

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2017

Relaatio, Funktio, Bijektio

- Relaatio $A \rightarrow B$ on karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko.

Relaatio, Funktio, Bijektio

- Relaatio $A \rightarrow B$ on karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko.
- Funktio $A \rightarrow B$ on relaatio, jossa jokaisella joukon A alkiolla on tasan yksi kuva.

Relaatio, Funktio, Bijektio

- Relaatio $A \rightarrow B$ on karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko.
- Funktio $A \rightarrow B$ on relaatio, jossa jokaisella joukon A alkiolla on tasan yksi kuva.
- Injektio $A \rightarrow B$ on funktio, jossa eri alkukuvilla on eri kuvat.

Relaatio, Funktio, Bijektio

- Relaatio $A \rightarrow B$ on karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko.
- Funktio $A \rightarrow B$ on relaatio, jossa jokaisella joukon A alkiolla on tasan yksi kuva.
- Injektio $A \rightarrow B$ on funktio, jossa eri alkukuvilla on eri kuvat.
- Surjektio $A \rightarrow B$ on funktio, jossa jokaisella joukon B alkiolla on alkukuva A :ssa.

Relaatio, Funktio, Bijektio

- Relaatio $A \rightarrow B$ on karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko.
- Funktio $A \rightarrow B$ on relaatio, jossa jokaisella joukon A alkiolla on tasan yksi kuva.
- Injektio $A \rightarrow B$ on funktio, jossa eri alkukuvilla on eri kuvat.
- Surjektio $A \rightarrow B$ on funktio, jossa jokaisella joukon B alkiolla on alkukuva A :ssa.
- Bijektio $A \rightarrow B$ on funktio joka on sekä injektio että surjektio.

Relaatio, Funktio, Bijektio

- Relaatio $A \rightarrow B$ on karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko.
- Funktio $A \rightarrow B$ on relaatio, jossa jokaisella joukon A alkiolla on tasan yksi kuva.
- Injektio $A \rightarrow B$ on funktio, jossa eri alkukuvilla on eri kuvat.
- Surjektio $A \rightarrow B$ on funktio, jossa jokaisella joukon B alkiolla on alkukuva A :ssa.
- Bijektio $A \rightarrow B$ on funktio joka on sekä injektio että surjektio.

Huomautus

- Ainoastaan bijektiivisten funktioiden käänteisrelaatio on funktio.

Relaatio, Funktio, Bijektio

- Relaatio $A \rightarrow B$ on karteesisen tulon $A \times B$ osajoukko.
- Funktio $A \rightarrow B$ on relaatio, jossa jokaisella joukon A alkiolla on tasan yksi kuva.
- Injektio $A \rightarrow B$ on funktio, jossa eri alkukuvilla on eri kuvat.
- Surjektio $A \rightarrow B$ on funktio, jossa jokaisella joukon B alkiolla on alkukuva A :ssa.
- Bijektio $A \rightarrow B$ on funktio joka on sekä injektio että surjektio.

Huomautus

- Ainoastaan bijektiivisten funktioiden käänteisrelaatio on funktio.
- $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.

Luonnehdinta

- Funktio on relaatio, jonka kuvaajan jokainen pystysuora leikkaa tasan kerran.

Luonnehdinta

- Funktio on relaatio, jonka kuvaajan jokainen pystysuora leikkaa tasan kerran.
- Injektio on funktio, jonka kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa korkeintaan kerran.

Luonnehdinta

- Funktio on relaatio, jonka kuvaajan jokainen pystysuora leikkaa tasan kerran.
- Injektio on funktio, jonka kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa korkeintaan kerran.
- Surjektio on funktio, jonka kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa ainakin kerran.

Luonnehdinta

- Funktio on relaatio, jonka kuvaajan jokainen pystysuora leikkaa tasan kerran.
- Injektio on funktio, jonka kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa korkeintaan kerran.
- Surjektio on funktio, jonka kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa ainakin kerran.
- Bijektio on funktio, jonka kuvaajan jokainen vaakasuora leikkaa tasan kerran.

Määritelmä

Joukoilla A ja B on sama *kardinaliteetti* jos on olemassa bijektio $f : A \rightarrow B$. Tällöin sanotaan myös, että A ja B ovat *yhtä mahtavat*.

Määritelmä

Joukoilla A ja B on sama *kardinaliteetti* jos on olemassa bijektio $f : A \rightarrow B$. Tällöin sanotaan myös, että A ja B ovat *yhtä mahtavat*.

Määritelmä

Jos joukko A on yhtä mahtava joukon $\mathbb{N}$ kanssa, sanotaan että A on *numeroituva*. Tällöin on siis olemassa bijektio $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, jolloin joukon A alkiot voidaan esittää muodossa $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... (numerointi).

Määritelmä

Joukoilla A ja B on sama *kardinaliteetti* jos on olemassa bijektio $f : A \rightarrow B$. Tällöin sanotaan myös, että A ja B ovat *yhtä mahtavat*.

Määritelmä

Jos joukko A on yhtä mahtava joukon $\mathbb{N}$ kanssa, sanotaan että A on *numeroituva*. Tällöin on siis olemassa bijektio $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, jolloin joukon A alkiot voidaan esittää muodossa $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... (numerointi).

Lause

- $\mathbb{Z}$ on numeroituva
- $\mathbb{Q}$ on numeroituva
- $\mathbb{R}$ ei ole numeroituva

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ kutsutaan *reaalifunktioksi*, jos $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ kutsutaan *reaalifunktioksi*, jos $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Esitystapoja

- Implisiittimuoto $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, x \in [-1, 1]$

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ kutsutaan *reaalifunktioksi*, jos $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Esitystapoja

- Implisiittimuoto $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, x \in [-1, 1]$
- Eksplisiittimuoto $y = \sqrt{1 - x^2}$

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ kutsutaan *reaalifunktioksi*, jos $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Esitystapoja

- Implisiittimuoto $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, x \in [-1, 1]$
- Eksplisiittimuoto $y = \sqrt{1 - x^2}$
- Parametrimuoto $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$

Määritelmä

Funktiota $f : A \rightarrow B$ kutsutaan *reaalifunktioksi*, jos $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Esitystapoja

- Implisiittimuoto $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, x \in [-1, 1]$
- Eksplisiittimuoto $y = \sqrt{1 - x^2}$
- Parametrimuoto $\{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$

Sopimus

Eksplisiittimuodossa määrittelyjoukoksi valitaan laajin mahdollinen, jos ei toisin mainita.

Määritelmä

Olkoon A reaalifunktion f määrittelyjoukon osajoukko. Tällöin sanotaan, että f on *kasvava* joukossa A , jos $a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$. Funktio f on *aidosti kasvava*, jos $a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2)$. Vastaavasti määritellään *vähenevä* ja *aidosti vähenevä* funktio.

Määritelmä

Olkoon A reaalifunktion f määrittelyjoukon osajoukko. Tällöin sanotaan, että f on *kasvava* joukossa A , jos $a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$. Funktio f on *aidosti kasvava*, jos $a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2)$. Vastaavasti määritellään *vähenevä* ja *aidosti vähenevä* funktio.

Määritelmä

Joukossa A määritelty funktio f on *monotoninen* mikäli se on joko kasvava tai vähenevä. Samoin sanotaan, että f on *aidosti monotoninen*, mikäli f on joko aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Määritelmä

Olkoon A reaalifunktion f määrittelyjoukon osajoukko. Tällöin sanotaan, että f on *kasvava* joukossa A , jos $a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$. Funktio f on *aidosti kasvava*, jos $a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2)$. Vastaavasti määritellään *vähenevä* ja *aidosti vähenevä* funktio.

Määritelmä

Joukossa A määritelty funktio f on *monotoninen* mikäli se on joko kasvava tai vähenevä. Samoin sanotaan, että f on *aidosti monotoninen*, mikäli f on joko aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Lause

Aidosti monotoninen funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on injektio.

Määritelmä

Olkoon A reaalifunktion f määrittelyjoukon osajoukko. Tällöin sanotaan, että f on *kasvava* joukossa A , jos $a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$. Funktio f on *aidosti kasvava*, jos $a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2)$. Vastaavasti määritellään *vähenevä* ja *aidosti vähenevä* funktio.

Määritelmä

Joukossa A määritelty funktio f on *monotoninen* mikäli se on joko kasvava tai vähenevä. Samoin sanotaan, että f on *aidosti monotoninen*, mikäli f on joko aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Lause

Aidosti monotoninen funktio $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ on injektio.

Esimerkki

Esimerkki 1.49

Polynomifunktiot

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \text{ missä } a_i \in \mathbb{R}$$

Polynomifunktiot

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \text{ missä } a_i \in \mathbb{R}$$

Rationaaliset operaatiot

Jos $c \in \mathbb{R}$ ja f ja g ovat reaalifunktiota, voidaan määritellä uudet reaalifunktiot *skalaarimonikerta*, *summa/erotus*, *tulo* ja *osamäärä* näiden avulla seuraavasti:

- cf : $(cf)(x) = cf(x)$
- $f \pm g$: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- fg : $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- $\frac{f}{g}$: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Määritelmä

Reaalifunktio on *rationaalifunktio*, jos se saadaan funktioista $f(x) = 1$ ja $f(x) = x$ rationaalisilla operaatioilla.

Määritelmä

Reaalifunktio on *rationaalifunktio*, jos se saadaan funktioista $f(x) = 1$ ja $f(x) = x$ rationaalisilla operaatioilla.

Lause

Kaikki rationaalifunktiot voidaan esittää kahden polynomin osamääränä.

Määritelmä

Reaalifunktio on *rationaalifunktio*, jos se saadaan funktioista $f(x) = 1$ ja $f(x) = x$ rationaalisilla operaatioilla.

Lause

Kaikki rationaalifunktiot voidaan esittää kahden polynomin osamääränä.

Määritelmä

Reaalifunktio f on *algebrallinen*, jos $y = f(x)$ voidaan määritellä kahden muuttujan polynomiyhtälöllä $P(x, y) = 0$ tai saadaan tällaisen polynomiyhtälön määrittelemän relaation rajoittumana (rajoitetaan lähtö- tai maalijoukkoa).

Esimerkki

- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ on algebrallinen funktio, koska se on kahden muuttujan polynomiyhtälön $x^2 + y^2 - 1 = 0$ määrittelemän relaation rajoittuma, jossa $x \in [-1, 1]$ ja $y \geq 0$.

Esimerkki

- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ on algebrallinen funktio, koska se on kahden muuttujan polynomiyhtälön $x^2 + y^2 - 1 = 0$ määrittelemän relaation rajoittuma, jossa $x \in [-1, 1]$ ja $y \geq 0$.
- Jokainen rationaalifunktio $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ on algebrallinen, koska se voidaan määritellä polynomiyhtälöllä $q(x)y - p(x) = 0$.

Esimerkki

- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ on algebrallinen funktio, koska se on kahden muuttujan polynomiyhtälön $x^2 + y^2 - 1 = 0$ määrittelemän relaation rajoittuma, jossa $x \in [-1, 1]$ ja $y \geq 0$.
- Jokainen rationaalifunktio $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ on algebrallinen, koska se voidaan määritellä polynomiyhtälöllä $q(x)y - p(x) = 0$.
- Funktio $f(x) = |x|$ on algebrallinen, koska se on polynomiyhtälön $y^2 - x^2 = 0$ määrittelemän relaation rajoittuma.