

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2017

Binomikerroin

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ilmaisee monellako tavalla $n:n$ alkion joukosta voidaan valita k alkia.

Binomikerroin

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ilmaisee monellako tavalla $n:n$ alkion joukosta voidaan valita k alkioita.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Newtonin binomikaava

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= aa \dots aa + aa \dots ab + aa \dots ba + \dots + bb \dots bb \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

Newtonin binomikaava

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= aa \dots aa + aa \dots ab + aa \dots ba + \dots + bb \dots bb \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

- Perusteltu edellä kombinatorisesti

Newtonin binomikaava

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= aa \dots aa + aa \dots ab + aa \dots ba + \dots + bb \dots bb \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

- Perusteltu edellä kombinatorisesti
- Mahdollista todistaa myös induktiolla

Newtonin binomikaava

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= aa \dots aa + aa \dots ab + aa \dots ba + \dots + bb \dots bb \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

- Perusteltu edellä kombinatorisesti
- Mahdollista todistaa myös induktiolla
- Induktiotodistus sisältää monia merkillepantavia seikkoja!

Kolmioepäyhtälö

- $|x + y| \leq |x| + |y|$

Kolmioepäyhtälö

- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$

Kolmioepäyhtälö

- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$
- $|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|.$

Esimerkki

Funktioita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

Esimerkki

Funktioita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- $f(x) = x^2 + 3x + 2$

Esimerkki

Funktioita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- $f(x) = x^2 + 3x + 2$
- $f(x) = |x|$

Esimerkki

Funktioita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- $f(x) = x^2 + 3x + 2$
- $f(x) = |x|$
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{jos } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$

Esimerkki

Funktioita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- $f(x) = x^2 + 3x + 2$
- $f(x) = |x|$
- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{jos } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$

Funktio

Miten "funktio" määritellään?

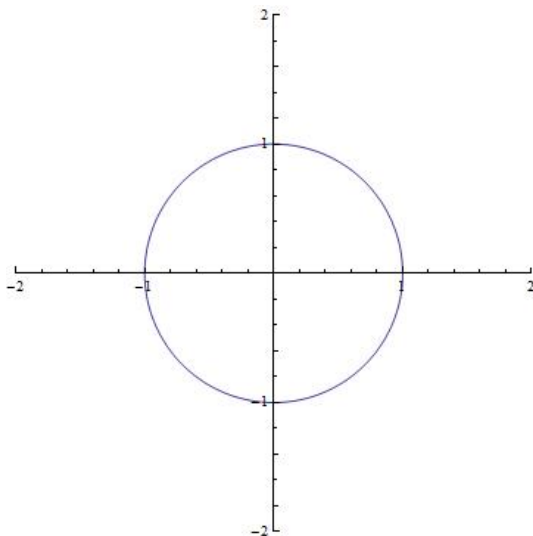
Eukleides: ΣΤΟΙΧΕΙΑ

- Algebra
- Geometria



René Descartes (latin. *Renatus Cartesius*, 1596–1650)

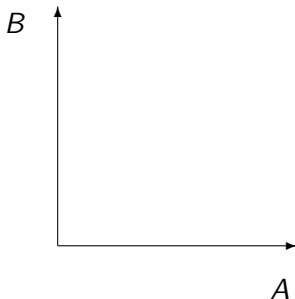
Kartesinen koordinaatisto



$$x^2 + y^2 = 1$$

Yleistys

xy -tason sijaan AB -taso, missä A ja B ovat mitä tahansa joukkoja



Järjestetty parit

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff (a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2)$$

Järjestetyt parit

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff (a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2)$$

Järjestetyt kolmikot (a_1, a_2, a_3) , nelikot (a_1, a_2, a_3, a_4) jne. samoin.

Järjestetyt parit

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff (a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2)$$

Järjestetyt kolmikot (a_1, a_2, a_3) , nelikot (a_1, a_2, a_3, a_4) jne. samoin.

Karteeminen tulo

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Järjestetyt parit

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff (a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2)$$

Järjestetyt kolmikot (a_1, a_2, a_3) , nelikot (a_1, a_2, a_3, a_4) jne. samoin.

Karteeminen tulo

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\} \text{ jne.}$$

Järjestetyt parit

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff (a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2)$$

Järjestetyt kolmikot (a_1, a_2, a_3) , nelikot (a_1, a_2, a_3, a_4) jne. samoin.

Karteeminen tulo

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\} \text{ jne.}$$

Alkioista a , b , jne. voidaan käyttää nimitystä A -koordinaatti, B -koordinaatti, jne.

Esimerkki

$A = \{1, 2\}$ ja $B = \{1, 2, 3\}$.

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

Esimerkki

$A = \{1, 2\}$ ja $B = \{1, 2, 3\}$.

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Esimerkki

$A = \{1, 2\}$ ja $B = \{1, 2, 3\}$.

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Esimerkki

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

Esimerkki

$A = \{1, 2\}$ ja $B = \{1, 2, 3\}$.

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Esimerkki

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

jne.

Esimerkki

$A = \{1, 2\}$ ja $B = \{1, 2, 3\}$.

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Esimerkki

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

jne. Merkitään $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, jne.

Yleisemmin $A \times B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Yleisemmin $A \times B$

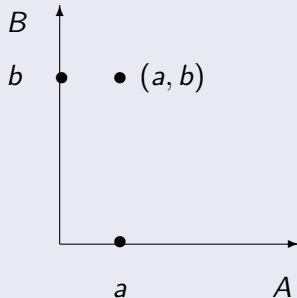
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Alkioista a ja b voidaan käyttää nimitystä A -koordinaatti ja B -koordinaatti.

Yleisemmin $A \times B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Alkioista a ja b voidaan käyttää nimitystä A -koordinaatti ja B -koordinaatti.



"Määritelmä"

Relaatio joukosta A joukkoon B on (mustavalko)kuva AB -tasossa

"Määritelmä"

Relaatio joukosta A joukkoon B on (mustavalko)kuva AB -tasossa

Relaatio

- Vain mustat kuvapistheet luetellaan.

"Määritelmä"

Relaatio joukosta A joukkoon B on (mustavalko)kuva AB -tasossa

Relaatio

- Vain mustat kuvapisteen luetellaan.
- Pisteet ovat järjestettyjä pareja $(a, b) \in A \times B$

"Määritelmä"

Relaatio joukosta A joukkoon B on (mustavalko)kuva AB -tasossa

Relaatio

- Vain mustat kuvapisteen luetellaan.
- Pisteet ovat järjestettyjä pareja $(a, b) \in A \times B$
- Kuva on joukko mustia pisteitä, siis järjestettyjä pareja (a, b) , siis $A \times B$:n osajoukko

"Määritelmä"

Relaatio joukosta A joukkoon B on (mustavalko)kuva AB -tasossa

Relaatio

- Vain mustat kuvapisteeet luetellaan.
- Pisteet ovat järjestettyjä pareja $(a, b) \in A \times B$
- Kuva on joukko mustia pisteitä, siis järjestettyjä pareja (a, b) , siis $A \times B$:n osajoukko

Määritelmä

Relaatio joukosta A joukkoon B on karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko.

Merkintöjä

$R \subseteq A \times B$ merkitään myös $R : A \rightarrow B$.

Merkintöjä

$R \subseteq A \times B$ merkitään myös $R : A \rightarrow B$. Sanotaan, että R on relaatio joukosta A joukkoon B .

Merkintöjä

$R \subseteq A \times B$ merkitään myös $R : A \rightarrow B$. Sanotaan, että R on relaatio joukosta A joukkoon B . Joukkoa A kutsutaan *lähtöjoukoksi* ja B :tä *maalijoukoksi*.

Merkintöjä

$R \subseteq A \times B$ merkitään myös $R : A \rightarrow B$. Sanotaan, että R on relaatio joukosta A joukkoon B . Joukkoa A kutsutaan *lähtöjoukoksi* ja B :tä *maalijoukoksi*. Jos $B = A$, sanotaan, että R on joukon A *binäärinen relaatio*.

Merkintöjä

$R \subseteq A \times B$ merkitään myös $R : A \rightarrow B$. Sanotaan, että R on relaatio joukosta A joukkoon B . Joukkoa A kutsutaan *lähtöjoukoksi* ja B :tä *maalijoukoksi*. Jos $B = A$, sanotaan, että R on joukon A *binäärinen relaatio*.

Merkintöjä

Jos R on relaatio joukosta A joukkoon B ja $(a, b) \in R$, sanotaan, että b on a :n *kuva* ja että a on b :n *alkukuva* ja että a *kuvautuu* b :ksi relaatiossa R .

Merkintöjä

$R \subseteq A \times B$ merkitään myös $R : A \rightarrow B$. Sanotaan, että R on relaatio joukosta A joukkoon B . Joukkoa A kutsutaan *lähtöjoukoksi* ja B :tä *maalijoukoksi*. Jos $B = A$, sanotaan, että R on joukon A *binäärinen relaatio*.

Merkintöjä

Jos R on relaatio joukosta A joukkoon B ja $(a, b) \in R$, sanotaan, että b on a :n *kuva* ja että a on b :n *alkukuva* ja että a *kuvautuu* b :ksi relaatiossa R . Tällöin käytetään seuraavia merkintöjä:

Merkintöjä

$R \subseteq A \times B$ merkitään myös $R : A \rightarrow B$. Sanotaan, että R on relaatio joukosta A joukkoon B . Joukkoa A kutsutaan *lähtöjoukoksi* ja B :tä *maalijoukoksi*. Jos $B = A$, sanotaan, että R on joukon A *binäärinen relaatio*.

Merkintöjä

Jos R on relaatio joukosta A joukkoon B ja $(a, b) \in R$, sanotaan, että b on a :n *kuva* ja että a on b :n *alkukuva* ja että a *kuvautuu* b :ksi relaatiossa R . Tällöin käytetään seuraavia merkintöjä:

- $(a, b) \in R$ (Perustuu määritelmään)
- $R(a, b)$ (Esim. predikaattilogiikassa)
- aRb (ns. Infix-merkintä)
- $a \xrightarrow{R} b$ (ns. nuolikaavio)

Merkintöjä

Joukko $\{a \in A \mid (\exists b \in B)(a, b) \in R\}$ on relaation R *määrittelyjoukko*

Merkintöjä

Joukko $\{a \in A \mid (\exists b \in B)(a, b) \in R\}$ on relaation R *määrittelyjoukko*

Merkintöjä

Joukko $\{b \in B \mid (\exists a \in A)(a, b) \in R\}$ on relaation R *kuvajoukko* tai *arvojoukko*

Esimerkkejä

- Merkinnät $2 < 3$, $< (2, 3)$ ja $(2, 3) \in <$

Esimerkkejä

- Merkinnät $2 < 3$, $< (2, 3)$ ja $(2, 3) \in <$
- Diagonaali- eli identiteetti- eli yhtäsuuruusrelaatio
 $D = \{(a, a) \mid a \in A\}.$

Yhdiste eli relaatiotulo

Olkoot $R : A \rightarrow B$ ja $S : B \rightarrow C$ relaatioita. Niiden *yhdiste* on relaatio $A \rightarrow C$

$$S \circ R = \{(a, c) \mid (\exists b \in B) (a \xrightarrow{R} b \wedge b \xrightarrow{S} c)\}.$$

Yhdiste eli relaatiotulo

Olkoot $R : A \rightarrow B$ ja $S : B \rightarrow C$ relaatioita. Niiden *yhdiste* on relaatio $A \rightarrow C$

$$S \circ R = \{(a, c) \mid (\exists b \in B) (a \xrightarrow{R} b \wedge b \xrightarrow{S} c)\}.$$

Käänteisrelaatio

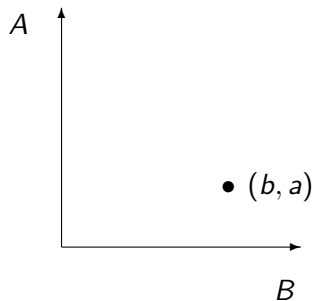
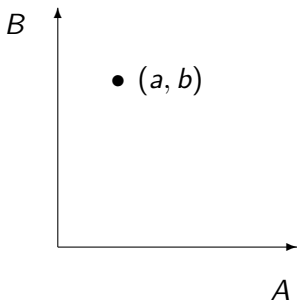
Jos $R : A \rightarrow B$, määritellään $R^{-1} : B \rightarrow A$ seuraavasti:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R^{-1}$$

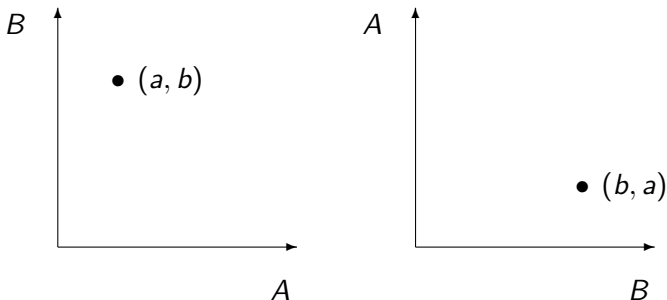
Käänteisrelaation kuvaaja

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R^{-1}$$



Käänteisrelaation kuvaaja

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R^{-1}$$



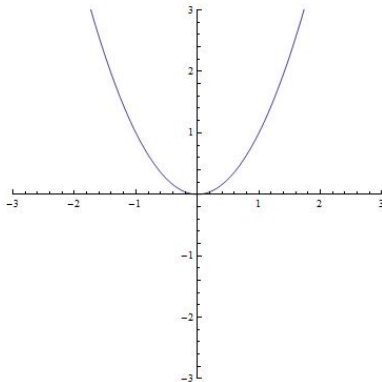
Jos $A = B$, saadaan R^{-1} :n kuvaaja peilikuvana suoran $a = b$ suhteen

$$R = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$R = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad R^{-1} = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Käänteisrelaation kuvaaja

$$R = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad R^{-1} = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$



Käänteisrelaation kuvaaja

$$R = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad R^{-1} = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

