

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 13, 15.12.2017

1. Olkoon

$$\begin{cases} x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y &= \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

parametriesitys, jossa $t \in \mathbb{R}$. Hahmottele käyrää näkyviin ja osoita, että piste $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ kuuluu käyrälle. Etsi tähän pisteeseen asetetun tangentin yhtälö.

2. Olkoon $A = \{(2 \cos t - \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t) \mid t \in [0, 2\pi]\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Osoita että sopivasti pisteen $(\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$ ympäristöön rajoittautumalla A :sta saadaan derivoituva funktio f . Laske $f'(\sqrt{2})$.

3. Arkhimedeen spiraalin napakoordinaattiesitys on $r = \frac{\varphi}{\pi}$, missä $\varphi \in [0, \infty)$. Osoita, että piste $(x, y) = (\frac{7}{6}, \frac{7\sqrt{3}}{6})$ kuuluu käyrälle ja määritä tähän pisteeseen piirretyn tangentin yhtälö.

4. Selitä miksi yhtälö $e^{xy} \ln \frac{x}{y} = x + \frac{1}{y}$ määrittelee jossakin pisteen $(e, \frac{1}{e})$ ympäristössä derivoituvan funktion f . Laske $f'(e)$.

5. Esitä lauseke derivaatalle $\frac{dy}{dx}$, kun $y^2 = x^2 + \sin(xy)$.

6. Yhtälö $2x^3 - 3x^2y + 5y^3 = 9$ määrittelee tasokäyrän. Onko tällä käyrällä on yksikäsitteinen tangentti jokaisessa pisteessään?

Ohje: Jos käyrä määrittelee jonkin pisteensä ympäristössä derivoituvan funktion $y = f(x)$ tai $x = g(y)$, voidaan tangentti asettaa yksikäsitteisesti tällaiseen pisteeseen.

7. Tarkista kuuluuko piste $(2, 1)$ edellisen tehtävän käyrälle ja määritä $f'(2)$