t) = c(t, 1). \end{cases}$$

Jos erityisesti c on C^1 -kuvaus ja f on joukossa $c([0, 1]^2)$ määritelty jatkuva $\mathbb{R}^n$ -arvoinen kuvaus, f :n *integraali yli c :n reunan* määritellään seuraavasti:

$$\int_{\partial c} f = - \int_{c_{10}} f + \int_{c_{11}} f + \int_{c_{20}} f - \int_{c_{21}} f.$$

(Siis kunkin polun $c_{i\alpha}$ yli otetun integraalin kerroin on $(-1)^{i+\alpha}$.)

Vastaavanlainen määritelmä asetetaan kolmiulotteisessa tapauksessa:

Määritelmä IX.6.3. Olkoon $c : [0, 1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ singulaarinen 3-kuutio. Määritellään kuvaukset $c_{i\alpha} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, $\alpha = 0, 1$, kaavoilla

$$\begin{cases} c_{10}(u, v) = c(0, u, v) \\ c_{11}(u, v) = c(1, u, v) \\ c_{20}(u, v) = c(u, 0, v) \\ c_{21}(u, v) = c(u, 1, v) \\ c_{30}(u, v) = c(u, v, 0) \\ c_{31}(u, v) = c(u, v, 1). \end{cases}$$

Jos c on C^1 -kuvaus (ja samoin siis jokainen $c_{i\alpha}$), niin jatkuvalle vektorifunktiolle $f : c([0, 1]^3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ merkitsemme

$$\int_{\partial c} f = \sum_{i=1}^3 \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \int_{c_{i\alpha}} f$$

ja sanomme tätä vektorikentän f integraaliksi yli c :n reunan.

IX.7 Stokesin ja Gaussin lauseet singulaarisille 2- ja 3-kuutioille

Tässä jaksossa esitetään eräät variantit klassisesta Stokesin lauseesta ja ns. divergenssilauseesta eli Gaussin lauseesta. Vaikka ne muotoillaan singulaarisille 2- tai 3-kuutioille, varsin monet käytännössä esiintyvät tilanteet voidaan sopivasti normittamalla käsitellä niiden avulla. Seuraavat kaksi lausetta olisi mahdollista todistaa samantapaisella (mutta huomattavasti pitemmällä) suoralla laskulla kuin Greenin lause IX.1.6. Sivuuutamme todistusten yksityiskohdat. Kuvausta c koskevaa C^2 -oletusta voitaisiin approksimoinnilla lieventää kuten Greenin lauseenkin tapauksessa.

Tässä esityksessä muotoillut Greenin, Stokesin ja Gaussin lauseet singulaarisille 2- ja 3-kuutioille ovat erikoistapauksia ns. differentiaalimuotojen teorian alaan kuuluvasta yleisestä Stokesin lauseesta, jonka todistus laajemman teorian yhteydessä olisi melko lyhyt ja selväpiirteinen. Stokesin lauseella on eri tilanteisiin sopivia muotoiluja, joita edustakoon tässä singulaarisia k -kuutioita c ja ns. $(k-1)$ -(differentiaali)muotoja ω koskeva kaava

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Sopivasti tulkittuina gradientti, divergenssi ja roottori ovat tässä esiintyvän ns. ulkoderivaan $d\omega$ erikoistapauksia.

Lause IX.7.1 (Stokesin lause singulaarisille 2-kuutioille). *Olkoon $U \subset \mathbb{R}^3$ avoin joukko ja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^1 -luokan vektorikenttä. Jos c on C^2 -luokan singulaarinen 2-kuutio U :ssa, niin*

$$\int_c \nabla \times f = \int_{\partial c} f.$$

Lause IX.7.2 (Gaussin lause eli divergenssilause singulaarisille 3-kuutioille). Olkoon $U \subset \mathbb{R}^3$ avoin joukko ja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^1 -luokan vektorikenttä. Olkoon c C^2 -luokan singulaarinen 3-kuutio U :ssa. Silloin

$$\int_{[0,1]^3} (\nabla \cdot f)(c(u, v, w)) J_c(u, v, w) du dv dw = \int_{\partial c} f,$$

missä J_c on c :n Jacobin determinanti. Jos c :n rajoittuma joukon $K = [0, 1]^3$ sisäosaan K° on injektio, ja c :n Jacobin determinanti $J_c(\mathbf{u}) > 0$ kaikilla $\mathbf{u} \in K^\circ$, niin $c(K)$ on kompakti Jordan-mitallinen joukko, ja

$$\int_{c(K)} \nabla \cdot f = \int_{\partial c} f.$$

Esimerkki IX.7.3. Määritellään singulaarinen 2-kuutio $c : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ kaavalla $c(u, v) = (u \cos v\pi, u \sin v\pi, u)$ sekä vektorikenttä $f : \mathbb{R}^3$:ssa kaavalla $f(x, y, z) = (y, x, x)$. Nyt $c_{10}(t) = (0, 0, 0)$, $c_{11}(t) = (\cos t\pi, \sin t\pi, 1)$, $c_{20}(t) = (t, 0, t)$ ja $c_{21}(t) = (-t, 0, t)$ kaikilla $t \in [0, 1]$. Siis

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} f &= 0 + \int_0^1 [-\pi \sin^2 t\pi + \pi \cos^2 t\pi] dt \\ &\quad + \int_0^1 [0 \cdot 1 + t \cdot 0 + t \cdot 1] dt - \int_0^1 [0 \cdot (-1) - t \cdot 0 - t \cdot 1] dt \\ &= \int_0^1 -\pi \cos 2\pi t dt + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Käyttämällä Stokesin lausetta saadaan sama tulos:

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} f &= \int_c \nabla \times f = \int_c (0, -1, 0) \\ &= \int_{[0,1]^2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos v\pi & \sin v\pi & 1 \\ -u\pi \sin v\pi & u\pi \cos v\pi & 0 \end{vmatrix} du dv = \int_{[0,1]^2} u\pi \sin v\pi du dv = 1. \end{aligned}$$

Lasketaan vielä säännöllisen pinnanpalan $c((0, 1) \times (0, 1))$ (ja samalla pinnan $c([0, 1] \times [0, 1])$) ala määritelmän IX.4.4 kaavalla. Pinta-alaksi saadaan

$$\begin{aligned} &\int_0^1 du \int_0^1 \|(\cos v\pi, \sin v\pi, 1) \times (-u\pi \sin v\pi, u\pi \cos v\pi, 0)\| dv \\ &= \int_0^1 du \int_0^1 \|(-u\pi \cos v\pi, -u\pi \sin v\pi, u\pi)\| dv \\ &= \int_0^1 du \int_0^1 \sqrt{2}\pi u dv = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Tulos sopii yhteen sen kanssa, että kyseinen pinta on ympyräkartion vaipan osa ja voidaan levittää tasoon $\sqrt{2}$ -säteisen ympyrän sektoriksi, missä mukana on ympyrän kehästä osa, jonka pituus on π .

Esimerkki IX.7.4. Tarkastellaan $\mathbb{R}^3$:n origokeskisen R -säteisen pallon

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

pallokoordinaattisysteystä $(\rho, \theta, \phi) \mapsto g(\rho, \theta, \phi) = (x, y, z)$, missä

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \theta, \end{cases}$$

kun $\rho \in [0, R]$, $\theta \in [0, \pi]$ ja $\phi \in [0, 2\pi]$. Jotta saisimme joukossa $[0, 1]^3$ määritelyn kuvauksen eli singulaarisen 3-kuution, asetamme $c(t, u, v) = g(Rt, \pi u, 2\pi v)$, kun $(t, u, v) \in [0, 1]^3$. Määritelmän mukaaan

$$\begin{cases} c_{10}(\xi, \eta) = c(0, \xi, \eta) = (0, 0, 0) \\ c_{11}(\xi, \eta) = c(1, \xi, \eta) = (R \sin \pi \xi \cos 2\pi \eta, R \sin \pi \xi \sin 2\pi \eta, R \cos \pi \xi) \\ c_{20}(\xi, \eta) = c(\xi, 0, \eta) = (0, 0, R\xi) \\ c_{21}(\xi, \eta) = c(\xi, 1, \eta) = (0, 0, -R\xi) \\ c_{30}(\xi, \eta) = c(\xi, \eta, 0) = (R\xi \sin \eta, 0, R\xi \cos \eta) \\ c_{31}(\xi, \eta) = c(\xi, \eta, 1) = (R\xi \sin \eta, 0, R\xi \cos \eta), \end{cases}$$

kun $(\xi, \eta) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Minkä tahansa (riittävän laajassa joukossa määritelyn) jatkuvan vektorikentän f integraali yli kunkin singulaarisen 2-kuution c_{10} , c_{20} , c_{21} häviää, sillä integroitavana olevaan kolmiriviseen determinanttiin tulee ainakin yksi nollarivi. Lisäksi c_{30} :n ja c_{31} :n yli otetut integraalit määritelmän IX.6.3 kaavassa kumoutuvat. Jos f on luokkaa C^1 oleva vektorikenttä, saadaan siis lauseen IX.7.2 nojalla

$$\int_{c([0,1]^3)} \nabla \cdot f = \int_{\partial c} f = \int_{c_{11}} f.$$

Suora lasku osoittaa, että $\frac{\partial c_{11}}{\partial \xi}(\xi, \eta) \times \frac{\partial c_{11}}{\partial \eta}(\xi, \eta) = 2R\pi^2 \sin \pi \xi c_{11}(\xi, \eta)$, eli kyseessä on "ulkonormaalivektori" sanan tavanomaisessa merkityksessä. Koska $\|c_{11}(\xi, \eta)\| = R$, saadaan R -säteisen pallon pinta-alaksi

$$A = \int_{[0,1] \times [0,1]} 2R^2 \pi^2 \sin \pi \xi d\xi d\eta = 4\pi R^2.$$

Esimerkki IX.7.5. Olkoon

$$A = \{ (x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2 \}.$$

Kun määritellään $c(t, u, v) = (2t \cos \frac{\pi}{2}u, 2t \sin \frac{\pi}{2}u, v(4 - 4t^2))$, $(t, u, v) \in [0, 1]^3$, saadaan C^∞ -luokan singulaarinen 3-kuutio, jolle $c([0, 1]^3) = A$. Määritelmän mukaan kaikilla $(\xi, \eta) \in [0, 1]^2$ on

$$\begin{cases} c_{10}(\xi, \eta) = c(0, \xi, \eta) = (0, 0, 4\eta) \\ c_{11}(\xi, \eta) = c(1, \xi, \eta) = (2 \cos \frac{\pi}{2}\xi, 2 \sin \frac{\pi}{2}\xi, 0) \\ c_{20}(\xi, \eta) = c(\xi, 0, \eta) = (2\xi, 0, \eta(4 - 4\xi^2)) \\ c_{21}(\xi, \eta) = c(\xi, 1, \eta) = (0, 2\xi, \eta(4 - 4\xi^2)) \\ c_{30}(\xi, \eta) = c(\xi, \eta, 0) = (2\xi \cos \frac{\pi}{2}\eta, 2\xi \sin \frac{\pi}{2}\eta, 0) \\ c_{31}(\xi, \eta) = c(\xi, \eta, 1) = (2\xi \cos \frac{\pi}{2}\eta, 2\xi \sin \frac{\pi}{2}\eta, 4 - 4\xi^2), \end{cases}$$

kun $(\xi, \eta) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Kun integroidaan jatkuva vektorikenttä yli ∂c :n, joudutaan tarkastelemaan kolmirivisiä determinantteja, joissa kahtena alimpana vaakarivinä ovat kuvausten $c_{i\alpha}$ osittaisderivaattavektorit ξ :n ja η :n suhteen. Koska kahden ensimmäisen $c_{i\alpha}$:n tapauksessa determinanttiiin tulee nollarivi, on

$$\int_{\partial c} f = \int_{c_{20}} f - \int_{c_{21}} f - \int_{c_{30}} f + \int_{c_{31}} f$$

jokaiselle A :ssa määritellylle jatkuvalle vektorikentälle f .

Tarkastellaan esimerkkinä vektorikenttää f , jolle $f(x, y, z) = (z, xy, xz)$. Laskemalla edellä mainittujen determinanttien integraalit saadaan $\int_{\partial c} f = \frac{128}{15}$.

Yksinkertaisemmin tulos kuitenkin saadaan divergenssilauseen avulla. Käytämme ensin lauseen IX.7.2 ensimmäistä kaavaa:

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} f &= \int_{[0,1]^3} 4t \cos \frac{\pi}{2} u \begin{vmatrix} 2 \cos \frac{\pi}{2} u & -\pi t \sin \frac{\pi}{2} u & 0 \\ 2 \sin \frac{\pi}{2} u & \pi t \cos \frac{\pi}{2} u & 0 \\ -8tv & 0 & 4 - 4t^2 \end{vmatrix} dt du dv \\ &= \int_{[0,1]^3} 4t \cos \frac{\pi}{2} u (4 - 4t^2) 2\pi t dt du dv = \frac{128}{15}. \end{aligned}$$

Lauseen IX.7.2 jälkimmäistä kaavaa soveltaen saadaan

$$\int_{\partial c} f = \int_A \nabla \cdot f = \int_A 2x dx dy dz.$$

Kun viimeinen integraali lasketaan sylinterikoordinaattien avulla, sen arvoksi tulee

$$\int_0^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos \phi d\phi \int_0^{4-r^2} r dz = 2 \int_0^2 r^2 (4 - r^2) dr = \frac{128}{15}.$$

Tämä laskutapa oli kolmesta esitetystä yksinkertaisin. Singulaarisen kuution Jacobin determinantin laskemista vastaavalla toimella välttyttiin, koska sylinterikoordinaattimuunnoksen Jacobin determinantti tiedettiin ennalta. Tällaisessa tapauksessa on yleensäkin luonnollista ilmaista integraali divergenssin integraalina yli A :ta vastaavan joukon ja sen jälkeen laskea divergenssin integraali helpoimmalla mahdollisella tavalla.

Hakemisto

- C^∞ -kuvaus, 25
- C^p -kuvaus, 25
- C^p -pinnanpala, 93
- k :nnen kertaluvun osittaisderivaatta, 17
- absoluuttinen maksimi, 31
- alaintegraali, 35
- alasumma, 35
- alue, 80
- avoin joukko, 3
- avoin peite, 9
- derivaatta, 21
- differentiaalimuoto, 81
- differentioituva, 20
- divergenssi, 30
- divergenssilause, 100
- eksakti differentiaalimuto, 81
- etäisyys, 2
- Fréchet'n derivaatta, 21
- Gaussin lause, 100
- geometrinen mitta, 34
- globaali(nen) (maksimi, minimi), 31
- gradientti, 22
- gradienttikenttä, 56
- Greenin lause, 88
- Heinen-Borelin lause, 11
- Hessen matriisi, 71
- homeomorfiset joukot, 9
- homeomorfismi, 9
- indefiniitti, 71
- integraali, 36
- integraali kaarenpituuden suhteen, 55
- integraali pinta-alan suhteen, 95
- integraali yli singulaarisen 2-kuution reunan, 99
- integraali yli singulaarisen 3-kuution reunan, 100
- integraali yli singulaarisen 2-kuution c reunan, 88
- integraalifunktio, 81
- integroituva, 37
- integroituva funktio, 36
- integroituva pinta-alan suhteen, 95
- integroituva pitkin polkua, 51
- iteroitu integraali, 43
- Jacobin derminantti, 75
- Jacobin matriisi, 21
- jakopiste, 35
- jakoväli, 35
- jatkuva, 6
- jatkuvasti derivoituva polku, 48
- jatkuvasti differentioituva, 24
- jono, 2
- Jordan-mitallinen, 40
- Jordanin alue, 91
- Jordanin käyrä, 48
- Jordanin käyrälause, 87
- Jordanin kaari, 48
- Jordanin nollajoukko, 38
- käänteispolku, 49
- käyrä, 48
- käyräintegraali, 51
- käyräyhtenäinen, 81
- kaarenpituus parametrina, 55
- kaari, 48
- kertaluvun k derivaatta, 67
- ketjusääntö, 27
- kokonaisheilahtelu, 49
- kompakti joukko, 10
- konservatiivinen, 56
- konvekksi, 83
- kriittinen piste, 32
- lähteetön, 30
- Lagrangen kertojat, 63
- Lebesguen nollajoukko, 38
- Leibnizin sääntö, 79
- lineaarikuvauksen matriisi, 14
- lineaarikuvauksen normi, 15
- lineaarikuvaus, 14
- lokaali (maksimi, minimi), 31
- luonnollinen kanta, 1
- metriikka, 2
- metrinen avaruus, 2
- nabla, 29
- negatiividefiniitti, 71

neliömuoto, 71
 nollajoukko, 38
 normaali(suora), 60
 normaalitaso, 60

 oikea normaalivektori, 87
 oleellinen maksimi, 31
 ortogonaalikomplementti, 57
 osajono, 3
 osapeite, 9
 osittaisderivaatta, 16

 paikallinen maksimi, 31
 pallokoordinaatit, 76
 palloympäristö, 3
 paloittain jatkuvasti derivoituva, 48
 parametriesitys, 48
 peite, 9
 perusvektorit, 1
 pinnan (pinta-)ala, 94
 pinta-ala, 35, 40
 pinta-alaintegraali, 95
 pintaintegraali, 98
 pistejono, 2
 pistetulo, 1
 Poincarén lemma, 83
 polku, 48
 polkuyhtenäinen joukko, 81
 polun pituus, 49
 porrasmurtoviiva, 80
 porrasmurtoviivatie, 80
 positiividefiniitti, 71
 positiivisesti suunnistettu, 54
 potentiaali, 56, 81
 pyörteetön, 30

 raja-arvo, 2
 rajoitettu joukko, 9
 rajoitetusti heilahteleva, 49
 reuna, 3
 reunapiste, 3
 Riemann-integroituva funktio, 36
 Riemannin ehto, 36
 Riemannin integraali, 36
 ristitulo, 92
 roottori, 30

 säännöllinen pinnanpala, 93
 säännöllinen piste, 57
 säännöllisen pinnanpalan (pinta-)ala, 94

 singulaarinen 2-kuutio, 86, 99
 singulaarinen 3-kuutio, 99
 sisäalue, 87
 sisältö, 40
 sisäosa, 3
 sisäpiste, 3
 sisätulo, 1
 skalaarikolmitulo, 92
 Stokesin lause, 100
 suljettu, 83
 suljettu joukko, 3
 sulkeuma, 5
 sulkeutuva, 48
 suoristuva, 49
 suppeneva jono, 2
 suunnattu derivaatta, 25
 sylinterikoordinaatit, 47, 76

 tähtimäinen, 83
 tangentti- n -taso, 60
 tangenttivektori, 48
 tasa-arvopinta, 60
 tasainen jatkuvuus, 13
 Taylorin kaava, 68
 Taylorin polynomi, 68
 tie, 48
 tilavuus, 35, 40
 toinen derivaatta, 66
 toisen kertaluvun osittaisderivaatta, 17
 tulopolku, 49

 ulkopiste, 3

 väli, 34
 välin jako, 35
 vasen normaalivektori, 87
 vektorijono, 2
 vektorikenttä, 81
 vektorin normi, 1
 vektorin pituus, 1
 vektoritulo, 92
 vuo, 90, 98

 yhtenäinen joukko, 81
 yläintegraali, 35
 yläsumma, 35