

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 2, 22.9.2017

1. Valitaan tulkintajoukoksi reaaliluvut. Onko olemassa sellaista tulkintaa, jossa kaava

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + y = x + z \rightarrow y = z)$$

on epätosi? Ohje: Ainoa vapaasti tulkittavissa oleva objekti on kaksipaikkainen funktiosymboli $+$.

Vastaus: Jos $+$ tulkitaan kertolaskuksi, on

$$1 + 0 = 2 + 0 \rightarrow 1 = 2$$

epätosi ja näin ollen myös alkuperäinen lause epätosi.

2. Käytä luennoilla esitettyjä määritelmiä ja merkintöjä ja osoita aksioomista lähtien, että a) $(-1)(-1) = 1$, että b) $(-1)x = -x$ kaikille reaaliluvuille x ja että c) $x^2 \geq 0$ kaikille reaaliluvuille x .

Vastaus: a) Osoitetaan ensin, että $(-1) \cdot (-1)$ on luvun -1 vastaluku:

$$(-1) \cdot (-1) + (-1) = (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = (-1) \cdot (-1 + 1) = (-1) \cdot 0 = 0.$$

Viimeisin yhtälö perustuu luennolla esitettyyn tulokseen, jonka mukaan $x \cdot 0 = 0$ kaikille reaaliluvuille x .

Osoitetaan tämän jälkeen, että vastaluku on aina yksikäsitteinen: Jos b_1 ja b_2 ovat kaksi luvun a vastalukua, on $a + b_1 = 0$ ja $a + b_2 = 0$ ja siis

$$b_1 = b_1 + 0 = b_1 + (a + b_2) = (b_1 + a) + b_2 = (a + b_1) + b_2 = 0 + b_2 = b_2.$$

Toinen tapa: Luennolla esitetyn perusteella erityisesti $0 \cdot (-1) = 0$ ja $1 \cdot 0 = 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0 = 1 + 0 \cdot (-1) = 1 + (1 + (-1))(-1) \\ &= 1 \cdot 1 + 1(-1) + (-1)(-1) = 1(1 + (-1)) + (-1)(-1) \\ &= 1 \cdot 0 + (-1)(-1) = (-1)(-1). \end{aligned}$$

b) $(-1)x + x = (-1)x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0$, joten $(-1)x$ on luvun x vastaluku. Vastaluvun yksikäsitteisyyden perusteella $(-1)x = -x$.

c) Jos $x = 0$, on $x^2 = 0 \geq 0$. Jos taas $x > 0$, on $x^2 = x \cdot x > 0$. Jos taas $x < 0$, on $-x > 0$ ja $x^2 = (-1)(-1)x^2 = (-x)(-x) > 0$.

3. Käytä luennoilla esitettyjä määritelmiä ja merkintöjä ja osoita että kaava

$$((x \geq y) \wedge (z < 0)) \rightarrow (x \cdot z \leq y \cdot z)$$

seuraa reaalilukujen aksioomista.

Vastaus: Oletetaan, että $x \geq y$ ja $z < 0$. Tällöin $x - y \geq 0$ ja $-z > 0$, mistä seuraa että $yz - xz = -zx - z(-y) = -z(x - y) \geq 0$. Tämä merkitsee, että $yz \geq xz$, tai yhtäpitävästi $xz \leq yz$.

4. Selvitä ne x :n arvot joille epäyhtälöt

$$\text{a) } 2x^2 - 7 < x^2 - x - 1 \quad \text{ja} \quad \text{b) } |x + 2| \geq x + 1.$$

ovat tosia.

Vastaus: a) Vastaavan yhtälön juuret ovat 2 ja -3 . Epäyhtälö toteutuu, kun $-3 < x < 2$

b) Kun $x \geq -2$, epäyhtälö saa muodon $x + 2 \geq x + 1$; tämä toteutuu kaikilla $x \geq -2$, koska $2 \geq 1$. Kun $x < -2$, epäyhtälö saa muodon $-x - 2 \geq x + 1$ eli $2x \leq -3$; tämä toteutuu, kun $x \leq -\frac{3}{2}$ eli kaikilla $x < -2$. Vastaus: Epäyhtälö toteutuu kaikilla x :n arvoilla.

5. Selvitä $\operatorname{Re}\left(\frac{6+5i}{3-2i}\right)$ ja $\left|\frac{2+i}{1-i}\right|$.

Vastaus:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{6+5i}{3-2i}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(6+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{8+27i}{13}\right) = \frac{8}{13}.$$

ja

$$\left|\frac{2+i}{1-i}\right| = \frac{|2+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

6. Etsi kaksi lukua joiden summa ja tulo on yksi.

Vastaus: Merkitään näitä lukuja x :llä ja y :llä, jolloin saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ xy &= 1 \end{cases}.$$

Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan $y = \frac{1}{x}$ ja sijoittamalla tämä ensimmäiseen $x + \frac{1}{x} = 1$ ja edelleen x :llä kertomalla $x^2 - x + 1 = 0$. Tämän ratkaisut ovat $x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Vastaavat y :n arvot ovat $y = \frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2}$

7. Määritelmän perusteella $i^2 = -1$. Tällöin voisi ajatella että merkittäisiin $i = \sqrt{-1}$ ja pääteltäisiin seuraavasti:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = -1.$$

Mitä heikkouksia voit osoittaa tästä päättelystä?

Vastaus: Ensinnäkin $\sqrt{-1}$ ei välttämättä ole suoraviivaisesti määriteltävissä imaginaariyksiköksi; sillä myös $(-i)^2 = -1$. Koska määritelmä itsessään sisältää perustavan ongelman, on kyseenalaista pitääkö $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}$ paikkansa.

8. Esitä summa

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{225}$$

käyttämällä Σ -merkintää.

Vastaus:

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k^2}$$