

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2016

Kurssin nettisivu

Perehdy nettisivun informaatioon:

[http://users.utu.fi/mikhirve/analyysi1617/Analyysil/
Analyysilindex.html](http://users.utu.fi/mikhirve/analyysi1617/Analyysil/Analyysilindex.html)

Kurssin nettisivu

Perehdy nettisivun informaatioon:

<http://users.utu.fi/mikhirve/analyysi1617/Analyysil/Analyysilindex.html>

Luennot ja demot

Ke 12-14 ja to 10-12 salissa IX. Demot alkaen 16.9. perjantaisin 8-10, 10-12 ja 12-14. Demoryhmät ilmoitetaan myöhemmin ja poikkeuksista kerrotaan kurssin nettisivulla.

Kurssin nettisivu

Perehdy nettisivun informaatioon:

<http://users.utu.fi/mikhirve/analyysi1617/Analyysil/Analyysilindex.html>

Luennot ja demot

Ke 12-14 ja to 10-12 salissa IX. Demot alkaen 16.9. perjantaisin 8-10, 10-12 ja 12-14. Demoryhmät ilmoitetaan myöhemmin ja poikkeuksista kerrotaan kurssin nettisivulla.

Kurssin suoritus

Demotehtävistä suoritettava vähintään 25% ja läpäistävä lopputentti. Toinen mahdollisuus: Kaksi välikoetta.

Kurssin nettisivu

Perehdy nettisivun informaatioon:

<http://users.utu.fi/mikhirve/analyysi1617/Analyysil/Analyysilindex.html>

Luennot ja demot

Ke 12-14 ja to 10-12 salissa IX. Demot alkaen 16.9. perjantaisin 8-10, 10-12 ja 12-14. Demoryhmät ilmoitetaan myöhemmin ja poikkeuksista kerrotaan kurssin nettisivulla.

Kurssin suoritus

Demotehtävistä suoritettava vähintään 25% ja läpäistävä lopputentti. Toinen mahdollisuus: Kaksi välikoetta.

Tenttipäivät

Kolme tenttipäivää + kesätentti, ilmoitetaan myöhemmin.

Tavoitteet

Tavoitteena on ymmärtää matematiikan rakennetta sekä hallita analyysin peruskäsitteet raja-arvo ja derivaatta. Lisäksi omaksutaan tavallisimmat reaalfunktiot, sekä näiden käyttö yksinkertaisissa sovelluksissa.

Tavoitteet

Tavoitteena on ymmärtää matematiikan rakennetta sekä hallita analyysin peruskäsitteet raja-arvo ja derivaatta. Lisäksi omaksutaan tavallisimmat reaalifunktiot, sekä näiden käyttö yksinkertaisissa sovelluksissa.

Sisältö

Joukot, funktiot, reaali- ja kompleksiluvut, täydellinen induktio, alkeisfunctiot, lukujonon ja funktion raja-arvo, jatkuvat funktiot ja niiden perusominaisuudet, derivaatta ja sen sovellukset.

Etymologia ja käyttö

- *αναλυσις* ← *ανα λυω* "purkamisen kautta"

Etymologia ja käyttö

- *ανάλυσις* ← *ανα λυω* "purkamisen kautta"
- Termiä käytetään lähes kaikilla ihmisen toiminnan aloilla.

Etymologia ja käyttö

- $\alpha\nu\alpha\lambda\nu\sigma\iota\varsigma \leftarrow \alpha\nu\alpha\lambda\nu\omega$ "purkamisen kautta"
- Termiä käytetään lähes kaikilla ihmisen toiminnan aloilla.
- Matematiikassa viittaa yleensä reaali- tai kompleksilukujen tai -funktioiden analyysiin.

Etymologia ja käyttö

- $\alpha\nu\alpha\lambda\nu\sigma\iota\varsigma \leftarrow \alpha\nu\alpha\lambda\nu\omega$ "purkamisen kautta"
- Termiä käytetään lähes kaikilla ihmisen toiminnan aloilla.
- Matematiikassa viittaa yleensä reaali- tai kompleksilukujen tai -funktioiden analyysiin.
- Matematiikan termi "Analyysi" sisältää differentiaali- ja integraalilaskennan mutta on näitä laajempi käsite.

Luonnehdinta

Matematiikka on rakennetta, järjestystä ja suhteita käsittelevä tiede.

Luonnehdinta

Matematiikka on rakennetta, järjestystä ja suhteita käsittelevä tiede.

Matematiikan (esi)historiaa

- Laskutaito n. 35000 vuotta sitten.

Luonnehdinta

Matematiikka on rakennetta, järjestystä ja suhteita käsittelevä tiede.

Matematiikan (esi)historiaa

- Laskutaito n. 35000 vuotta sitten.
- Abstrakti matematiikka n. 4000 vuotta sitten (Egypti).

Luonnehdinta

Matematiikka on rakennetta, järjestystä ja suhteita käsittelevä tiede.

Matematiikan (esi)historiaa

- Laskutaito n. 35000 vuotta sitten.
- Abstrakti matematiikka n. 4000 vuotta sitten (Egypti).
- Kreikkalainen kukoistuskausi n. 300–100 eKr.

Luonnehdinta

Matematiikka on rakennetta, järjestystä ja suhteita käsittelevä tiede.

Matematiikan (esi)historiaa

- Laskutaito n. 35000 vuotta sitten.
- Abstrakti matematiikka n. 4000 vuotta sitten (Egypti).
- Kreikkalainen kukoistuskausi n. 300–100 eKr.
- Uuden ajan matematiikka 1600-luku → nykypäivä.

Yleisiä piirteitä

- Matematiikka ei ole luonnontiede:

Yleisiä piirteitä

- Matematiikka ei ole luonnontiede: Väitteitä ei voi perustella empiirisesti.

Yleisiä piirteitä

- Matematiikka ei ole luonnontiede: Väitteitä ei voi perustella empiirisesti.
- Teorioiden motivaatio silti yleensä kytköksissä reaali maailmaan.

Yleisiä piirteitä

- Matematiikka ei ole luonnontiede: Väitteitä ei voi perustella empiirisesti.
- Teorioiden motivaatio silti yleensä kytköksissä reaalimaailmaan.
- Matematiikka esittää reaalimaailman abstraktissa muodossa (esim. lukumäärä).

Yleisiä piirteitä

- Matematiikka ei ole luonnontiede: Väitteitä ei voi perustella empiirisesti.
- Teorioiden motivaatio silti yleensä kytköksissä reaali maailmaan.
- Matematiikka esittää reaali maailman abstraktissa muodossa (esim. lukumäärä).
- Kytkeä reaali maailman ja sen abstrahoidun kuvan välillä yleensä toivottava.

Yleisiä piirteitä

- Matematiikka ei ole luonnontiede: Väitteitä ei voi perustella empiirisesti.
- Teorioiden motivaatio silti yleensä kytköksissä reaali maailmaan.
- Matematiikka esittää reaali maailman abstraktissa muodossa (esim. lukumäärä).
- Kytkeä reaali maailman ja sen abstrahoidun kuvan välillä yleensä toivottava.
- Matemaattinen teoria puhuu yleensä äärettömästä määrästä tapauksia.

Yleisiä piirteitä

- Matematiikka ei ole luonnontiede: Väitteitä ei voi perustella empiirisesti.
- Teorioiden motivaatio silti yleensä kytköksissä reaali maailmaan.
- Matematiikka esittää reaali maailman abstraktissa muodossa (esim. lukumäärä).
- Kytkeä reaali maailman ja sen abstrahoidun kuvan välillä yleensä toivottava.
- Matemaattinen teoria puhuu yleensä äärettömästä määrästä tapauksia.
- Havainnoilla voidaan perustella vain äärellinen määrä.

Kreikkalaiset aakkoset

alfa	A	α	ioota	I	ι	rhoo	P	ρ
beta	B	β	kappa	K	$\kappa, \varkappa$	sigma	Σ	σ, ς
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	T	τ
delta	Δ	δ	myy	M	μ	ypsilon	Υ	υ
epsilon	E	ϵ	nyy	N	ν	fii	Φ	ϕ, φ
zeeta	Z	ζ	ksii	Ξ	ξ	khii	X	χ
eeta	H	η	omikron	O	o	psii	Ψ	ψ
theeta	Θ	θ, ϑ	pii	Π	π, ϖ	oomega	Ω	ω

Joukko-oppi

- Aaltosulkeet: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, tai $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Joukko-oppi

- Aaltosulkeet: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, tai $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Joukkoon kuuluminen: $\in$, päinvastainen $\notin$. Esimerkiksi $2 \in A$, mutta $2 \notin B$.

Joukko-oppi

- Aaltosulkeet: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, tai $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Joukkoon kuuluminen: $\in$, päinvastainen $\notin$. Esimerkiksi $2 \in A$, mutta $2 \notin B$.
- Unioni eli yhdiste. Esimerkiksi $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

Joukko-oppi

- Aaltosulkeet: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, tai $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Joukkoon kuuluminen: $\in$, päinvastainen $\notin$. Esimerkiksi $2 \in A$, mutta $2 \notin B$.
- Unioni eli yhdiste. Esimerkiksi $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- Intersektio eli leikkaus. Esimerkiksi $A \cap B = \{3\}$

Joukko-oppi

- Aaltosulkeet: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, tai $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Joukkoon kuuluminen: $\in$, päinvastainen $\notin$. Esimerkiksi $2 \in A$, mutta $2 \notin B$.
- Unioni eli yhdiste. Esimerkiksi $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- Intersektio eli leikkaus. Esimerkiksi $A \cap B = \{3\}$
- Differenssi eli erotus. Esimerkiksi $A \setminus B = \{1, 2\}$.

Joukko-oppi

- Aaltosulkeet: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$, tai $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Joukkoon kuuluminen: $\in$, päinvastainen $\notin$. Esimerkiksi $2 \in A$, mutta $2 \notin B$.
- Unioni eli yhdiste. Esimerkiksi $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- Intersektio eli leikkaus. Esimerkiksi $A \cap B = \{3\}$
- Differenssi eli erotus. Esimerkiksi $A \setminus B = \{1, 2\}$.
- Tyhjä joukko $\emptyset$.

Ehdollinen kuuluminen

Jos joukko A on aiemmin määritelty, voidaan joukosta A erottaa tietyn ehdon p täyttävät alkiot joukoksi B . Tästä käytetään merkintää

$$B = \{x \in A \mid p(x)\}.$$

Ehdollinen kuuluminen

Jos joukko A on aiemmin määritelty, voidaan joukosta A erottaa tietyn ehdon p täyttävät alkiot joukoksi B . Tästä käytetään merkintää

$$B = \{x \in A \mid p(x)\}.$$

Ehtoa $p(x)$ kutsutaan yksipaikkaiseksi *predikaatiksi*

Ehdollinen kuuluminen

Jos joukko A on aiemmin määritelty, voidaan joukosta A erottaa tietyn ehdon p täyttävät alkiot joukoksi B . Tästä käytetään merkintää

$$B = \{x \in A \mid p(x)\}.$$

Ehtoa $p(x)$ kutsutaan yksipaikkaiseksi *predikaatiksi*

Esimerkki

$$A = \{1, 2, \dots, 10\},$$

- $B = \{x \in A \mid x \text{ on pariton}\}$

Ehdollinen kuuluminen

Jos joukko A on aiemmin määritelty, voidaan joukosta A erottaa tietyn ehdon p täyttävät alkiot joukoksi B . Tästä käytetään merkintää

$$B = \{x \in A \mid p(x)\}.$$

Ehtoa $p(x)$ kutsutaan yksipaikkaiseksi *predikaatiksi*

Esimerkki

$$A = \{1, 2, \dots, 10\},$$

- $B = \{x \in A \mid x \text{ on pariton}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Ehdollinen kuuluminen

Jos joukko A on aiemmin määritelty, voidaan joukosta A erottaa tietyn ehdon p täyttävät alkiot joukoksi B . Tästä käytetään merkintää

$$B = \{x \in A \mid p(x)\}.$$

Ehtoa $p(x)$ kutsutaan yksipaikkaiseksi *predikaatiksi*

Esimerkki

$$A = \{1, 2, \dots, 10\},$$

- $B = \{x \in A \mid x \text{ on pariton}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $B = \{x \in A \mid x \geq 7\}$

Ehdollinen kuuluminen

Jos joukko A on aiemmin määritelty, voidaan joukosta A erottaa tietyn ehdon p täyttävät alkiot joukoksi B . Tästä käytetään merkintää

$$B = \{x \in A \mid p(x)\}.$$

Ehtoa $p(x)$ kutsutaan yksipaikkaiseksi *predikaatiksi*

Esimerkki

$$A = \{1, 2, \dots, 10\},$$

- $B = \{x \in A \mid x \text{ on pariton}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $B = \{x \in A \mid x \geq 7\} = \{7, 8, 9, 10\}$

Lukujoukot

- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Lukujoukot

- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Lukujoukot

- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- Rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.

Lukujoukot

- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- Rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.
- Reaaliluvut $\mathbb{R}$.

Lukujoukot

- Luonnolliset luvut $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Kokonaisluvut $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- Rationaaliluvut $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.
- Reaaliluvut $\mathbb{R}$.
- Kompleksiluvut $\mathbb{C}$.

Päätelyn muotoja

- Deduktiivinen

Päätelyn muotoja

- Deduktiivinen
- Induktiivinen

Päätelyn muotoja

- Deduktiivinen
- Induktiivinen
- Abduktiivinen

Päätelyn muotoja

- Deduktiivinen
 - Induktiivinen
 - Abduktiivinen
-
- Matematiikka rakennetaan yksinomaan deduktiivisen päätelyn turvin

Päätelyn muotoja

- Deduktiivinen
 - Induktiivinen
 - Abduktiivinen
-
- Matematiikka rakennetaan yksinomaan deduktiivisen päättelyn turvin
 - Luonnontieteissä induktiivinen päättely on tyypillistä

Syllogistinen logiikka



Aristoteles (*Αριστοτέλης*, 384 eKr–322 eKr) oli kreikkalainen filosofi, jonka katsotaan Sokrateen ja Platonin ohella vaikuttaneen eniten länsimaiseen ajatteluun. Aristoteles käsitteli lähes kaikkea inhimillisen toiminnan piiriin kuuluvaa, luonnontieteistä valtiotieteisiin ja taiteisiin. Aristoteles analysoi loogista päättelyä ja kehitti syllogistisen logiikan. Aristotelesta sanotaan usein logiikan isäksi.

(kuva: Wikimedia Commons)

Syllogistinen logiikka

Premisseistä päätellään johtopäätös. Premissejä voi olla kaksi: Pääpremissi ja alipremissi

Syllogistinen logiikka

Premisseistä päätellään johtopäätös. Premissejä voi olla kaksi: Pääpremissi ja alipremissi

Esimerkki

Sokrates on ihminen
Sokrates on kuolevainen

Syllogistinen logiikka

Premisseistä päätellään johtopäätös. Premissejä voi olla kaksi: Pääpremissi ja alipremissi

Esimerkki

Sokrates on ihminen

Sokrates on kuolevainen

Huomautus

Johtopäätös ei seuraa premissistä!

Esimerkki

Jokainen ihminen on kuolevainen
(pääpremissi)

Sokrates on ihminen
(alipremissi)

Sokrates on kuolevainen
(johtopäätös)

Esimerkki

Jokainen ihminen on kuolevainen
(pääpremissi)

Sokrates on ihminen
(alipremissi)

Sokrates on kuolevainen
(johtopäätös)

Huomautus

Johtopäätös seuraa premiseistä.