

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2017

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$. Laajennus: $\mathbb{R}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$. Laajennus: $\mathbb{R}$.
- Yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$. Laajennus: $\mathbb{R}$.
- Yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$. Laajennus: $\mathbb{C}$.

Johdanto

- Yhtälöllä $x + 2 = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{N}$. Laajennus: $\mathbb{Z}$.
- Yhtälöllä $2x = 1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Z}$. Laajennus: $\mathbb{Q}$.
- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$. Laajennus: $\mathbb{R}$.
- Yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{R}$. Laajennus: $\mathbb{C}$.

Esimerkki

Toisen asteen yhtälön

$$ax^2 + bx + c = 0$$

($a \neq 0$) ratkaiseminen perustuu ekvivalenssiin

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Kolmannen asteen polynomiyhtälöt

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

- Erikoistapauksia hallittu jo antiikin aikoina.

Kolmannen asteen polynomiyhtälöt

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

- Erikoistapauksia hallittu jo antiikin aikoina.
- Yleinen ratkaisu vasta 1500-luvulla: Scipione del Ferro → Antonio Fiore; Niccolò Tartaglia ↔ Gerolamo Cardano → Lodovico Ferrari.

Kolmannen asteen polynomiyhtälöt

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

- Erikoistapauksia hallittu jo antiikin aikoina.
- Yleinen ratkaisu vasta 1500-luvulla: Scipione del Ferro $\rightarrow$ Antonio Fiore; Niccolò Tartaglia $\leftrightarrow$ Gerolamo Cardano $\rightarrow$ Lodovico Ferrari.
- Ratkaisu tunnetaan Cardanon kaavoina, julkaistu kirjassa Ars Magna 1545.

Kolmannen asteen polynomiyhtälöt

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

- Erikoistapauksia hallittu jo antiikin aikoina.
- Yleinen ratkaisu vasta 1500-luvulla: Scipione del Ferro $\rightarrow$ Antonio Fiore; Niccolò Tartaglia $\leftrightarrow$ Gerolamo Cardano $\rightarrow$ Lodovico Ferrari.
- Ratkaisu tunnetaan Cardanon kaavoina, julkaistu kirjassa Ars Magna 1545.
- Jos kaikki kolme ratkaisua (juurta) ovat reaalisia, esiintyy välivaiheissa aina ”negatiivisten lukujen neliöjuuria” (Tapaus ei tosin esiinny vielä Ars Magnassa)

Kolmannen asteen polynomiyhtälöt

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

- Erikoistapauksia hallittu jo antiikin aikoina.
- Yleinen ratkaisu vasta 1500-luvulla: Scipione del Ferro $\rightarrow$ Antonio Fiore; Niccolò Tartaglia $\leftrightarrow$ Gerolamo Cardano $\rightarrow$ Lodovico Ferrari.
- Ratkaisu tunnetaan Cardanon kaavoina, julkaistu kirjassa Ars Magna 1545.
- Jos kaikki kolme ratkaisua (juurta) ovat reaalisia, esiintyy välivaiheissa aina "negatiivisten lukujen neliöjuuria" (Tapaus ei tosin esiinny vielä Ars Magnassa). Sen sijaan toisen asteen kompleksijuuriseen yhtälöön johtava tehtävä esiintyy: Etsi luvut, joiden summa on 10 ja tulo 40

"Määritelmä"

"Määritelmä"

- Imaginaariyksikkö i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$.

"Määritelmä"

- Imaginaariyksikkö i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$.
- Kompleksiluku z on muotoa $z = x + yi$ oleva lauseke, missä x ja $y \in \mathbb{R}$.

"Määritelmä"

- Imaginaariyksikkö i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$.
- Kompleksiluku z on muotoa $z = x + yi$ oleva lauseke, missä x ja $y \in \mathbb{R}$.
- Kompleksiluvut $z_1 = x_1 + y_1i$ ja $z_2 = x_2 + y_2i$ ovat yhtäsuuret tarkalleen silloin kun $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$.

"Määritelmä"

- Imaginaariyksikkö i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$.
- Kompleksiluku z on muotoa $z = x + yi$ oleva lauseke, missä x ja $y \in \mathbb{R}$.
- Kompleksiluvut $z_1 = x_1 + y_1i$ ja $z_2 = x_2 + y_2i$ ovat yhtäsuuret tarkalleen silloin kun $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$.
- Jos $y = 0$, on $z = x + yi = x \in \mathbb{R}$.

"Määritelmä"

- Imaginaariyksikkö i toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$.
- Kompleksiluku z on muotoa $z = x + yi$ oleva lauseke, missä x ja $y \in \mathbb{R}$.
- Kompleksiluvut $z_1 = x_1 + y_1i$ ja $z_2 = x_2 + y_2i$ ovat yhtäsuuret tarkalleen silloin kun $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$.
- Jos $y = 0$, on $z = x + yi = x \in \mathbb{R}$.

Määritelmä

Kompleksiluvun $z = x + yi$ *reaaliosa* määritellään $\operatorname{Re}(z) = x$ ja *imaginaariosa* $\operatorname{Im}(z) = y$

Yhteenlasku ja kertolasku

Yhteenlasku ja kertolasku

- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$

Yhteenlasku ja kertolasku

- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- $(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i.$

Yhteenlasku ja kertolasku

- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- $(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$.
- Kompleksiluvut toteuttavat kunta-aksioomat

Yhteenlasku ja kertolasku

- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$
- $(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$.
- Kompleksiluvut toteuttavat kunta-aksioomat

Kompleksilukujen osamäärä

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} &= \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + x_2 y_1 i - x_1 y_2 i}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.\end{aligned}$$

Yhteenlasku ja kertolasku

- $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$
- $(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$.
- Kompleksiluvut toteuttavat kunta-aksioomat

Kompleksilukujen osamäärä

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} &= \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + x_2 y_1 i - x_1 y_2 i}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.\end{aligned}$$

Esimerkki

Esimerkki 1.26

Liittoluku

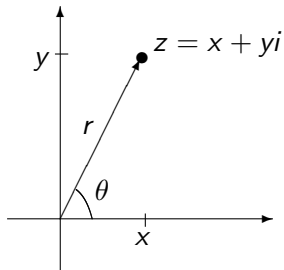
Kompleksiluvun $z = x + yi$ liittoluku eli kompleksikonjugaatti on $\bar{z} = x - yi$.

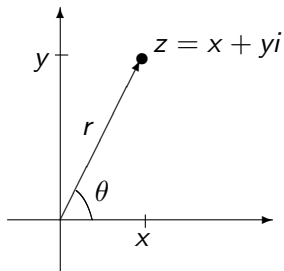
Liittoluku

Kompleksiluvun $z = x + yi$ liittoluku eli kompleksikonjugaatti on $\bar{z} = x - yi$.

Lemma

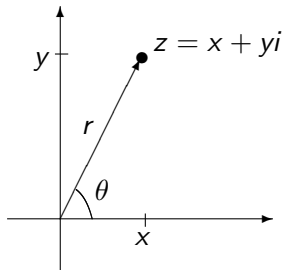
$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \text{ja} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$





Kaksi esitystä

- xy -esitys (tai Re-Im) -esitys: reaaliosa x ja imaginaariosa y



Kaksi esitystä

- xy -esitys (tai Re-Im) -esitys: reaaliosa x ja imaginaariosa y
- Polaari- eli napakoordinaattiesitys: Etäisyys origosta r ja vaihekulma θ .

Määritelmä

Olkoon $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Määritellään kompleksiluvun *itseisarvo*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Määritelmä

Olkoon $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Määritellään kompleksiluvun *itseisarvo*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Lemma

- $z\bar{z} = |z|^2$
- $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$
- $|z| \geq 0$ ja $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

Määritelmä

Astetta n oleva kompleksikertoiminen polynomi on

$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$, missä $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ja $a_n \neq 0$.

Määritelmä

Astetta n oleva kompleksikertoiminen polynomi on

$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$, missä $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ja $a_n \neq 0$.

Algebran peruslause

Jos $P(z)$ on astetta $n \geq 1$ oleva kompleksikertoiminen polynomi, on yhtälöllä $P(z) = 0$ ainakin yksi ratkaisu $z \in \mathbb{C}$.

Induktiivinen päättely

Luonnontieteissä induktiivinen päättely tarkoittaa havaittujen tapausten yleistämistä.

Induktiivinen päättely

Luonnontieteissä induktiivinen päättely tarkoittaa havaittujen tapausten yleistämistä.



Induktioperiaate

Olkoon n_0 on jokin kokonaisluku ja P yksipaikkainen predikaatti.
Jos

- $P(n_0)$ (induktion lähtökohta) on tosi ja

Induktioperiaate

Olkoon n_0 on jokin kokonaisluku ja P yksipaikkainen predikaatti.
Jos

- $P(n_0)$ (induktion lähtökohta) on tosi ja
 - $(\forall n)(P(n) \rightarrow P(n+1))$ (induktioaskel) on tosi,
- niin $P(n)$ on tosi kaikille kokonaisille luvuille $n \geq n_0$.

Induktioperiaate

Olkoon n_0 on jokin kokonaisluku ja P yksipaikkainen predikaatti.
Jos

- $P(n_0)$ (induktion lähtökohta) on tosi ja
- $(\forall n)(P(n) \rightarrow P(n+1))$ (induktioaskel) on tosi,

niin $P(n)$ on tosi kaikille kokonaisille luvuille $n \geq n_0$.

Huomautus

Matemaattinen induktio (tunnetaan myös nimellä täydellinen induktio) perustuu luonnollisten lukujen aksiomatisointiin ja on yksi deduktiivisen päättelyn muoto

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i + 1)$ tosi, niin:

$$P(1)$$

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i + 1)$ tosi, niin:

$$P(1) \rightarrow P(2)$$

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i + 1)$ tosi, niin:

$$P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3)$$

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i + 1)$ tosi, niin:

$$P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4)$$

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i + 1)$ tosi, niin:

$$P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5)$$

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i + 1)$ tosi, niin:

$$P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow \dots$$

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i + 1)$ tosi, niin:

$$P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow \dots$$

Yksityiskohtia

- Usein $P(1)$ on helppo.

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i + 1)$ tosi, niin:

$$P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow \dots$$

Yksityiskohtia

- Usein $P(1)$ on helppo.
- Induktioaskel näytetään toteen todistamalla ensin $P(n) \rightarrow P(n + 1)$, olettamatta n :stä mitään erityistä, sitten päättelämällä että implikaatio pätee kaikille luvuille $n \in \mathbb{N}$

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i + 1)$ tosi, niin:

$$P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow \dots$$

Yksityiskohtia

- Usein $P(1)$ on helppo.
- Induktioaskel näytetään toteen todistamalla ensin $P(n) \rightarrow P(n + 1)$, olettamatta n :stä mitään erityistä, sitten päättelämällä että implikaatio pätee kaikille luvuille $n \in \mathbb{N}$
- $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ todistetaan oikeaksi olettamalla $P(n)$ (induktio-oletus) ja johtamalla tästä $P(n + 1)$ (induktioväite)

Summa ja tulo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Summa ja tulo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i$$

Summa ja tulo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i$$

Huomautus

Summamerkinnässä 1 on summauksen alaraja, n yläraja ja i summausindeksi. Summausindeksin valinta ei ole tärkeä, vaan

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{k=1}^n a_k$$