

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 10, 24.11.2017

1. Määritellään kahden muuttujan funktio seuraavasti:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Selvitä lähestyvätkö funktion arvot jotain lukua, kun (x, y) lähestyy origoa pitkin suoria $y = kx$ ($k \in \mathbb{R}$) tai pitkin suoraa $x = 0$. Selvitä lisäksi miten funktion arvot käyttäytyvät kun (x, y) lähestyy origoa pitkin paraabelia $y = kx^2$ ($k \in \mathbb{R}$). Mitä voidaan havaintojen perusteella sanoa raja-arvosta

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)?$$

2. Määritä

$$\frac{d}{dx} \tan\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

3. Määritä

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^4}.$$

4. Määritä

$$\frac{d}{dx} \frac{\cos x}{\sin(x^2) + x^2}$$

5. Olkoon $x > 0$. Selvitä $\frac{d}{dx} \sqrt{x}$ derivaatan määritelmään perustuen laskemalla raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

6. Määritellään funktio f seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{jos } x \neq 1, \\ 2, & \text{jos } x = 1. \end{cases}$$

ja määritetään derivaattafunktio seuraavasti:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx} 2x = 2, & \text{jos } x \neq 1 \text{ (1. asteen polynomi),} \\ \frac{d}{dx} 2 = 0, & \text{jos } x = 1 \text{ (vakio).} \end{cases}$$

Tuliko derivaattafunktio määritettyä oikein? Jos ei, mikä meni väärin? Ohje: hahmottele funktion f kuvaaja ja selvitä olisiko f :lle yksinkertaisempaa esitysasua.

7. Demotehtävän VIII/14 mukaan funktio $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ voidaan määritellä myös origossa jatkuvaksi jos asetetaan $f(0) = 0$. Missä näin saatu funktio on derivoituva? Määritä derivaattafunktio siellä missä se on olemassa.
8. Olkoon $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ kun $x \neq 0$. Laajenna f pisteeseen $x = 0$ siten että siitä tulee jatkuva. Määritä tämän jälkeen $f'(x)$ kaikkialla missä se on olemassa.