

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 11, 1.12.2017

1. Olkoon $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Osoita, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on bijektio ja määritä $\frac{d}{dx}f^{-1}(5)$.

Vastaus: $f'(x) = 3x^2 + 3 \geq 3$, joten f on kasvava funktio ja näin ollen injektio. Lisäksi $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, joten f saa miten tahansa suuria ja pieniä arvoja. Lisäksi jatkuvana funktiona f saa kaikki arvot kahden saavuttamansa arvon välissä, joten f on surjektio.

$$5 = f(x) \Leftrightarrow 5 = x^3 + 3x + 1 \Leftrightarrow x = 1,$$

joten

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 3} = \frac{1}{6}.$$

2. Oletetaan että $x \geq 0$. Osoita että tällöin $\ln(1+x) \leq x$ ja $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$. Ohje: Katso Esimerkki 4.53.

Vastaus: Merkitään ensin $f(x) = \ln(1+x) - x$, ja osoitetaan, että $f(x) \leq 0$, kun $x \geq 0$. Nyt $f(0) = 0$ ja $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 \leq \frac{1}{1} - 1 = 0$ kun $x \geq 0$. Näin ollen f on vähenevä, kun $x \geq 0$ joten $f(x) \leq 0$ kun $x \geq 0$.

Merkitään sitten $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ ja osoitetaan, että $f(x) \geq 0$, kun $x \geq 0$. $f(0) = 0$ ja $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$, joten f on kasvava, kun $x \geq 0$. Näin ollen $f(x) \geq 0$ kun $x \geq 0$.

3. Putoavan meteoriitin nopeus on kääntäen verrannollinen sen etäisyyden neliöjuureen planeetan keskipisteestä, siis $v = -\frac{c_1}{\sqrt{s}}$, missä c_1 on vakio. Osoita, että tällöin meteoriitin kiihtyvyys on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön, siis $a = \frac{c_2}{s^2}$, missä c_2 on vakio. Ohje: $v = \frac{ds}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$. Käytä ketjusääntöä.

Vastaus:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}c_1 s^{-\frac{3}{2}}v = \frac{1}{2}c_1 s^{-\frac{3}{2}}(-c_1)s^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}c_1^2 s^{-2}.$$

4. Oletetaan, että jäätä muotoiltu pallo säilyttää muotonsa sulaessaan. Lisäksi oletetaan, että sulaessa pallon tilavuus pienenee nopeudella, joka on suoraan verrannollinen pallon pinta-alaan. Osoita, että tällöin pallon säde pienenee vakionopeudella.

Ohje: Selvitä aluksi millä operaatiolla pallon tilavuudesta $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ saadaan sen pinta-ala $A(r) = 4\pi r^2$. Esitä sitten tarvittavat suureet differentiaalilaskennan käsitteiden avulla.

Vastaus: $V'(r) = A(r)$, sulaessa $\frac{dV}{dt} = -kA$. Toisaalta.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt},$$

josta

$$-kA = A \cdot \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -k.$$

5. Kun ympyränmuotoista metallilevyä lämmitetään induktioliedellä, sen säde kasvaa 0.1 mm/min . Mikä on levyn pinta-alan kasvunopeus sillä hetkellä kun säde on 10 cm ?

Vastaus: Koska $A = \pi r^2$, on $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$ ja

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \frac{dr}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt},$$

josta

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{r=100} = 2\pi \cdot 100 \cdot 0.1 = 20\pi \approx 62.8 \quad (\text{mm}^2/\text{min}).$$

6. Ympyränmuotoisen kartongin säde on R . Kartongista leikataan pois α :n suurinen sektori, ja leikattu kartonki taivutetaan kartioksi. Millä kulman α arvolla saadaan suurin mahdollinen kartion tilavuus?

Vastaus: Kartion reunan pituudeksi jää $2\pi R - \alpha R$, jolloin sen pohjaympyrän säde on $r = (1 - \frac{\alpha}{2\pi})R$ ja korkeus saadaan yhtälöstä $h^2 + r^2 = R^2$, josta $h = \sqrt{R^2 - r^2}$. Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(R^2 h - h^3)$ ja näistä saadaan $\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi(R^2 - 3h^2)$, $\frac{dh}{dr} = \frac{-2r}{2\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{-r}{h}$ ja $\frac{dr}{d\alpha} = -\frac{R}{2\pi}$ ja

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\alpha} &= \frac{dV}{dh} \frac{dh}{d\alpha} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dr} \frac{dr}{d\alpha} = \frac{1}{3}\pi(R^2 - 3h^2) \left(\frac{-r}{h}\right) \left(\frac{-R}{2\pi}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow R^2 &= 3h^2 \Leftrightarrow R^2 = 3(R^2 - r^2) \Leftrightarrow 3r^2 = 2R^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}}R \\ \Leftrightarrow (1 - \frac{\alpha}{2\pi})R &= \sqrt{\frac{2}{3}}R \Leftrightarrow \alpha = 2\pi \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \end{aligned}$$

asteina $360 \cdot (1 - \sqrt{\frac{2}{3}}) \approx 66.061$.

7. Olkoon sylinterinmuotoisen säilyketölkkin tilavuus V . Miten tulee tölkin korkeus h suhteessa pohjan säteeseen r valita, jotta tölkin kokonaispinta-ala (vaippa ja päädyt) olisi mahdollisimman pieni?

Vastaus: $A = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h$ ja $V = \pi r^2 h$, joista

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0 \\ \Leftrightarrow 2V &= 4\pi r^3 \Leftrightarrow \pi r^2 h = 2\pi r^3 \Leftrightarrow h = 2r. \end{aligned}$$

8. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1 + x^2)}.$$

Vastaus:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1 + x^2)} \stackrel{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{2x}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2) \sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$$