

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 7, 3.11.2017

1. (Tuplapistetehtävä) Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ suppeneva lukujono jossa $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq 0$. Todista raja-arvon määritelmään perustuen, että 1) $A = \lim a_n \geq 0$ ja että 2) $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$. Ohje: Kohdassa 1) on mahdollista aloittaa vastaoletuksella, jonka mukaan olisi $A < 0$. Sen jälkeen on mahdollista valita raja-arvon määritelmässä $\epsilon = \frac{|A|}{2}$. Tästä näyttäisi seuraavan ristiriita, mikä ja miten? Esimerkistä 2.31 voi olla apua kohdassa 2).

2. Määritä (ei tarvitse esittää todistusta) raja-arvo

$$\lim \frac{5n^3 - 3n + 2}{7n^3 - 1}$$

ja perustele se oikeaksi kun tiedetään että $\lim \frac{1}{n} = 0$, $\lim c = c$ ja tunnetaan summia, tuloja, ja osamääriä koskevat raja-arvotulokset.

3. Todista raja-arvo

$$\lim \frac{5n^3 - 3n + 2}{7n^3 - 1} = \frac{5}{7}$$

oikeaksi määritelmään perustuen. Etsi lisäksi jokin sellainen luku $N_{\frac{1}{1000}}$, että $d(a_n, \frac{5}{7}) < \frac{1}{1000}$, kunhan $n \geq N_{\frac{1}{1000}}$.

4. Määritä raja-arvo

$$\lim \frac{2e^n + e2^n}{\cosh(n+1)}.$$

5. Määritä raja-arvo

$$\lim(\sqrt{4n^2 - n} - 2n).$$

Ohje: Esimerkin 2.31 mukainen laventaminen saattaa edistää asiaa.

6. Määritä raja-arvo

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

7. Määritä raja-arvo

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$