

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 5, 13.10.2017

1. Olkoon $x^2 + 4y^2 = 1$ tason $\mathbb{R}^2$ relaation esitys implisiittimuodossa. Hahmottele kuvaaja ja mieti miten lähtö- ja maalijoukkoa pitäisi leikata jotta saataisiin aikaan funktio. Minkälainen voisi olla näin saatavan funktion eksplisiittimuoto? Minkälainen voisi olla relaation parametrimuoto? Ohje: Voit soveltaa yksiköympyrän tunnettuja esitysmuotoja.
2. Shakkilauta on neliön muotoinen 8×8 -ruudukko. Tarinan mukaan ruhtinas lupasi shakkipelin keksijälle haluamansa palkkion, ja pyyntö oli: 1 riisinjyvä shakkilaudan ensimmäiseen ruutuun, 2 toiseen, 4 kolmanteen, 8 neljänteen, 16, viidenteen, jne., seuraavaan ruutuun aina kaksinkertainen määrä jyviä edelliseen ruutuun verrattuna.

Esitä yleinen lauseke a) jyvien määrälle ruudussa numero k ja b) jyvien yhteismäärälle alkaen ensimmäisestä ruutuun k asti. Ohje: Geometrinen summa on esiintynyt luennolla.
3. Oletetaan yhden riisinjyvän painoksi 50 mg ja koko maapallon vuotuiseksi riisintuotannoksi 500 miljoonaa tonnia. Kuinka monta shakkilaudan ruutua pitäisi peittää edellisessä tehtävässä mainitulla tavalla, jotta riisinjyvien yhteenlaskettu määrä vastaisi koko maapallon vuosittaista tuotantoa?
4. Selvitä yksityiskohtaisesti miten eksponenttifunktion ominaisuudesta $a^{x+y} = a^x a^y$ seuraa logaritmifunktion ominaisuus $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
5. Selvitä arvot $\cos \frac{\pi}{3}$ ja $\sin \frac{\pi}{3}$ seuraavasti: Piirrä $\frac{\pi}{3}$ -suuruinen kulma yksikköympyrän sisään siten, että kärki on origossa ja oikea kylki yhtyy positiiviseen x -akseliin. Piirrä tämän jälkeen kulman vasemman kyljen ja yksikköympyrän leikkauspisteestä (kehäpisteestä) jana pisteeseen $(1, 0)$ ja tarkastele näin saatua kolmiota, jonka kantana toimii positiivisen x -akselin osa $[0, 1]$. Tee johtopäätökset kehäpisteen koordinaateista käyttämällä klassista geometriaa (=tässä tapauksessa lukion oppimäärä) sekä yksikköympyrän yhtälöä $x^2 + y^2 = 1$.
6. Selvitä yhtälön $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$ kaikki ratkaisut.

Ohje: $x = 3x - 2x$, $5x = 3x + 2x$, käytä trigonometristen funktioiden summa-kaavoja.
7. Selvitä seuraavien pisteiden esitys napakoordinaatistossa (etäisyys origosta ja vaihekulmat):

a) $(1, \sqrt{3})$, b) $(1, -\sqrt{3})$, c) $(-1, \sqrt{3})$, d) $(-1, -\sqrt{3})$