

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 7, 3.11.2017

1. (Tuplapistetehtävä) Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ suppeneva lukujono jossa $a_n \geq 0$ jostakin rajasta $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ alkaen. Todista raja-arvon määritelmään perustuen, että 1) $A = \lim a_n \geq 0$ ja että 2) $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$. Ohje: Kohdassa 1) on mahdollista aloittaa vastaaoletuksella, jonka mukaan raja-arvo $A < 0$. Lisäksi on mahdollista valita $\epsilon = \frac{|A|}{2}$. Tästä näyttäisi seuraavan ristiriita, mikä ja miten? Esimerkistä 2.31 voi olla apua kohdassa 2).

Vastaus: Todistetaan ensin, että $A \geq 0$. Tehdään vasta oletus, jonka mukaan $A < 0$ ja valitaan $\epsilon = -\frac{A}{2}$. Raja-arvon määritelmän mukaan $d(a_n, A) < \epsilon$, kun n on riittävän suuri. Tämä epäyhtälö voidaan kuitenkin kirjoittaa ekvivalenttiin muotoon seuraavasti:

$$d(a_n, A) < \epsilon \Leftrightarrow |a_n - A| < -\frac{A}{2} \Rightarrow a_n - A < -\frac{A}{2} \Rightarrow a_n < \frac{A}{2}.$$

Tämä on ristiriita, koska oletuksen mukaan $a_n \geq 0$.

Oletetaan ensin, että $A = 0$. Tällöin $d(a_n, 0) = a_n < \epsilon^2$, kun $n > N_{\epsilon^2}$, ja näin ollen $d(\sqrt{a_n}, 0) = \sqrt{a_n} < \epsilon$, kun $n > N_{\epsilon^2}$.

Oletetaan sitten, että $A > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(\sqrt{a_n}, \sqrt{A}) &= \left| \sqrt{a_n} - \sqrt{A} \right| = \left| \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{A})(\sqrt{a_n} + \sqrt{A})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} \right| = \frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} \\ &\leq \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{A}} d(a_n, A). \end{aligned}$$

Koska $\lim a_n = A$, on $d(a_n, A) < \sqrt{A}\epsilon$, kunhan $n > N$. Tällöin on myös

$$d(\sqrt{a_n}, \sqrt{A}) \leq \frac{1}{\sqrt{A}} d(a_n, A) < \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot \sqrt{A}\epsilon = \epsilon.$$

2. Määritä raja-arvo

$$\lim \frac{5n^3 - 3n + 2}{7n^3 - 1}$$

ja perustele se oikeaksi kun tiedetään että $\lim \frac{1}{n} = 0$, $\lim c = c$ ja tunnetaan summia, tuloja, ja osamääriä koskevat raja-arvotulokset.

Vastaus:

$$\frac{5n^3 - 3n + 2}{7n^3 - 1} = \frac{5 - 3\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{7 - \frac{1}{n^3}}$$

Tuloa koskevan raja-arvotuloksen perusteella $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot 0$ ja samoin $\frac{1}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Tuloja, summia, ja osamääriä koskevien tulosten perusteella kysytty raja-arvo on siis

$$\frac{5 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{7 + (-1) \cdot 0} = \frac{5}{7}.$$

3. Todista raja-arvo

$$\lim \frac{5n^3 - 3n + 2}{7n^3 - 1} = \frac{5}{7}$$

oikeaksi määritelmään perustuen. Etsi lisäksi jokin sellainen luku $N_{\frac{1}{1000}}$, että $d(a_n, \frac{5}{7}) < \frac{1}{1000}$, kunhan $n \geq N_{\frac{1}{1000}}$. Vastaus:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{5n^3 - 3n + 2}{7n^3 - 1}, \frac{5}{7}\right) &= \left| \frac{5n^3 - 3n + 2}{7n^3 - 1} - \frac{5}{7} \right| = \left| \frac{7(5n^3 - 3n + 2) - 5(7n^3 - 1)}{7(7n^3 - 1)} \right| \\ &= \left| \frac{-21n + 19}{7(7n^3 - 1)} \right| = \frac{21n - 19}{7(7n^3 - 1)} < \frac{21n}{7 \cdot (7n^3 - n^3)} = \frac{1}{2n^2} < \epsilon, \end{aligned}$$

kunhan $n^2 > \frac{1}{2\epsilon}$, mikä puolestaan tapahtuu kun $n > \sqrt{\frac{1}{2\epsilon}}$.

Arvolla $\epsilon = \frac{1}{1000}$ tämä saa arvon $\sqrt{500} = 10\sqrt{5} = 22.360\dots$

Yllä itseisarvomerkkien poisto perustuu siihen, että $-21n + 19 < 0$ ja $7n^3 - 1 > 0$ kun $n \in \mathbb{N}$. Arvio puolestaan perustuu siihen, että $-19 < 0$ ja $1 \leq n \leq n^3$.

4. Määritä raja-arvo

$$\lim \frac{2e^n + e2^n}{\cosh(n+1)}$$

Vastaus:

$$\begin{aligned} \frac{2e^n + e2^n}{\cosh(n+1)} &= \frac{2e^n + e2^n}{\frac{1}{2}(e^{n+1} + e^{-n-1})} = \frac{4e^n + 2e2^n}{e \cdot e^n + e^{-1}e^{-n}} \\ &= \frac{4 + 2e(\frac{2}{e})^n}{e + e^{-1}(e^{-2})^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{e}. \end{aligned}$$

5. Määritä raja-arvo

$$\lim(\sqrt{4n^2 - n} - 2n)$$

Ohje: Esimerkin 2.31 mukainen laventaminen saattaa edistää asiaa.

Vastaus:

$$\begin{aligned} \sqrt{4n^2 - n} - 2n &= \frac{(\sqrt{4n^2 - n} - 2n)(\sqrt{4n^2 - n} + 2n)}{\sqrt{4n^2 - n} + 2n} = \frac{4n^2 - n - 4n^2}{\sqrt{4n^2 - n} + 2n} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{4 - \frac{1}{n}} + 2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

6. Määritä raja-arvo

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Vastaus:

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sulkeiden sisällä oleva jono on tunnetun, lukua e kohti suppenevan jonon $(1 + \frac{1}{n})^n$ osajono, ja tällöin myös osajonon suppenee kohti lukua e . Tehtävän 1 perusteella vastaus on siis $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

7. Määritä raja-arvo

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Vastaus: Raja-arvo pysyy samana, mikäli tarkastellaan vain arvoja $n \geq 2$. Tällöin

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n\right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \cdot e^{-1} \end{aligned}$$