

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 4, 6.10.2017

1. (Tuplapistetehtävä) Valmista **korkeintaan 10 min.** esitys aiheesta ”Relaatio” seuraavien ohjeiden mukaan: Kerro yleisölle mitä tarkoittaa **karteellinen tulo** ja miten käsite **relaatio** määritellään matemaattisesti.

Valitse kaksi äärellistä joukkoa A ja B sekä jokin relaatio joukosta A joukkoon B . Esitä valitsemasi relaatio kuvana AB -tasossa (pikseli- tai pistekuvio), järjestettyjen parien joukkona, sekä nuolikaavioesityksenä. Kerro mitä tarkoittaa **määrittelyjoukko** ja **arvojoukko**. Älä valitse esimerkkirelaatioksi jotain luennolla tai luentomonisteissa esitettyä.

2. Olkoon $R = \{(t - t^2, t) \mid t \in [0, 1]\}$. Hahmottele R :n kuva xy -tasoon.
 - a) Onko R joukon $[0, 1] \times [0, 1]$ osajoukkona funktio?
 - b) Anna esimerkki sellaisista joukoista $A, B \subseteq [0, 1]$, että $R : A \rightarrow B$ on funktio.

3. Olkoon $\sqrt{} \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ relaatio

$$\sqrt{} = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid z = w^2\}.$$

Onko relaatio $\sqrt{}$ funktio? Mitkä seuraavista merkinnöistä ovat oikein?

- a) $\sqrt{}(1) = 1$ b) $-1 \xrightarrow{\sqrt{}} 1$, c) $-1\sqrt{i}$, d) $\sqrt{}(1, -1)$

4. Määritellään luonnollisten lukujen joukossa $\mathbb{N}$ tai kokonaislukujen $\mathbb{Z}$ joukossa binäärinen relaatio, ns. **jaollisuusrelaatio** $a \mid b$ (luetaan a jakaa b :n) seuraavasti: $a \mid b \Leftrightarrow (\exists c)(b = a \cdot c)$. Huomaa, että myös c :n tulee sisältyä tulkintajoukkoon (joka voi olla $\mathbb{N}$ tai $\mathbb{Z}$). Selvitä ovatko seuraavat totta: a) $0 \mid 1$, b) $1 \mid 0$, c) $2 \mid 1$, d) $1 \mid 2$, e) $-1 \mid 1$, f) $-2 \mid 1$, g) $-2 \mid 2$

Seuraavia tehtäviä varten otetaan käyttöön ns. *potenssijoukon* käsite:

Olkoon A mikä hyvänsä joukko. Merkitään $2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$. Joukkoa 2^A kutsutaan A :n potenssijoukoksi, ja määritelmän mukaan se siis koostuu kaikista A :n osajoukoista.

5. Muodosta 2^A , kun $A = \{a, b, c\}$. Huomaa, että tyhjä joukko sisältyy osajoukkona *kaikkiin* joukkoihin.
6. Jos A on äärellinen joukko, todista että $|2^A| = 2^{|A|}$, missä $|A|$ tarkoittaa joukon A alkioden lukumäärää.

Ohje: Jos $|A| = n$, on mahdollista laskea osajoukkojen määrä esim. selvittämällä kuinka monta nollan, yhden, kahden, kolmen jne. alkion osajoukkoa on olemassa ja laskemalla näiden määrä yhteen. Toinen mahdollisuus on käyttää induktiota.

7. Olkoon A mikä hyvänsä joukko. Esitä jokin injektio $A \rightarrow 2^A$.
8. (Tuplapistetehtävä) Todista, että bijektio $f : A \rightarrow 2^A$ ei ole olemassa millekään joukolle A .

Ohje: Tee vastaoletus, jonka mukaan tällainen bijektio $f : A \rightarrow 2^A$ olisi olemassa. Tällöin voitaisiin määritellä $B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$ ja olisi myös alkio $b \in A$ jolle $f(b) = B$. Mieti mikä ongelma tässä kuitenkin piilee.