

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 12, 8.12.2017

1. Valitse jokin alkuarvo x_0 ja määritä toistuvasti kosinifunktio: $x_{i+1} = \cos x_i$ kulman yksikkönä radiaani. Kuinka monta kertaa pitää kosinifunktio määrittää, että raja-arvoon $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ päästään neljän desimaalin tarkkuudella?

Vastaus: Esim. alkuarvosta $x_0 = 1$ saadaan jono $x_1 = \cos x_0 = 0.5403023\dots$, $x_2 = \cos x_1 = 0.8575532\dots$, $x_3 = \cos x_2 = 0.654289\dots$, jne. Jono suppenee kohti kosinifunktion kiintopistettä $x_f = 0.739085133215160\dots$, mutta vasta 21 iteraatiokierroksen jälkeen haluttu raja-arvo saadaan neljän desimaalin tarkkuudella.

Valittu alkuarvo vaikuttaa toki tarvittavien kierrosten määrään jonkin verran.

2. Valitse sopiva alkuarvo ja käytä Newtonin menetelmää funktion $f(x) = \cos x - x$ nollakohdan etsimiseksi. Kuinka monta iteraatiota tarvitaan, jotta nollakohta saadaan määritettyä kahdeksan desimaalin tarkkuudella?

Vastaus: Iteroitava funktio on tällöin

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\cos x - x}{-\sin x - 1}.$$

Esim. alkuarvosta $x_0 = 1$ lähtien saadaan $x_1 = g(x_0) = 0.750363867840243\dots$, $x_2 = g(x_1) = 0.7391128909113617\dots$, $x_3 = 0.739085133385284\dots$, $x_4 = 0.739085133215160\dots$, mistä nähdään, että jo kolmen iteraatiokierroksen jälkeen on saavutettu kahdeksan desimaalin tarkkuus.

3. Määritä funktion $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ lokaalit sekä globaalit ääriarvot ja käännepisteet.

Vastaus: $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 4x^2(x + \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{3}{2}$. Lisäksi $f''(x) = 12x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$.

Vastaus: Voidaan todeta, että $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$, joten kaavion

$f''(x)$	+	−	+	+
$f'(x)$	−	−	−	+
$f(x)$	↘	↘	↘	↗
	0	1	$\frac{3}{2}$	

perusteella $f(\frac{3}{2}) = -\frac{11}{16}$ on lokaali ja samalla globaali minimi. Muita lokaaleja ääriarvoja ei ole. Käännepisteet ovat $x = 0$ ja $x = 1$. Alueella $x < 0$ on f alaspäin kupera, välillä $(0, 1)$ ylöspäin kupera, ja kun $x > 1$, on f jälleen alaspäin kupera.

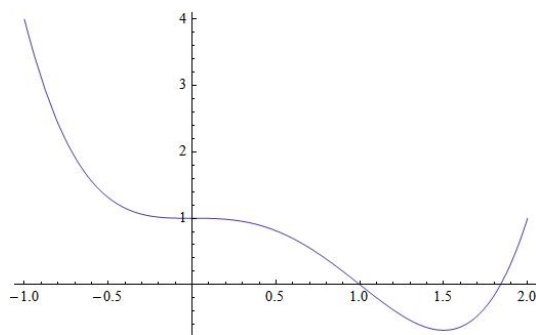
4. Selvitä funktion $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$ asymptootit, lokaalit ääriarvot, ja käännepisteet.

Vastaus: Jakokulmassa saadaan

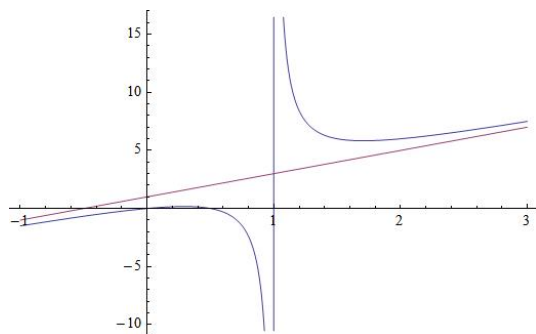
$$\frac{2x^2 - x}{x - 1} = 2x + 1 + \frac{1}{x - 1},$$

mistä nähdään, että $2x + 1$ on vino asymptootti. Lisäksi voidaan havaita, että

$\lim_{x \rightarrow 1+} = \infty$ ja $\lim_{x \rightarrow 1-} = -\infty$, joten $x = 1$ on pystysuora asymptootti.



Kuva 1: Funktion $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ kuvaaja



Kuva 2: Funktion $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$ kuvaaja

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

funktiot f , f' ja f'' eivät ole määritelty pisteessä $x = 1$, mutta merkkikaavio

$f''(x)$	-	-	+	+
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗
	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	

Edellämaitun perusteella globaalia maksimia tai minimiä ei ole, mutta lokaali maksimi on $f(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$ ja lokaali minimi $f(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 3 - 2\sqrt{2}$. Ainoa käännepiste on $x = 1$: arvoilla $x < 0$ f on ylöspäin kupera, arvoilla $x > 0$ alaspäin kupera.

5. Olkoon M vakio. Etsi mahdollisimman hyvä ensimmäisen asteen polynomi-funktio, joka approksimoi funktiota $f(x) = \sqrt{M^2 + x}$, kun x on itseisarvoltaan pieni. Esitä tämän perusteella arvio luvulle $\sqrt{630} = \sqrt{625 + 5}$ käyttämättä laskinta.

Vastaus: Derivoituvuuden määritelmän perusteella

$$\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0} \approx \frac{1}{2\sqrt{x_0}}h,$$

ja sijoittamalla $x_0 \leftarrow M^2$ sekä $h \leftarrow x$ saadaan

$$\sqrt{M^2 + x} \approx M + \frac{1}{2M}x.$$

Näin ollen

$$\sqrt{630} = \sqrt{25^2 + 5} \approx 25 + \frac{1}{2 \cdot 25} \cdot 5 = 25 + \frac{1}{10}.$$

Tarkempi likiarvo on $\sqrt{630} = 25,0998008 \dots$

6. Oletetaan, että funktiolla $f(x, y)$ on osittaisderivaatat sekä x :n että y :n suhteen. Napakoordinaattimuunnoksessa sijoitetaan $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Selvitä miten $\frac{\partial f}{\partial r}$ ja $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ voidaan esittää lausekkeina, joissa esiintyy $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Ohje: Sovella ketjusääntöä $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$.

Vastaus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Edelleen voidaan havaita että $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ja samoin $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

7. Newtonin gravitaatiolain mukaan kahden kappaleen välillä vallitsee vetovoima joka on suoraan verrannollinen kappaleiden massoihin m ja M sekä kääntäen verrannollinen etäisyyden r neliöön:

$$F = G \frac{mM}{r^2},$$

missä verrannollisuuskerroin G on ns. gravitaativakio. Käytä luennolla esitettyä (Luentoruudut 23, s. 10, monisteen s. 127) lineaarista approksimaatiota arvioidaksesi kuinka monta prosenttia maan vetovoima kiertoradalla 360 km korkeudella on maan pinnalla vallitsevasta vetovoimasta. Maan säteeksi arvioidaan 6400 km.

Vastaus: Prosentuaalinen vähennys maan vetovoimasta kiertoradalla on $\frac{F + \Delta F}{F} = 1 + \frac{\Delta F}{F}$, missä

$$\Delta F = F(r + \Delta r) - F(r) \approx F'(r) \Delta r = -2G \frac{mM}{r^3} \Delta r = -2F(r) \frac{\Delta r}{r},$$

siis

$$\frac{\Delta F}{F} = -2 \frac{\Delta r}{r} = -\frac{9}{80} = -0.1125$$

ja

$$1 + \frac{\Delta F}{F} = 1 - 0.1125 = 0.8875.$$

8. Löydöksen ikä (vuosina) ajoitetaan kaavalla $T(x) = -k \ln x$, missä $k = 8267$ ja $x = \frac{N}{N_0}$ on jäljellä olevien hiili-14 ytimien osuus. Esitä differentiaalilaskennan tarjoama lineaarinen arvio ajoitusvirheelle kun oikea arvo x on mitattu väärin arvoksi $x + \Delta x$. Kuinka suuri ajoitusvirhe arvion perusteella korkeintaan on, kun $|\Delta x| \leq 0,01$, jos $x = 0,70$? Entä jos $x = 0,30$?

Vastaus: Jos $x = 0,70$, on

$$\Delta T = T(x + \Delta x) - T(x) \approx T'(x)\Delta x = -\frac{k}{x}\Delta x \approx -11810 \cdot \Delta x$$

Tällöin

$$|\Delta T| \approx |-11810 \cdot \Delta x| = 11810 |\Delta x| \leq 11810 \cdot 0,01 = 118,1.$$

Jos taas $x = 0,30$, on vastaava arvio

$$|\Delta T| \approx |-27557 \cdot \Delta x| = 27557 |\Delta x| \leq 27557 \cdot 0,01 = 275,6$$