

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 10, 24.11.2017

1. Määritellään kahden muuttujan funktio seuraavasti:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Selvitä lähestyvätkö funktion arvot jotain lukua, kun (x, y) lähestyy origoa pitkin suoria $y = kx$ ($k \in \mathbb{R}$) tai pitkin suoraa $x = 0$. Selvitä lisäksi miten funktion arvot käyttäytyvät kun (x, y) lähestyy origoa pitkin paraabelia $y = kx^2$ ($k \in \mathbb{R}$). Mitä voidaan havaintojen perusteella sanoa raja-arvosta

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)?$$

Vastaus: Jos $k \neq 0$, $y = kx$ ja $x \neq 0$, on

$$f(x, kx) = \frac{x^2 \cdot kx}{x^4 + (kx)^2} = \frac{kx}{x^2 + k^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Jos taas $k = 0$, ja $x \neq 0$, on

$$f(x, 0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Jos sitten $x = 0$ ja $y \neq 0$, on

$$f(0, y) = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0.$$

Johtopäätös: $f(x, y) \rightarrow 0$ aina kun (x, y) lähestyy origoa jotain suoraa pitkin.

Jos toisaalta $y = kx^2$, on

$$f(x, kx^2) = \frac{x^2 \cdot kx^2}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Täten siis esim. paraabelilla $y = x^2$ funktion arvo on $\frac{1}{2}$ ja paraabelilla $y = -x^2$ arvo on $-\frac{1}{2}$. Koska kummankin paraabelin pisteitä on mielivaltaisen lähellä origoa, ei funktiolla voi olla raja-arvoa, kun $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

2. Määritä

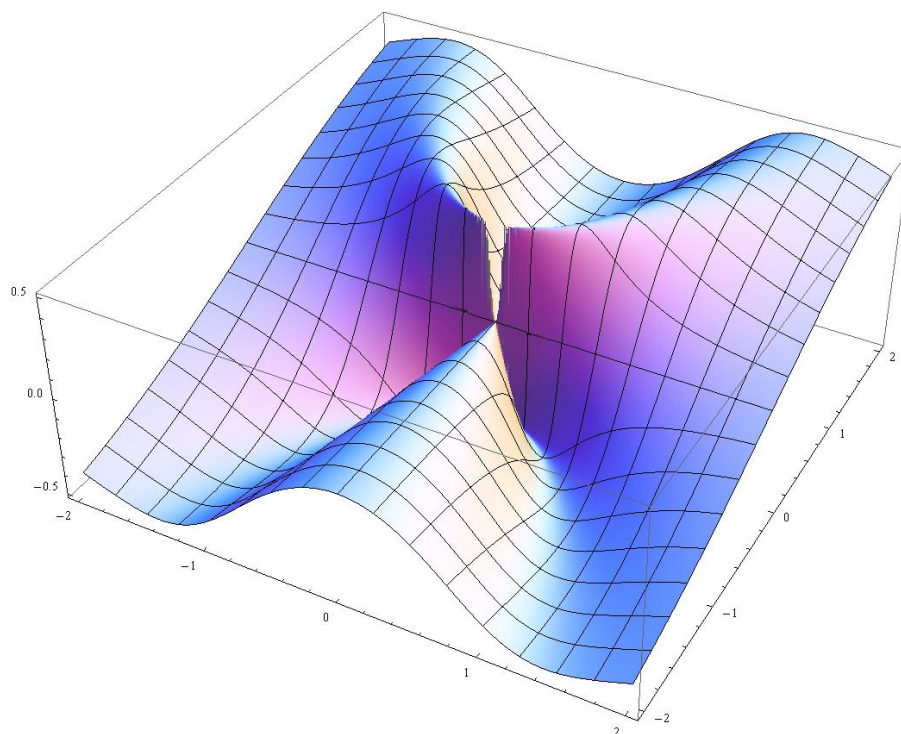
$$\frac{d}{dx} \tan\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Vastaus: Ketjusäännön perusteella

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan\left(-\frac{x^2}{2}\right) &= (1 + \tan^2(-\frac{x^2}{2})) \frac{d}{dx}(-\frac{x^2}{2}) = (1 + \tan^2(-\frac{x^2}{2}))(-x) \\ &= -x(1 + \tan^2 \frac{x^2}{2}). \end{aligned}$$

Toinen muoto:

$$-x \frac{1}{\cos^2 \frac{x^2}{2}} = -x \sec^2 \frac{x^2}{2}$$



Kuva 1: Funktion $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ kuvaaja

3. Määritä

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^4}.$$

Vastaus:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^4} = \frac{d}{dx} (x^2 + x + 1)^{-4} = -4(x^2 + x + 1)^{-5}(2x + 1) = -4 \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^5}.$$

4. Määritä

$$\frac{d}{dx} \frac{\cos x}{\sin(x^2) + x^2}$$

Vastaus:

$$\frac{d}{dx} \frac{\cos x}{\sin(x^2) + x^2} = \frac{-\sin x \cdot (\sin(x^2) + x^2) - \cos x \cdot (\cos(x^2) \cdot 2x + 2x)}{(\sin(x^2) + x^2)^2}.$$

5. Olkoon $x > 0$. Selvitä $\frac{d}{dx} \sqrt{x}$ derivaatan määritelmään perustuen laskemalla raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Vastaus:

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

6. Määritellään funktio f seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{jos } x \neq 1, \\ 2, & \text{jos } x = 1. \end{cases}$$

ja määritetään derivaattafunktio seuraavasti:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}2x = 2, & \text{jos } x \neq 1 \text{ (1. asteen polynomi)}, \\ \frac{d}{dx}2 = 0, & \text{jos } x = 1 \text{ (vakio)}. \end{cases}$$

Tuliko derivaattafunktio määritettyä oikein? Jos ei, mikä meni väärin? Ohje: hahmottele funktion f kuvaaja ja selvitä olisiko f :lle yksinkertaisempaa esitysasua.

Vastaus: Yksinkertaisempi esitys olisi $f(x) = 2x$ kaikille $x \in \mathbb{R}$ ja tällöin voidaan nähdä, että $f'(x) = 2$ koko reaaliakselilla. Yllä esitetty virheellinen määrittely pisteessä $x = 1$ johtuu siitä, että derivaatta, samoin kuin raja-arvokin, ei ole pisteittäinen käsite. Ei siis ole mahdollista määrittää raja-arvoa tai edelleen derivaatan arvoa jos funktion arvo on tiedossa vain jossakin yksittäisessä pisteessä.

7. Demotehtävän VIII/14 mukaan funktio $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ voidaan määritellä myös origossa jatkuvaksi jos asetetaan $f(0) = 0$. Missä näin saatu funktio on derivoituva? Määritä derivaattafunktio siellä missä se on olemassa.

Vastaus: Jos $x \neq 0$, on

$$\frac{d}{dx}(x \sin \frac{1}{x}) = 1 \cdot \sin \frac{1}{x} + x(-\cos \frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}.$$

Derivoituvuus pisteessä $x = 0$ pitää tarkastella erikseen:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h} \cdot h \sin \frac{1}{h} = \sin \frac{1}{h}.$$

Luentoimerkin perusteella raja-arvoa $\lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$ ei ole olemassa, joten funktio on derivoituva kaikkialla muualla paitsi origossa.

8. Olkoon $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ kun $x \neq 0$. Laajenna f pisteeseen $x = 0$ siten että siitä tulee jatkuva. Määritä tämän jälkeen $f'(x)$ kaikkialla missä se on olemassa.

Vastaus: Demotehtävästä VIII/14 seuraa, että

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Näin ollen on määriteltävä $f(0) = 0$, ja tällöin

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Jos taas $x \neq 0$, on

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2}) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$