

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2017

Summa ja tulo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Summa ja tulo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i$$

Summa ja tulo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i$$

Huomautus

Summamerkinnässä 1 on summauksen alaraja, n yläraja ja i summausindeksi. Summausindeksin valinta ei ole tärkeä, vaan

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{k=1}^n a_k$$

Summamerkinnän käsittely

- $$c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i$$

Summamerkinnän käsittely

- $c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$

Summamerkinnän käsittely

- $c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$
- $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i$

Summamerkinnän käsittely

- $c \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n ca_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$
- $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i$
- $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1}$

Sopimus

$$\sum_{k=m}^n a_i = 0$$

ja

$$\prod_{k=m}^n a_i = 1$$

jos $n < m$ (tyhjä summa ja tulo).

Sopimus

$$\sum_{k=m}^n a_i = 0$$

ja

$$\prod_{k=m}^n a_i = 1$$

jos $n < m$ (tyhjä summa ja tulo).

Esimerkkejä

Esimerkit 1.29 ja 1.30.

Induktiivinen päättely

Luonnontieteissä induktiivinen päättely tarkoittaa havaittujen tapausten yleistämistä.

Induktiivinen päättely

Luonnontieteissä induktiivinen päättely tarkoittaa havaittujen tapausten yleistämistä.



Induktioperiaate

Olkoon n_0 on jokin kokonaisluku ja P yksipaikkainen predikaatti.
Jos

- $P(n_0)$ (induktion lähtökohta) on tosi ja

Induktioperiaate

Olkoon n_0 on jokin kokonaisluku ja P yksipaikkainen predikaatti.
Jos

- $P(n_0)$ (induktion lähtökohta) on tosi ja
 - $(\forall n)(P(n) \rightarrow P(n+1))$ (induktioaskel) on tosi,
- niin $P(n)$ on tosi kaikille kokonaisille luvuille $n \geq n_0$.

Induktioperiaate

Olkoon n_0 on jokin kokonaisluku ja P yksipaikkainen predikaatti.
Jos

- $P(n_0)$ (induktion lähtökohta) on tosi ja
- $(\forall n)(P(n) \rightarrow P(n+1))$ (induktioaskel) on tosi,

niin $P(n)$ on tosi kaikille kokonaisille luvuille $n \geq n_0$.

Huomautus

Matemaattinen induktio (tunnetaan myös nimellä täydellinen induktio) perustuu luonnollisten lukujen aksiomatisointiin ja on yksi deduktiivisen päättelyn muoto

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i+1)$ tosi, niin: $P(1)$

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i+1)$ tosi, niin: $P(1) \rightarrow P(2)$

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i+1)$ tosi, niin: $P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3)$

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i+1)$ tosi, niin: $P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4)$

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i+1)$ tosi, niin: $P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5)$

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i+1)$ tosi, niin: $P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow \dots$

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i+1)$ tosi, niin: $P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow \dots$

Yksityiskohtia

- Usein $P(1)$ on helppo.

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i+1)$ tosi, niin: $P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow \dots$

Yksityiskohtia

- Usein $P(1)$ on helppo.
- Induktioaskel näytetään toteen todistamalla ensin $P(n) \rightarrow P(n+1)$, olettamatta n :stä mitään erityistä, sitten päättämällä että implikaatio pätee kaikille luvuille $n \in \mathbb{N}$

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i+1)$ tosi, niin: $P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow \dots$

Yksityiskohtia

- Usein $P(1)$ on helppo.
- Induktioaskel näytetään toteen todistamalla ensin $P(n) \rightarrow P(n+1)$, olettamatta n :stä mitään erityistä, sitten pääättelemällä että implikaatio pätee kaikille luvuille $n \in \mathbb{N}$
- $P(n) \rightarrow P(n+1)$ todistetaan oikeaksi olettamalla $P(n)$ (induktio-oletus) ja johtamalla tästä $P(n+1)$ (induktioväite)

Matemaattinen induktio

Intuitio: Dominoefekti

Tapaus $n_0 = 1$. Jos $P(1)$ on tosi ja kaikille i pätee $P(i)$ tosi $\Rightarrow P(i+1)$ tosi, niin: $P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow \dots$

Yksityiskohtia

- Usein $P(1)$ on helppo.
- Induktioaskel näytetään toteen todistamalla ensin $P(n) \rightarrow P(n+1)$, olettamatta n :stä mitään erityistä, sitten päättelämällä että implikaatio pätee kaikille luvuille $n \in \mathbb{N}$
- $P(n) \rightarrow P(n+1)$ todistetaan oikeaksi olettamalla $P(n)$ (induktio-oletus) ja johtamalla tästä $P(n+1)$ (induktioväite)

Esimerkkejä

Esimerkit 1.32 ja 1.38

Kertoma

$$0! = 1, \quad n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)!$$

Kertoma

$$0! = 1, \quad n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)!$$

$n!$ ilmaisee kuinka monella tavalla n alkiota voidaan järjestää jonoon: Ensimmäistä alkiota kohti on n mahdollisuutta, toista kohti $n-1$, jne.

Kertoma

$$0! = 1, \quad n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n \cdot (n-1)!$$

$n!$ ilmaisee kuinka monella tavalla n alkiota voidaan järjestää jonoon: Ensimmäistä alkiota kohti on n mahdollisuutta, toista kohti $n-1$, jne.

Esimerkki

Luvut $\{1, 2, 3\}$ voidaan järjestää jonoon $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$:lla tavalla: 123, 132, 213, 231, 312 ja 321.

Binomikerroin

Olkoon $\binom{n}{k}$ tapojen määrä valita k alkia n :stä kiinnittämättä huomiota järjestykseen. Määrä voidaan selvittää seuraavasti:

Binomikerroin

Olkoon $\binom{n}{k}$ tapojen määrä valita k alkia n :stä kiinnittämättä huomiota järjestykseen. Määrä voidaan selvittää seuraavasti:

- Kun järjestykseen kiinnitetään huomiota, voidaan k alkia n :stä valita $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$ tavalla.

Binomikerroin

Olkoon $\binom{n}{k}$ tapojen määrä valita k alkia n :stä kiinnittämättä huomiota järjestykseen. Määrä voidaan selvittää seuraavasti:

- Kun järjestykseen kiinnitetään huomiota, voidaan k alkia n :stä valita $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ tavalla.
- Koska järjestämättömät k alkia voidaan järjestää $k!$ tavalla, on tämä sama kuin $k! \binom{n}{k}$.

Binomikerroin

Olkoon $\binom{n}{k}$ tapojen määrä valita k alkia n :stä kiinnittämättä huomiota järjestykseen. Määrä voidaan selvittää seuraavasti:

- Kun järjestykseen kiinnitetään huomiota, voidaan k alkia n :stä valita $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ tavalla.
- Koska järjestämättömät k alkia voidaan järjestää $k!$ tavalla, on tämä sama kuin $k! \binom{n}{k}$. Siis

$$k! \binom{n}{k} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Binomikerroin

Olkoon $\binom{n}{k}$ tapojen määrä valita k alkia n :stä kiinnittämättä huomiota järjestykseen. Määrä voidaan selvittää seuraavasti:

- Kun järjestykseen kiinnitetään huomiota, voidaan k alkia n :stä valita $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ tavalla.
- Koska järjestämättömät k alkia voidaan järjestää $k!$ tavalla, on tämä sama kuin $k! \binom{n}{k}$. Siis

$$\begin{aligned} k! \binom{n}{k} &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

Binomikerroin

Olkoon $\binom{n}{k}$ tapojen määrä valita k alkioita n :stä kiinnittämättä huomiota järjestykseen. Määrä voidaan selvittää seuraavasti:

- Kun järjestykseen kiinnitetään huomiota, voidaan k alkioita n :stä valita $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ tavalla.
- Koska järjestämättömät k alkioita voidaan järjestää $k!$ tavalla, on tämä sama kuin $k! \binom{n}{k}$. Siis

$$\begin{aligned} k! \binom{n}{k} &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!} \\ \Rightarrow \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

Esimerkki

$$\binom{40}{7} = \frac{40!}{7! \cdot 33!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34}{7!} = 18643560$$

Esimerkkejä

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1,$$

Esimerkkejä

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1,$$

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1! \cdot (m-1)!} = \frac{m \cdot (m-1)!}{(m-1)!} = m,$$

Esimerkkejä

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1,$$

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1! \cdot (m-1)!} = \frac{m \cdot (m-1)!}{(m-1)!} = m,$$

$$\binom{m}{2} = \frac{m!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1) \cdot (m-2)!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1)}{2},$$

Esimerkkejä

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1,$$

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1! \cdot (m-1)!} = \frac{m \cdot (m-1)!}{(m-1)!} = m,$$

$$\binom{m}{2} = \frac{m!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1) \cdot (m-2)!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1)}{2},$$

$$\binom{m}{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!(m-(m-k))!} = \frac{m!}{(m-k)!k!} = \binom{m}{k},$$

Esimerkkejä

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0! \cdot (m-0)!} = \frac{m!}{m!} = 1,$$

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{1! \cdot (m-1)!} = \frac{m \cdot (m-1)!}{(m-1)!} = m,$$

$$\binom{m}{2} = \frac{m!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1) \cdot (m-2)!}{2 \cdot (m-2)!} = \frac{m(m-1)}{2},$$

$$\binom{m}{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!(m-(m-k))!} = \frac{m!}{(m-k)!k!} = \binom{m}{k},$$

$$\binom{m}{m} = \binom{m}{m-m} = \binom{m}{0} = 1$$

Lause

Jos $1 \leq n \leq m - 1$, niin

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}.$$

Lause

Jos $1 \leq n \leq m-1$, niin

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}.$$

Pascalin kolmio

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
 1 & 3 & & 3 & & 1 & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 & & \dots & & & &
 \end{array}$$

Binomikerroin

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb$$

Binomikerroin

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

Binomikerroin

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(aa + ab + ba + bb) \\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb\end{aligned}$$

Binomikerroin

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\&= (a + b)(aa + ab + ba + bb) \\&= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \\&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Binomikerroin

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\&= (a + b)(aa + ab + ba + bb) \\&= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \\&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$(a + b)^n = aa \dots aa + aa \dots ab + aa \dots ba + \dots + bb \dots bb$$

Binomikerroin

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= aa \dots aa + aa \dots ab + aa \dots ba + \dots + bb \dots bb \\ &= \sum_{k=0}^n C(n, k) a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

Binomikerroin

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= aa \dots aa + aa \dots ab + aa \dots ba + \dots + bb \dots bb \\ &= \sum_{k=0}^n C(n, k) a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

- $C(n, k)$ on niiden yhteenlaskettavien määrä, jossa on k kpl b :tä.

Binomikerroin

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= aa \dots aa + aa \dots ab + aa \dots ba + \dots + bb \dots bb \\ &= \sum_{k=0}^n C(n, k) a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

- $C(n, k)$ on niiden yhteenlaskettavien määrä, jossa on k kpl b :tä.
- Kuinka monella tavalla voidaan valita n -pituisen jonon k jonon jäsentä b :ksi (lopun a :ksi)?

Binomikerroin

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= aa \dots aa + aa \dots ab + aa \dots ba + \dots + bb \dots bb \\ &= \sum_{k=0}^n C(n, k) a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

- $C(n, k)$ on niiden yhteenlaskettavien määrä, jossa on k kpl b :tä.
- Kuinka monella tavalla voidaan valita n -pituisen jonon k jonon jäsentä b :ksi (loput a :ksi)?
- $C(n, k) = \binom{n}{k}$.

Newtonin binomikaava

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Newtonin binomikaava

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- Perusteltu edellä kombinatorisesti

Newtonin binomikaava

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- Perusteltu edellä kombinatorisesti
- Mahdollista todistaa myös induktiolla

Newtonin binomikaava

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- Perusteltu edellä kombinatorisesti
- Mahdollista todistaa myös induktiolla
- Induktiotodistus sisältää monia merkillepantavia seikkoja!