

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 12, 8.12.2017

1. Valitse jokin alkuarvo x_0 ja määritä toistuvasti kosinifunktio: $x_{i+1} = \cos x_i$ kulman yksikkönä radiaani. Kuinka monta kertaa pitää kosinifunktio määrittää, että raja-arvoon $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ päästään neljän desimaalin tarkkuudella?
2. Valitse sopiva alkuarvo ja käytä Newtonin menetelmää funktion $f(x) = \cos x - x$ nollakohdan etsimiseksi. Kuinka monta iteraatiota tarvitaan, jotta nollakohta saadaan määritettyä kahdeksan desimaalin tarkkuudella?
3. Määritä funktion $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ lokaalit sekä globaalit ääriarvot ja käännepisteet.
4. Selvitä funktion $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$ asymptootit, lokaalit ääriarvot, ja käännepisteet.
5. Olkoon M vakio. Etsi mahdollisimman hyvä ensimmäisen asteen polynomifunktio, joka approksimoi funktiota $f(x) = \sqrt{M^2 + x}$, kun x on itseisarvoltaan pieni. Esitä tämän perusteella arvio luvulle $\sqrt{630} = \sqrt{625 + 5}$ käyttämättä laskinta.
6. Oletetaan, että funktiolla $f(x, y)$ on osittaisderivaatat sekä x :n että y :n suhteen. Napakoordinaattimuunnoksessa sijoitetaan $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Selvitä miten $\frac{\partial f}{\partial r}$ ja $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ voidaan esittää lausekkeina, joissa esiintyy $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$.
Ohje: Sovella ketjusääntöä $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$
7. Newtonin gravitaatiolain mukaan kahden kappaleen välillä vallitsee vetovoima joka on suoraan verrannollinen kappaleiden massoihin m ja M sekä kääntäen verrannollinen etäisyyden r neliöön:

$$F = G \frac{mM}{r^2},$$

missä verrannollisuuskertoimen G on ns. gravitaatiovakio. Käytä luennolla esitettyä (Luentoruudut 23, s. 10, monisteen s. 127) lineaarista approksimaatiota arvioidaksesi kuinka monta prosenttia maan vetovoima kiertoradalla 360 km korkeudella on maan pinnalla vallitsevasta vetovoimasta. Maan säteeksi arvioidaan 6400 km.

8. Löydöksen ikä (vuosina) ajoitetaan kaavalla $T(x) = -k \ln x$, missä $k = 8267$ ja $x = \frac{N}{N_0}$ on jäljellä olevien hiili-14 ytimien osuus. Esitä differentiaalilaskennan tarjoama lineaarinen arvio ajoitusvirheelle kun oikea arvo x on mitattu väärin arvoksi $x + \Delta x$. Kuinka suuri ajoitusvirhe arvion perusteella korkeintaan on, kun $|\Delta x| \leq 0,01$, jos $x = 0,70$? Entä jos $x = 0,30$?