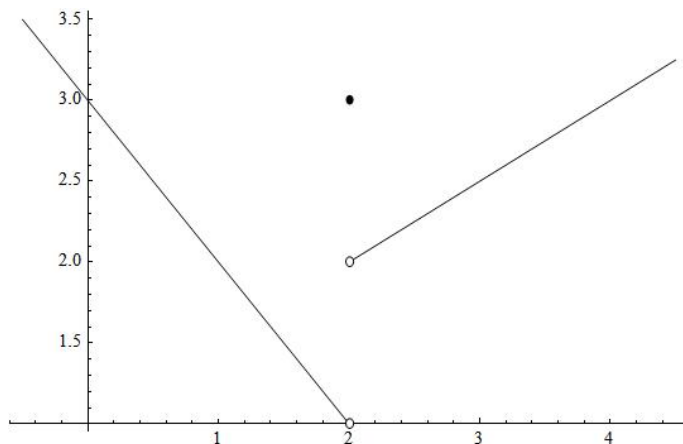


# Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

## Demonstraatio 9, 17.11.2017

1. Hahmottele funktion  $f(x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{kun } x < 2 \\ 3, & \text{kun } x = 2 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$  kuvaaja ja selvitä raja-arvot  $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$  ja  $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ . Onko funktio  $f$  jatkuva vasemmalta tai oikealta pisteessä  $x = 2$ ?

Vastaus:



$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (\frac{x}{2} + 1) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (3 - x) = 1$ . Koska  $f(2) = 3$ , ei funktio ole kummaltakaan puolelta jatkuva.

2. Mikä on funktion  $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$  määrittelyjoukko? Voidaanko  $f$  määritellä siihen kuulumattomissa pisteissä siten että siitä tulisi jatkuva?

Vastaus:  $f$  on määritelty koko reaaliakselilla lukuunottamatta nimittäjän  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$  nollakohtia  $x = \pm 2$ . Koska  $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$ , voidaan todeta että

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2} \xrightarrow{x \rightarrow 2} \frac{5}{4}.$$

Näin ollen määrittelemällä  $f(2) = \frac{5}{4}$  saadaan  $f$  jatkuvaksi pisteessä  $x = 2$ .

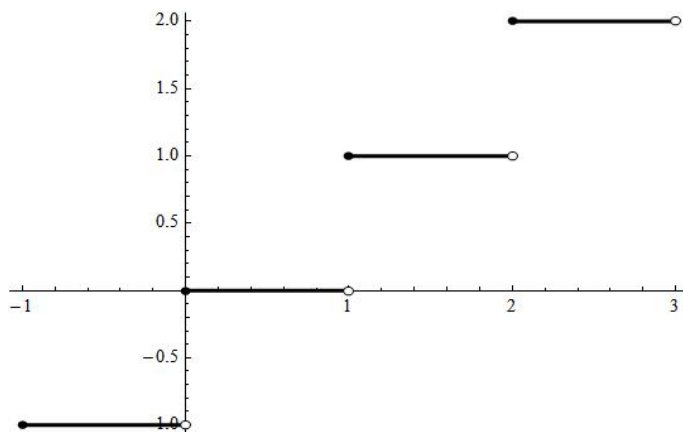
Toisaalta kun  $x \rightarrow -2$ , on lausekkeen

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2}$$

osoittaja lähellä lukua 1, ja kun  $x > -2$ , kasvaa lausekkeen arvo yli kaikkien rajojen kun  $x \rightarrow -2$ . Jos taas  $x < -2$ , laskee lausekkeen arvo alle kaikkien rajojen, kun  $x \rightarrow -2$ . Näin ollen funktiolla  $f(x)$  ei ole raja-arvoa kun  $x \rightarrow -2$ , joten funktiota ei voida määritellä pisteessä  $x = -2$  siten että se olisi jatkuva.

3. Määritellään ns. *lattiafunktio* seuraavasti:  $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ . Hahmottele funktion  $f(x) = \lfloor x \rfloor$  kuvaajaa ja selvitä raja-arvot  $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$  ja  $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$ . Mitkä ovat funktion  $f$  epäjatkuvuuspisteet? Onko  $f$  vasemmalta tai oikealta jatkuva epäjatkuvuuspisteissä?

Vastaus:



Vastaus: Valitaan  $x < 2$  kuitenkin niin läheltä lukua 2, että  $x > 1\frac{1}{2}$ . Tällöin nähdään, että

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} 1 = 1.$$

Jos taas valitaan  $x > 2$  niin läheltä lukua 2, että  $x < 2\frac{1}{2}$ , on

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} 2 = 2.$$

Funktion epäjatkuvuuspisteet ovat täsmälleen kaikki luvut  $x \in \mathbb{Z}$ , funktio on jokaisessa epäjatkuvuuspisteessä oikealta jatkuva mutta vasemmalta epäjatkuva.

4. Olkoot  $a$  ja  $b \in \mathbb{R}$  sekä  $f(x) = (x-a)^5(x-b)^6 + x$ . Osoita, että välillä  $[a, b]$  on sellainen piste  $\xi$ , että  $f(\xi) = \frac{1}{2}(a+b)$ .

Vastaus: Polynomifunktiona  $f$  on jatkuva, ja helposti nähdään että  $f(a) = a$ ,  $f(b) = b$ . Jatkuvien funktioiden väliarvolauseen mukaan  $f$  saa kaikki arvot  $a$ :n ja  $b$ :n välillä. Koska näihin lukeutuu  $\frac{a+b}{2}$ , on väite tosi.

5. Osoita että yhtälöllä  $x = \cos x$  on ainakin yksi reaalinen ratkaisu. Etsi jokin likiarvo ratkaisulle.

Vastaus: Merkitään  $f(x) = x - \cos x$ , jolloin  $f$  on jatkuva,  $f(0) = -1 < 0$ ,  $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 0 > 0$ . Bolzanon lauseen perusteella välillä  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Kumpi tahansa päätepisteistä kelpaa likiarvoksi nollakohdalle. Tarkempi likiarvo  $x = 0.73 \dots$  voidaan löytää ns. haarukointimenetelmällä,

6. Oletetaan, että  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  on jatkuva funktio. Osoita että on olemassa sellainen piste  $\xi \in [0, 1]$  että  $f(\xi) = \xi$ .

Vastaus: Määritellään apufunktio  $g(x) = f(x) - x$ , jolloin myös  $g$  on jatkuva ja  $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$  sekä  $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ . Jos  $f(0) = 0$  tai  $f(1) = 1$ , on haluttu piste  $\xi$  löydetty. Jos kumpikaan yhtäsuuruuksista ei toteudu, on  $f(0) > 0$  ja  $f(1) < 1$ , mistä seuraa että  $g(0) > 0$  ja  $g(1) < 0$ , ja tällöin voidaan käyttää Bolzanon lausetta, jonka mukaan on olemassa sellainen  $\xi \in (0, 1)$ , että  $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi$ .

7. Olkoon  $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$  reaalikertoiminen polynomi, jossa  $n$  on pariton. Osoita että polynomilla  $p(x)$  on ainakin yksi reaalinen nollakohta

Vastaus: Jos  $n$  on pariton, voidaan helposti nähdä että  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$  ja  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ . Koska lisäksi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{c_0}{x^n} + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_2}{x^{n-2}} + \dots + c_n \right) x^n = c_n \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x^n.$$

Analogisesti voidaan todeta että

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n) = c_n \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n.$$

Jos siis  $c_n > 0$ , on  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$  ja  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ . Jos taas  $c_n < 0$ , on  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = -\infty$  ja  $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \infty$ .

Kummassakin tapauksessa voidaan todeta että polynomi saa negatiivisen arvon jossain pisteessä  $c_1$  ja positiivisen arvon jossain pisteessä  $c_2$ . Tällöin Bolzanon lauseen perusteella polynomilla on nollakohta välillä  $[c_1, c_2]$ .

8. Olkoon  $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$  on reaalikertoiminen polynomi, jossa  $c_0c_n < 0$ . Osoita, että polynomilla  $p(x)$  on ainakin yksi reaalinen nollakohta.

Vastaus: Oletetaan ensin, että  $c_0 < 0$  ja  $c_n > 0$ . Tällöin  $p(0) = c_0 < 0$  ja  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$ , joten jatkuva funktio  $p(x)$  saa negatiivisia ja positiivisia arvoja. Bolzanon lauseen perusteella  $p(x)$  saa myös nollan arvokseen.

Oletetaan sitten, että  $c_0 > 0$  ja  $c_n < 0$ . Tällöin  $p(0) > 0$  ja  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = -\infty$ .

Näin ollen jatkuva funktio  $p(x)$  saa positiivisia ja negatiivisia arvoja, joten väittämä seuraa Bolzanon lauseesta.