

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 8, 10.11.2017

Määritä seuraavat raja-arvot jos olemassa (edes äärettömänä) ja esitä lyhyt sanelin perustelu myös jos raja-arvoa ei ole olemassa.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + x)}{x}.$

Vastaus: Trigonometrisia summakaavoja käyttämällä saadaan

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} + x)}{x} = \frac{\cos \frac{\pi}{2} \cos x - \sin \frac{\pi}{2} \sin x}{x} = \frac{-\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x}.$

Vastaus: Laventamalla nähdään, että

$$\frac{\sqrt{9+x}-3}{x} = \frac{(\sqrt{9+x}-3)(\sqrt{9+x}+3)}{x(\sqrt{9+x}+3)} = \frac{x}{x(\sqrt{9+x}+3)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}.$$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}.$

Vastaus: Laventamalla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2} &= \frac{(\sqrt{x^2+12}-4)(\sqrt{x^2+12}+4)}{(x-2)(\sqrt{x^2+12}+4)} = \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+12}+4)} \\ &= \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+12}+4)} \xrightarrow{x \rightarrow 2} \frac{4}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} \right).$

Vastaus:

$$\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2(x-1) - x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2x^2}{x^2-1} = \frac{-2}{1-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -2.$$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x.$

Vastaus: Ei raja-arvoa, koska x :n kasvaessa sinifunktion arvo oskilloi -1 :n ja 1 :n välillä, kun taas itseisarvo tulee miten suureksi hyvänsä. Esim. pisteissä $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $x \sin x$ saa arvon $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (voi tulla miten suureksi hyvänsä) ja pisteissä $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ arvon $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi n$ (voi tulla miten pieneksi hyvänsä).

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + x^{1000}}{e^x}.$

Vastaus

$$\frac{2^x + x^{1000}}{e^x} = \left(\frac{2}{e}\right)^x + \frac{x^{1000}}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

koska kantaluku $\frac{2}{e} < 1$ ja x^{1000} kasvaa polynomina hitaammin kuin eksponenttifunktio e^x .

7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4}.$

Vastaus:

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow 2} 0.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}.$$

Vastaus:

$$\frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2} \xrightarrow{x \rightarrow 2} \frac{1}{4}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^3}.$$

Vastaus:

$$\frac{2-x}{(x-2)^3} = -\frac{1}{(x-2)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 2} -\infty$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-4}. \text{ Vastaus:}$$

$$\frac{x-3}{x^2-4} = \frac{x-3}{x+2} \frac{1}{x-2}.$$

Kun x on lähellä lukua 2, on lauseke $\frac{x-3}{x+2}$ lähellä lukua $-\frac{1}{4}$ ja siksi termi $\frac{1}{x-2}$ määrittää lausekkeen käyttäytymisen kun $x \rightarrow 2$.

Raja-arvoa kun $x \rightarrow 2$ ei ole, sillä arvoilla $x > 2$ funktion arvot tulevat miten pieniksi hyvänsä, ja kun taas $x < 2$, saadaan miten suuria arvoja hyvänsä.

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-3x+2}. \text{ Ohje: Nimittäjän voi jakaa tekijöihin.}$$

Vastaus:

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} \frac{1}{x-1},$$

jossa $\frac{1}{x-2}$ on lähellä arvoa -1 kun x on lähellä arvoa 1. Näin ollen termi $\frac{1}{x-1}$ määrittää lausekkeen käyttäytymisen kun $x \rightarrow 1$

Raja-arvoa kun $x \rightarrow 1$ ei ole, sillä arvoilla $x > 1$ funktion arvot tulevat miten pieniksi hyvänsä, ja kun taas $x < 1$, saadaan miten suuria arvoja hyvänsä.

$$12. \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{x^2-3x+2}. \text{ Vastaus:}$$

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} \frac{1}{x-2},$$

jossa $\frac{1}{x-1}$ on lähellä arvoa 1 kun x on lähellä arvoa 2. Näin ollen termi $\frac{1}{x-2}$ määrittää lausekkeen käyttäytymisen kun $x \rightarrow 2$, ja

$$\frac{1}{x-2} \xrightarrow{x \rightarrow 2+} \infty.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}. \text{ Ohje: Jos merkitään } y = \frac{1}{x}, \text{ miten } y \text{ käyttäytyy kun } x \rightarrow \infty?$$

Vastaus: Tällöin $y \rightarrow 0+$ ja siis

$$x \sin \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \sin y = \frac{\sin y}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0+} 1.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}. \text{ Ohje: Mitä voidaan sanoa funktion } \sin \frac{1}{x} \text{ itseisarvon suuruudesta?}$$

Vastaus: $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ ja siksi

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2^x}$. Ohje: Miten logaritmi osamäärästä käyttäytyy kun $x \rightarrow \infty$?

Vastaus:

$$g(x) = \ln \frac{e^{\sqrt{x}}}{2^x} = \ln e^{\sqrt{x}} - \ln 2^x = \sqrt{x} - x \ln 2 = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x} \ln 2) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty,$$

joten

$$\frac{e^{\sqrt{x}}}{2^x} = e^{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

16. $\lim_{x \rightarrow 0+} x e^{\frac{1}{x^2}}$. Ohje: Jos merkitään $y = \frac{1}{x}$, miten y käyttäytyy kun $x \rightarrow 0+$?

Vastaus: Jos $x \rightarrow 0+$, on $y = \frac{1}{x} \rightarrow \infty$ ja

$$x e^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{y} e^{y^2} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \infty,$$

koska $e^{y^2} > e^y$ ja eksponentiaalinen kasvu e^y on voimakkaampaa kuin polynomaalinen y .

On myös mahdollista sijoittaa edelleen $z = y^2$ ja todeta, että

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} e^{y^2} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^z}{z^{\frac{1}{2}}} = \infty.$$

Huomautus: Tässä vaiheessa erityisesti trigonometrisia funktioita sisältävissä tehtävissä tulee välttää l'Hospitalin säännön käyttöä seuraavasta syystä: Trigonometrinen funktioiden derivaattafunktioiden määrittäminen vaatii tyypillisesti osamäärämuotoisen raja-arvon selvittämistä. Jos taas tällainen raja-arvo selvitetään käyttämällä derivaattafunktion määrittämistä, on mahdollista ajautua kehäpäättelyyn.