

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

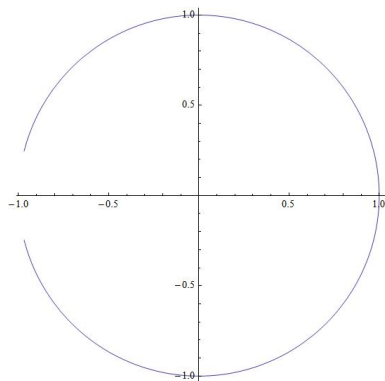
Demonstraatio 13, 15.12.2017

1. Olkoon

$$\begin{cases} x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y &= \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

parametriesitys, jossa $t \in \mathbb{R}$. Hahmottele käyrää näkyviin ja osoita, että piste $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ kuuluu käyrälle. Etsi tähän pisteeseen asetetun tangentin yhtälö.

Vastaus:



Kuva 1: Tehtävän 1 käyrä piirrettynä parametrivälillä $t \in [-8, 8]$

Piste $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ kuuluu käyrälle, mikäli yhtälöparilla

$$\begin{cases} \frac{1-t^2}{1+t^2} &= \frac{3}{5} \\ \frac{2t}{1+t^2} &= \frac{4}{5} \end{cases}$$

on ratkaisu. Yhtälöpari voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{cases} 8t^2 &= 2 \\ 2t^2 - 5t + 2 &= 0. \end{cases}$$

Ensimmäisen yhtälön ratkaisut ovat $t = \pm \frac{1}{2}$, joista vain $t = \frac{1}{2}$ toteuttaa toisen yhtälön. Näin ollen parametrin $t = \frac{1}{2}$ arvo tuottaa kysytyn pisteen.

Etsitään tangentin yhtälöä varten ensin kulmakerroin:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Suoraan laskemalla saadaan

$$x'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}, \quad y'(t) = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2},$$

josta

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2-2t^2}{-4t} = \frac{t^2-1}{2t}.$$

Arvolla $t = \frac{1}{2}$ tästä saadaan $-\frac{3}{4}$.

Tangentin yhtälö on siis $y - \frac{4}{5} = -\frac{3}{4}(x - \frac{3}{5})$, joka edelleen kirjoittaa muotoon $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

2. Olkoon $A = \{(2 \cos t - \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t) \mid t \in [0, 2\pi]\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Osoita että sopivasti pisteen $(\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$ ympäristöön rajoittautumalla A :sta saadaan derivoituva funktio f . Laske $f'(\sqrt{2})$.

Vastaus: Selvitetään ensin millä t :n arvolla saavutetaan piste $(\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$ ja tätä varten ratkaistaan yhtälö

$$2 \cos t - \cos 2t = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 \cos t - (2 \cos^2 t - 1) = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 \cos^2 t - 2 \cos t + \sqrt{2} - 1 = 0,$$

josta

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2(\sqrt{2} - 1)}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{(2\sqrt{2} - 2)^2}}{4} \\ &= \frac{2 \pm (2\sqrt{2} - 2)}{4} \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Arvo $\cos t = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ tuottaa ristiriidan toisen yhtälön kanssa:

$$\begin{aligned} 2 \sin t - \sin 2t &= \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow 2 \sin t - 2 \sin t \cos t = \sqrt{2} - 1 \\ \Leftrightarrow 2 \sin t(1 - \cos t) &= \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow 2 \sin t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \\ \Leftrightarrow \sin t &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

Tällöin siis olisi

$$1 = \cos^2 t + \sin^2 t = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 - 2\sqrt{2},$$

mikä on ristiriita.

Ratkaisua $\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ vastaa arvot $t \in \{\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\}$, joista vain ensimmäinen toteuttaa toisen yhtälön.

Derivaatta saadaan seuraavalla tavalla:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 \cos t - 2 \cos 2t}{-2 \sin t + 2 \sin 2t}.$$

Sijoitus $t = \frac{\pi}{4}$, antaa arvon

$$f'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

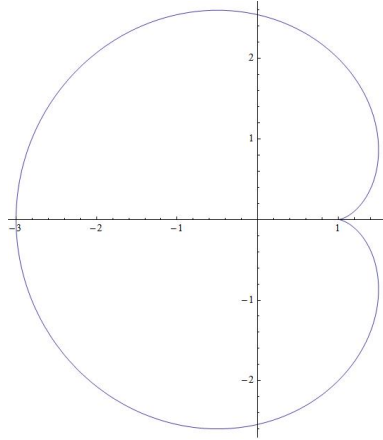
3. Arkhimedeen spiraalin napakoordinaattiesitys on $r = \frac{\varphi}{\pi}$, missä $\varphi \in [0, \infty)$. Osoita, että piste $(x, y) = (\frac{7}{6}, \frac{7\sqrt{3}}{6})$ kuuluu käyrälle ja määritä tähän pisteeseen piirretyn tangentin yhtälö.

Vastaus: Koska $x = r \cos \varphi$ ja $y = r \sin \varphi$, pitää selvittää onko sellaista arvoa φ , että yhtälöpari

$$\begin{cases} r \cos \varphi &= \frac{7}{6} \\ r \sin \varphi &= \frac{7\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

toteutuu. Korottamalla yhtälöt puolittain toiseen potenssiin ja laskemalla yhteen saadaan

$$r^2 = \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{4 \cdot 49}{36},$$



Kuva 2: Tehtävän 2 käyrä tunnetaan nimellä *kardioidi*.

josta $r = \frac{7}{3}$ ja edelleen $\varphi = \frac{7}{3}\pi$. Sijoittamalla tämä esitykseen

$$\begin{cases} x &= \frac{7}{3} \cos \varphi \\ y &= \frac{7}{3} \sin \varphi \end{cases}$$

voidaan todeta, että arvolla $\varphi = \frac{7\pi}{3}$ saavutetaan piste $(\frac{7}{6}, \frac{7\sqrt{3}}{6})$.

Tangentin kulmakerroin voidaan selvittää seuraavasti:

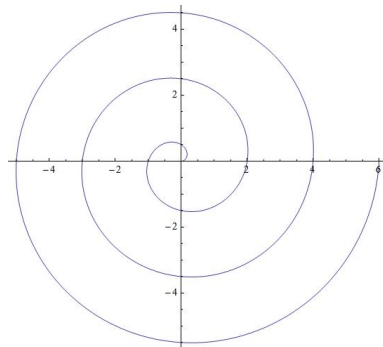
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\sin \varphi + \varphi \cos \varphi}{\cos \varphi - \varphi \sin \varphi},$$

mistä saadaan kulmakertoimen arvoksi

$$k = \frac{3\sqrt{3} + 7\pi}{3 - 7\sqrt{3}\pi}.$$

Tangentin yhtälö on

$$y - \frac{7\sqrt{3}}{6} = k(x - \frac{7}{6}).$$



Kuva 3: Arkhimedeen spiraali

- Selitä miksi yhtälö $e^{xy} \ln \frac{x}{y} = x + \frac{1}{y}$ määrittelee jossakin pisteen $(e, \frac{1}{e})$ ympäristössä derivoituvan funktion f . Laske $f'(e)$.

Vastaus: Merkitään $F(x, y) = e^{xy} \ln \frac{x}{y} - x - \frac{1}{y}$, jolloin yhtälö saa muodon $F(x, y) = 0$.

Suoraan laskemalla todetaan, että $F(e, \frac{1}{e}) = 0$. Funktion F osittaisderivaatat

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{xy} y \ln \frac{x}{y} + e^{xy} \frac{y}{x} \frac{1}{y} - 1 = e^{xy} y \ln \frac{x}{y} + e^{xy} \frac{1}{x} - 1$$

ja

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{xy} x \ln \frac{x}{y} + e^{xy} \frac{y}{x} \left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{1}{y^2} = e^{xy} x \ln \frac{x}{y} - e^{xy} \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}$$

ovat jatkuvia, kun $x, y > 0$, erityisesti jossakin pisteen $(e, \frac{1}{e})$ ympäristössä.

Lisäksi

$$\frac{\partial F}{\partial y}(e, \frac{1}{e}) = e^1 \cdot e \ln e^2 - e^1 \cdot e + e^2 = 2e^2 \neq 0.$$

Tällöin implisiittifunktiolauseesta (Lause 5.26) seuraa, että yhtälö $F(x, y) = 0$ määrittelee jossakin pisteen $(e, \frac{1}{e})$ ympäristössä derivoituvan funktion $y = f(x)$. Derivaatan arvon laskemiseksi määritetään vielä

$$\frac{\partial F}{\partial x}(e, \frac{1}{e}) = e^1 \cdot \frac{1}{e} \ln e^2 + e^1 \frac{1}{e} - 1 = 2$$

ja näin ollen

$$f'(e) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(e, \frac{1}{e})}{\frac{\partial F}{\partial y}(e, \frac{1}{e})} = -\frac{2}{2e^2} = -\frac{1}{e^2}.$$

5. Esitä lauseke derivaatalle $\frac{dy}{dx}$, kun $y^2 = x^2 + \sin(xy)$.

Vastaus: Tapa 1: Implisiittisellä derivoinnilla saadaan

$$2yy' = 2x + \cos(xy)(y + xy'),$$

josta voidaan ratkaista

$$y' = \frac{2x + y \cos(xy)}{2y - x \cos(xy)}.$$

Tapa 2: Merkitään $F(x, y) = y^2 - x^2 - \sin(xy)$, jolloin alkuperäinen yhtälö saa muodon $F(x, y) = 0$. Tällöin

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{-2x - y \cos(xy)}{2y - x \cos(xy)}.$$

6. Yhtälö $2x^3 - 3x^2y + 5y^3 = 9$ määrittelee tasokäyrän. Onko tällä käyrällä on yksikäsitteinen tangentti jokaisessa pisteessään?

Ohje: Jos käyrä määrittelee jonkin pisteensä ympäristössä derivoituvan funktion $y = f(x)$ tai $x = g(y)$, voidaan tangentti asettaa yksikäsitteisesti tällaiseen pisteeseen.

Vastaus: Olkoon $F(x, y) = 2x^3 - 3x^2y + 5y^3 - 9$, jolloin

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x^2 - 6xy$$

ja

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -3x^2 + 15y^2.$$

Tilanteessa jossa molemmat näistä ovat nollia, on siis

$$\begin{cases} x^2 - xy &= 0 \\ x^2 - 5y^2 &= 0 \end{cases}$$

Ylemmän yhtälön perusteella joko $x = 0$ tai $x = -y$. Jos $x = 0$, on alemman yhtälön perusteella myös $y = 0$, mutta tällainen piste ei kuulu käyrälle $F(x, y) = 0$. Jos taas $x = -y$, on alemman yhtälön perusteella $-4y^2 = 0$, mistä seuraa $y = x = 0$. Näin ollen käyrällä oleville pisteille on joka tapauksessa joko $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ tai $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Implisiittifunktiolauseen perusteella tästä seuraa, että jokaisessa käyrän pisteen (x, y) ympäristössä on olemassa joko derivoituva funktio $y = f(x)$ tai $x = g(y)$. Näin ollen käyrälle voidaan asettaa yksikäsitteinen tangentti jokaiseen pisteeseen.

7. Tarkista kuuluuko piste $(2, 1)$ edellisen tehtävän käyrälle ja määritä $f'(2)$.

Vastaus:

$$F(2, 1) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 5 \cdot 1^3 - 9 = 0,$$

joten piste kuuluu käyrälle. Implisiittisellä derivoinnilla saadaan

$$6x^2 - 6x - 3x^2y' + 15y^2y' = 0,$$

josta voidaan ratkaista

$$y' = \frac{2x^2 - 2x}{x^2 - 5y^2}$$

ja tähän sijoittamalla $(x, y) = (2, 1)$ saadaan edelleen

$$y'(2) = -4.$$