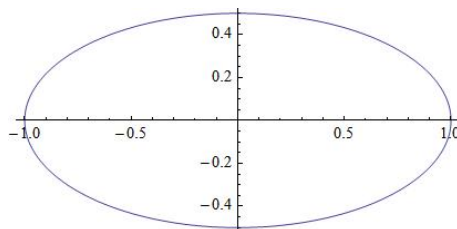


Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 5, 13.10.2017

1. Olkoon $x^2 + 4y^2 = 1$ tason $\mathbb{R}^2$ relaation esitys implisiittimuodossa. Hahmottele kuvaaja ja mieti miten lähtö- ja maalijoukkoa pitäisi leikata jotta saataisiin aikaan funktio. Minkälainen voisi olla näin saatavan funktion eksplisiittimuoto? Minkälainen voisi olla relaation parametrimuoto? Ohje: Voit soveltaa yksikköympyrän tunnettuja esitysmuotoja.

Vastaus: Jos sijoitetaan $x_1 = x$ ja $y_1 = 2y$, saadaan yksikköympyrän yhtälö $x_1^2 + y_1^2 = 1$, joten parametrimuodoksi voidaan valita $x_1 = \cos t$, $y_1 = \sin t$, toisin sanoen, $x = \cos t$, $y = \frac{1}{2} \sin t$. Kuvaaja:



Jos lähtöjoukoksi valitaan $[-1, 1]$ ja maalijoukoksi $[0, \infty)$ saadaan funktio, jonka eksplisiittimuoto on $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$.

2. Shakkilauta on neliön muotoinen 8×8 -ruudukko. Tarinan mukaan ruhtinas lupasi shakkipelin keksijälle haluamansa palkkion, ja pyyntö oli: 1 riisinjyvä shakkilaudan ensimmäiseen ruutuun, 2 toiseen, 4 kolmanteen, 8 neljänteen, 16, viidenteen, jne., seuraavaan ruutuun aina kaksinkertainen määrä jyviä edelliseen ruutuun verrattuna.

Esitä yleinen lauseke a) jyvien määrälle ruudussa numero k ja b) jyvien yhteismäärälle alkaen ensimmäisestä ruutuun k asti. Ohje: Geometrinen summa on esiintynyt luennolla.

Vastaus: Jyvien määrä ruudussa k on 2^{k-1} ja yhteismäärä ruudusta 1 ruutuun k asti on

$$\sum_{l=1}^k 2^{l-1} = \sum_{l=0}^{k-1} 2^l = 2^k - 1.$$

3. Oletetaan yhden riisinjyvän painoksi 50 mg ja koko maapallon vuotuiseksi riisintuotannoksi 500 miljoonaa tonnia. Kuinka monta shakkilaudan ruutua pitäisi peittää edellisessä tehtävässä mainitulla tavalla, jotta riisinjyvien yhteenlaskettu määrä vastaisi koko maapallon vuosittaista tuotantoa?

Vastaus: Edellisen tehtävän perusteella ruudusta 1 ruutuun k yhteenlaskettu riisinjyvien määrä on $2^k - 1$, joten pitää selvittää millä k :n arvolla olisi

$$\begin{aligned} (2^k - 1) \cdot 50 \text{ mg} &= 500 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \text{ kg} \Leftrightarrow 2^k - 1 = 10 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \\ \Leftrightarrow 2^k - 1 &= 10^{16} \Leftrightarrow k = \log_2(10^{16} + 1) = 53.1508 \dots \end{aligned}$$

Vastaus: Riittää peittää 54 ruutua.

4. Selvitä yksityiskohtaisesti miten eksponenttifunktion ominaisuudesta $a^{x+y} = a^x a^y$ seuraa logaritmifunktion ominaisuus $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

Vastaus: Tulo xy voidaan kirjoittaa kahdella eri tavalla: $xy = a^{\log_a(xy)}$ ja $xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$, siis $a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Koska eksponenttifunktio on injektio, on välttämättä $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

5. Selvitä arvot $\cos \frac{\pi}{3}$ ja $\sin \frac{\pi}{3}$ seuraavasti: Piirrä $\frac{\pi}{3}$ -suuruinen kulma yksikköympyrän sisään siten, että kärki on origossa ja oikea kylki yhtyy positiiviseen x -akseliin. Piirrä tämän jälkeen kulman vasemman kyljen ja yksikköympyrän leikkauspisteestä (kehäpisteestä) jana pisteeseen $(1, 0)$ ja tarkastele näin saatua kolmiota, jonka kantana toimii positiivisen x -akselin osa $[0, 1]$. Tee johtopäätökset kehäpisteen koordinaateista käyttämällä klassista geometriaa (=tässä tapauksessa lukion oppimäärä) sekä yksikköympyrän yhtälöä $x^2 + y^2 = 1$.

Vastaus: Koska tarkasteltava kolmio on tasakylkinen (kaksi ykkösen mittaista sivua origosta yksikköympyrän kehälle pisteisiin $(1, 0)$ ja A) ovat kantakulmat välttämättä yhtä suuret. Koska taas kolmion kulmien summa on π , ovat kantakulmat suuruudeltaan $\frac{\pi}{3}$, mistä seuraa että kolmio on itse asiassa tasasivuinen. Edelleen seuraa, että pisteestä A x -akselille piirretty kulman puolittaja kohtaa x -akselin kulmassa $\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$. Koska lisäksi kulman puolittaja jakaa vastaisen sivut viereisten suhteessa, voidaan päätellä, että pisteen A x -koordinaatti on $\frac{1}{2}$. Samaisen pisteen y -koordinaatti on $\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Näin ollen $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ja $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Selvitä yhtälön $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$ kaikki ratkaisut.

Ohje: $x = 3x - 2x$, $5x = 3x + 2x$, käytä trigonometristen funktioiden summa-kaavoja.

Vastaus: Trigonometristen funktioiden summa-kaavojen perusteella yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} \sin(3x - 2x) + \sin 3x + \sin(3x + 2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x + \sin 3x + \sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin 3x \cos 2x + \sin 3x + \sin 3x \cos 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 \cos 2x + 1) \sin 3x &= 0, \end{aligned}$$

jonka ratkaisut ovat $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ tai $\sin 3x = 0$. Ensimmäisen yhtälön ratkaisut ovat $2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot n$, missä $n \in \mathbb{Z}$, siis $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi \cdot n$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Toisen yhtälön ratkaisut taas ovat $3x = n\pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$, siis $x = \frac{\pi}{3}n$, missä $n \in \mathbb{Z}$. Koska myös ensimmäisen yhtälön ratkaisut ovat tätä muotoa, voidaan kaikki ratkaisut kirjoittaa muotoon $x = \frac{\pi}{3}n$, missä $n \in \mathbb{Z}$.

7. Selvitä seuraavien pisteiden esitys napakoordinaatistossa (etäisyys origosta ja vaihekulmat):

a) $(1, \sqrt{3})$, b) $(1, -\sqrt{3})$, c) $(-1, \sqrt{3})$, d) $(-1, -\sqrt{3})$

Vastaus: Jokaisen pisteen etäisyys origosta on $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

Vaihekulmat:

a) $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1}$. Koska pisteen x -koordinaatti on positiivinen (piste sijaitsee tason oikealla puolella), voidaan valita $\theta = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

b) $\tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1}$. Koska pisteen x -koordinaatti on positiivinen, voidaan valita $\theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$. Vaihtoehtoisesti vaihekulmaksi voidaan valita $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$.

c) $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1}$. Koska pisteen x -koordinaatti on negatiivinen (piste sijaitsee tason vasemmalla puolella), voidaan valita $\theta = \pi + \arctan(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

d) $\tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1}$. Koska pisteen x -koordinaatti on negatiivinen, voidaan valita $\theta = \pi + \arctan(\sqrt{3}) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.