

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2017

Lähtökohta

$(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$

Lähtökohta

$(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$

Kunta-aksiomat

- Kaikille reaaliluvuille a , b ja c pätee $a + (b + c) = (a + b) + c$ ja $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- Jokaiselle reaaliluvulle a pätee $0 + a = a$ ja $1 \cdot a = a$.
- Jokaista reaalilukua a kohti on olemassa a :n *vastaluku* $-a$, joka toteuttaa $a + (-a) = 0$ ja jokaista nollasta eroavaa reaalilukua a kohti on olemassa käänteisluku a^{-1} , joka toteuttaa $a \cdot a^{-1} = 1$.
- Kaikille reaaliluvuille a ja b pätee $a + b = b + a$ ja $a \cdot b = b \cdot a$.
- kaikille reaaliluvuille a , b , ja c pätee $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Järjestysaksiomat

On olemassa osajoukko $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- Jokaista reaalilukua a kohti pätee tarkalleen yksi vaihtoehtoista $a \in \mathbb{R}_+$, $a = 0$ tai $-a \in \mathbb{R}_+$.
- Jos $a, b \in \mathbb{R}_+$, niin $a + b, a \cdot b \in \mathbb{R}_+$.

Järjestysaksiomat

On olemassa osajoukko $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- Jokaista reaalilukua a kohti pätee tarkalleen yksi vaihtoehtoista $a \in \mathbb{R}_+$, $a = 0$ tai $-a \in \mathbb{R}_+$.
- Jos $a, b \in \mathbb{R}_+$, niin $a + b, a \cdot b \in \mathbb{R}_+$.

Täydellisyysaksioma

Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on *pienin yläraja*.

Järjestysaksioomat

On olemassa osajoukko $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

- Jokaista reaalilukua a kohti pätee tarkalleen yksi vaihtoehtoista $a \in \mathbb{R}_+$, $a = 0$ tai $-a \in \mathbb{R}_+$.
- Jos $a, b \in \mathbb{R}_+$, niin $a + b, a \cdot b \in \mathbb{R}_+$.

Täydellisyysaksiooma

Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on *pienin yläraja*.

Esimerkki

$$(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$$

Vähennys- ja jakolasku

- Reaalilukujen lähtökohta $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$.
- Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on vastaluku $-x$, jolle pätee $x + (-x) = 0$.
- Jokaisella $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on käänteisluku x^{-1} , jolle pätee $x \cdot x^{-1} = 1$.

Vähennys- ja jakolasku

- Reaalilukujen lähtökohta $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$.
- Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on vastaluku $-x$, jolle pätee $x + (-x) = 0$.
- Jokaisella $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on käänteisluku x^{-1} , jolle pätee $x \cdot x^{-1} = 1$.
- Vähennyslasku määritellään $x - y = x + (-y)$.

Vähennys- ja jakolasku

- Reaalilukujen lähtökohta $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$.
- Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on vastaluku $-x$, jolle pätee $x + (-x) = 0$.
- Jokaisella $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on käänteisluku x^{-1} , jolle pätee $x \cdot x^{-1} = 1$.
- Vähennyslasku määritellään $x - y = x + (-y)$.
- Jakolasku määritellään $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$.

Vähennys- ja jakolasku

- Reaalilukujen lähtökohta $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$.
- Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on vastaluku $-x$, jolle pätee $x + (-x) = 0$.
- Jokaisella $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on käänteisluku x^{-1} , jolle pätee $x \cdot x^{-1} = 1$.
- Vähennyslasku määritellään $x - y = x + (-y)$.
- Jakolasku määritellään $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$.
- Jakolaskua $\frac{x}{0}$ ei voida määritellä.

Vähennys- ja jakolasku

- Reaalilukujen lähtökohta $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot)$.
- Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on vastaluku $-x$, jolle pätee $x + (-x) = 0$.
- Jokaisella $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on käänteisluku x^{-1} , jolle pätee $x \cdot x^{-1} = 1$.
- Vähennyslasku määritellään $x - y = x + (-y)$.
- Jakolasku määritellään $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$.
- Jakolaskua $\frac{x}{0}$ ei voida määritellä.

Järjestysrelaatio

- Merkintä $x > y$ tarkoittaa $x - y \in \mathbb{R}_+$
- Merkintä $x \geq y$ tarkoittaa $x > y$ tai $x = y$
- Merkinnät $<$ ja $\leq$ määritellään analogisesti.

Lemma (aputulos)

- $x = y \Rightarrow x + z = y + z$
- $x = y \Rightarrow xz = yz$

Lemma (aputulos)

- $x = y \Rightarrow x + z = y + z$
- $x = y \Rightarrow xz = yz$
- $x + z = y + z \Rightarrow x = y$

Lemma (aputulos)

- $x = y \Rightarrow x + z = y + z$
- $x = y \Rightarrow xz = yz$
- $x + z = y + z \Rightarrow x = y$
- $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ tai $y = 0$

Lemma (aputulos)

- $x = y \Rightarrow x + z = y + z$
- $x = y \Rightarrow xz = yz$
- $x + z = y + z \Rightarrow x = y$
- $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ tai $y = 0$
- $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$

Lemma (aputulos)

- $x = y \Rightarrow x + z = y + z$
- $x = y \Rightarrow xz = yz$
- $x + z = y + z \Rightarrow x = y$
- $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ tai $y = 0$
- $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$

Esimerkkejä

Esimerkit 1.19, 1.20

Reaaliluvun itseisarvo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jos } x \geq 0, \\ -x & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Reaaliluvun itseisarvo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jos } x \geq 0, \\ -x & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Reaaliluvun merkki; sgn-funktio

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{jos } x < 0, \\ 0 & \text{jos } x = 0, \\ 1 & \text{jos } x > 0. \end{cases}$$

Reaaliluvun itseisarvo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jos } x \geq 0, \\ -x & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Reaaliluvun merkki; sgn-funktio

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{jos } x < 0, \\ 0 & \text{jos } x = 0, \\ 1 & \text{jos } x > 0. \end{cases}$$

Lemma

$$|x| = \text{sgn}(x) \cdot x \text{ ja } x = \text{sgn}(x) |x|.$$

Huomautus

Geometrisesti $|x|$ merkitsee lukusuoralla x :n etäisyyttä luvusta 0.
Vastaavasti $|x - y|$ merkitsee lukujen x ja y etäisyyttä lukusuoralla.

Huomautus

Geometrisesti $|x|$ merkitsee lukusuoralla x :n etäisyyttä luvusta 0. Vastaavasti $|x - y|$ merkitsee lukujen x ja y etäisyyttä lukusuoralla.

lemma

- $|x| \geq 0$ ja $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $|xy| = |x| |y|$
- $|x^{-1}| = |x|^{-1}$ jos $x \neq 0$
- $-|x| \leq x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Lemma

Kaikille reaalityyppisille $x, y, z \neq 0, r > 0$ pätee:

- $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$
- Jos $z > 0$, niin $x < y \Leftrightarrow xz < yz$
- Jos $z < 0$, niin $x < y \Leftrightarrow xz > yz$
- $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$
- $|x| > r \Leftrightarrow x < -r \text{ tai } x > r$
- $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$
- $xy > 0 \Leftrightarrow \text{sgn}(x) = \text{sgn}(y)$
- Jos $x < y$ ja $y < z$, niin $x < z$ (transitiivisuus)
- Aina on voimassa joko $x > y, x < y$ tai $x = y$.

Lemma

Kaikille reaalityyppisille $x, y, z \neq 0, r > 0$ pätee:

- $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$
- Jos $z > 0$, niin $x < y \Leftrightarrow xz < yz$
- Jos $z < 0$, niin $x < y \Leftrightarrow xz > yz$
- $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$
- $|x| > r \Leftrightarrow x < -r \text{ tai } x > r$
- $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$
- $xy > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y)$
- Jos $x < y$ ja $y < z$, niin $x < z$ (transitiivisuus)
- Aina on voimassa joko $x > y$, $x < y$ tai $x = y$.

Esimerkkejä

Esimerkit 1.24, 1.25

Reaalilukuvälejä

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$. Laajennus: $\mathbb{R}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$. Laajennus: $\mathbb{R}$.
- Yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$. Laajennus: $\mathbb{R}$.
- Yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$. Laajennus: $\mathbb{C}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$. Laajennus: $\mathbb{R}$.
- Yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$. Laajennus: $\mathbb{C}$.

Esimerkki

Toisen asteen yhtälön

$$ax^2 + bx + c = 0$$

($a \neq 0$) ratkaiseminen