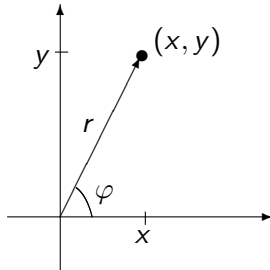


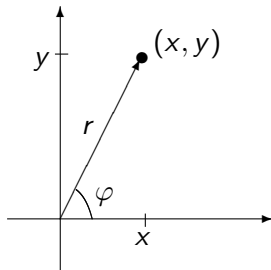
Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

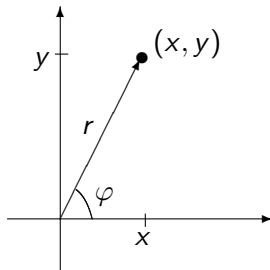
2017





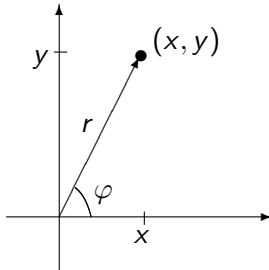
Etäisyys ja vaihekulma

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$



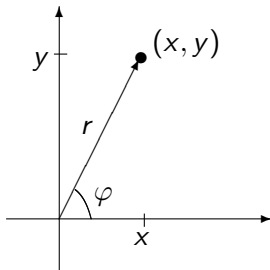
Etäisyys ja vaihekulma

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\tan \varphi = \frac{y}{x}$.



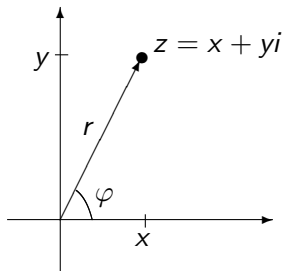
Etäisyys ja vaihekulma

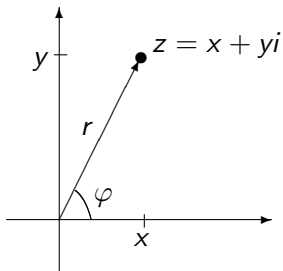
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\tan \varphi = \frac{y}{x}$. Jos $x = 0$, valitaan $\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2}, & \text{kun } y > 0 \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} & \text{kun } y < 0. \end{cases}$



Etäisyys ja vaihekulma

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\tan \varphi = \frac{y}{x}$. Jos $x = 0$, valitaan $\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2}, & \text{kun } y > 0 \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} & \text{kun } y < 0. \end{cases}$
- Vaihekulma voidaan valita $\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{jos } x > 0. \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$





Polaariesitys ($r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

joten

$$z = x + yi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Kertolasku

Olkoon $z_k = r_k(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$, $k \in \{0, 1\}$. Tällöin

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Kertolasku

Olkoon $z_k = r_k(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$, $k \in \{0, 1\}$. Tällöin

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

"itseisarvot kerrotaan ja vaihekulmat lisätään"

Kertolasku

Olkoon $z_k = r_k(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$, $k \in \{0, 1\}$. Tällöin

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

"itseisarvot kerrotaan ja vaihekulmat lisätään"

de Moivren kaava (induktiolla)

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$



Leonhard Euler (1707–1783)

Eulerin kaava

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

($e = 2,718281828459045 \dots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Eulerin kaava

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

($e = 2,718281828459045 \dots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Esimerkki

- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$

Eulerin kaava

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

($e = 2,718281828459045 \dots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Esimerkki

- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$

Eulerin kaava

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

($e = 2,718281828459045\dots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Esimerkki

- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$
- $e^{i \cdot n\pi} = \cos(n\pi) + i \sin(n\pi)$

Eulerin kaava

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

($e = 2,718281828459045 \dots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Esimerkki

- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$
- $e^{i \cdot n\pi} = \cos(n\pi) + i \sin(n\pi) = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}$

Eulerin kaava

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

($e = 2,718281828459045 \dots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Esimerkki

- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$
- $e^{i \cdot n\pi} = \cos(n\pi) + i \sin(n\pi) = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}$
- $e^{2\pi i n} = (-1)^{2n} = 1, n \in \mathbb{Z}.$

Eulerin kaava

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

($e = 2,718281828459045 \dots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Esimerkki

- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$
- $e^{i \cdot n\pi} = \cos(n\pi) + i \sin(n\pi) = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}$
- $e^{2\pi i n} = (-1)^{2n} = 1, n \in \mathbb{Z}.$

Polaariesitys II

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Eulerin kaava

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

($e = 2,718281828459045 \dots$ on luonnollisen logaritmin kantaluku)

Esimerkki

- $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$
- $e^{i \cdot n\pi} = \cos(n\pi) + i \sin(n\pi) = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}$
- $e^{2\pi i n} = (-1)^{2n} = 1, n \in \mathbb{Z}.$

Polaariesitys II

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}.$$

Trigonometriset funktiot ja eksponenttifunktio

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\e^{-ix} &= \cos x - i \sin x\end{aligned}$$

Yhteen- ja vähennyslaskulla saadaan

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\end{aligned}$$

Määritelmä

- $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
- $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Määritelmä

- $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
- $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Areafunktiot

Edellisten käänteisfunktiot, lähtö- ja maalijoukko sopivasti leikattuna. Merkinnät arsinh , arcosh , artanh .

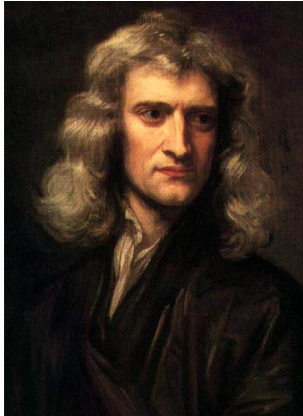


Arkhimedes (n. 287–212 eKr)

Määrittä pinta-aloja ja tilavuuksia itse kehittämänsä varhaisen integraalilaskennan avulla



René Descartes (Renatus Cartesius, 1596–1650)
Geometrian ja algebran yhdistäminen.



Sir Isaac Newton (1642–1727)

Differentiaali- ja integraalilaskenta fysiikkaa varten



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)
Differentiaali- ja integraalilaskenta ”periaatteen vuoksi”



Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)
Differentiaali- ja integraalilaskennan modernisointi

Matemaattinen merkitys

- Differentiaalilaskenta: Suureen ja sen muutoksen samanaikainen käsittely

Matemaattinen merkitys

- Differentiaalilaskenta: Suureen ja sen muutoksen samanaikainen käsittely
- Integraalilaskenta: Objektin esittäminen pistemäisten osiensa summana

Matemaattinen merkitys

- Differentiaalilaskenta: Suureen ja sen muutoksen samanaikainen käsittely
- Integraalilaskenta: Objektin esittäminen pistemäisten osiensa summana

Yhteiskunnallinen merkitys

- Luonnontieteiden kehitys

Matemaattinen merkitys

- Differentiaalilaskenta: Suureen ja sen muutoksen samanaikainen käsittely
- Integraalilaskenta: Objektin esittäminen pistemäisten osiensa summana

Yhteiskunnallinen merkitys

- Luonnontieteiden kehitys
- Tekniikan kehitys

Matemaattinen merkitys

- Differentiaalilaskenta: Suureen ja sen muutoksen samanaikainen käsittely
- Integraalilaskenta: Objektin esittäminen pistemäisten osiensa summana

Yhteiskunnallinen merkitys

- Luonnontieteiden kehitys
- Tekniikan kehitys
- Maailmankuvan kehitys

- Jos $A \leq C$ ja $B \leq D$, niin $A + B \leq C + D$.

- Jos $A \leq C$ ja $B \leq D$, niin $A + B \leq C + D$.
- Jos $0 \leq A \leq C$ ja $0 \leq B \leq D$, niin $AB \leq CD$

- Jos $A \leq C$ ja $B \leq D$, niin $A + B \leq C + D$.
- Jos $0 \leq A \leq C$ ja $0 \leq B \leq D$, niin $AB \leq CD$
- Jos $0 \leq A \leq C$ ja $B \geq D > 0$, niin $\frac{A}{B} \leq \frac{C}{D}$

- Jos $A \leq C$ ja $B \leq D$, niin $A + B \leq C + D$.
- Jos $0 \leq A \leq C$ ja $0 \leq B \leq D$, niin $AB \leq CD$
- Jos $0 \leq A \leq C$ ja $B \geq D > 0$, niin $\frac{A}{B} \leq \frac{C}{D}$
- $|A + B| \leq |A| + |B|$ (Kolmioepäyhtälö)

Rationaaliluvut $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

Rationaaliluvut $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$
- Täyttää lukusuoran tiheästi: $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ välissä aina esim.
keskiarvo $\frac{ad+bc}{2bd}$

Rationaaliluvut $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$
- Täyttää lukusuoran tiheästi: $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ välissä aina esim. keskiarvo $\frac{ad+bc}{2bd}$
- Ei pienintä positiivista lukua: Jos $a > 0$, ovat $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \dots$ vielä pienempiä

Rationaaliluvut $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$
- Täyttää lukusuoran tiheästi: $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ välissä aina esim. keskiarvo $\frac{ad+bc}{2bd}$
- Ei pienintä positiivista lukua: Jos $a > 0$, ovat $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \dots$ vielä pienempiä
- Eivät täytä lukusuoraa aukottomasti (Pythagoras): Neliön lävistäjä ei ole joukossa $\mathbb{Q}$, jos sivun pituus on 1.

Rationaaliluvut $\mathbb{Q}$

- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$
- Täyttää lukusuoran tiheästi: $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ välissä aina esim. keskiarvo $\frac{ad+bc}{2bd}$
- Ei pienintä positiivista lukua: Jos $a > 0$, ovat $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}, \dots$ vielä pienempiä
- Eivät täytä lukusuoraa aukottomasti (Pythagoras): Neliön lävistäjä ei ole joukossa $\mathbb{Q}$, jos sivun pituus on 1.
- Nykyaikainen muotoilu: Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$.

Määritelmä

Lukuja, jotka eivät ole joukossa $\mathbb{Q}$, sanotaan *irrationaalisiksi*.

Määritelmä

Lukuja, jotka eivät ole joukossa $\mathbb{Q}$, sanotaan *irrationaalisiksi*.

$$x^2 = 2$$

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisu joukossa $\mathbb{R}$?

Määritelmä

Lukuja, jotka eivät ole joukossa $\mathbb{Q}$, sanotaan *irrationaalisiksi*.

$$x^2 = 2$$

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisu joukossa $\mathbb{R}$?
- Miksi? Mitä $\sqrt{2}$ tarkoittaa?

Määritelmä

Lukuja, jotka eivät ole joukossa $\mathbb{Q}$, sanotaan *irrationaalisiksi*.

$$x^2 = 2$$

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisu joukossa $\mathbb{R}$?
- Miksi? Mitä $\sqrt{2}$ tarkoittaa?
- Mitä reaaliluvut ovat?

Määritelmä

Lukuja, jotka eivät ole joukossa $\mathbb{Q}$, sanotaan *irrationaalisiksi*.

$$x^2 = 2$$

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisu joukossa $\mathbb{R}$?
- Miksi? Mitä $\sqrt{2}$ tarkoittaa?
- Mitä reaaliluvut ovat?

Reaaliluvut $\mathbb{R}$

- Aksiomaattinen määritelmä (vrt. aiemmat luennot)

Määritelmä

Lukuja, jotka eivät ole joukossa $\mathbb{Q}$, sanotaan *irrationaalisiksi*.

$$x^2 = 2$$

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisu joukossa $\mathbb{R}$?
- Miksi? Mitä $\sqrt{2}$ tarkoittaa?
- Mitä reaaliluvut ovat?

Reaaliluvut $\mathbb{R}$

- Aksiomaattinen määritelmä (vrt. aiemmat luennot)
- Ominaisuudet johdettavissa aksioomista

Määritelmä

Lukuja, jotka eivät ole joukossa $\mathbb{Q}$, sanotaan *irrationaalisiksi*.

$$x^2 = 2$$

- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisu joukossa $\mathbb{R}$?
- Miksi? Mitä $\sqrt{2}$ tarkoittaa?
- Mitä reaaliluvut ovat?

Reaaliluvut $\mathbb{R}$

- Aksiomaattinen määritelmä (vrt. aiemmat luennot)
- Ominaisuudet johdettavissa aksioomista
- Lukujen $\sqrt{2}$, $\sqrt[n]{a}$ jne. olemassaolo johdettavissa aksioomista

Määritelmä

Joukon $S \subseteq \mathbb{R}$ *maksimi* määritellään

$$M = \max S \Leftrightarrow (M \in S) \wedge (\forall x \in S)(x \leq M).$$

Vastaavasti määritellään joukon S minimi.

Määritelmä

Reaalilukujoukko A on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa sellainen luku M , että $a \leq M$ pätee kaikille $a \in A$. Lukua M kutsutaan joukon M *ylärajaksi*

Määritelmä

Reaalilukujoukko A on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa sellainen luku M , että $a \leq M$ pätee kaikille $a \in A$. Lukua M kutsutaan joukon M *ylärajaksi*

Määritelmä

Joukon A pienintä ylärajaa S merkitään $S = \sup A$ ja kutsutaan *supremumiksi*.

Määritelmä

Reaalilukujoukko A on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa sellainen luku M , että $a \leq M$ pätee kaikille $a \in A$. Lukua M kutsutaan joukon M *ylärajaksi*

Määritelmä

Joukon A pienintä ylärajaa S merkitään $S = \sup A$ ja kutsutaan *supremumiksi*.

Lause

$$S = \sup A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \leq S) \wedge (\forall \epsilon)(\epsilon > 0 \rightarrow (\exists x \in A)(x > S - \epsilon))$$

Täydellisyysaksiooma

Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on olemassa pienin yläraja eli supremum.

Täydellisyysaksiooma

Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on olemassa pienin yläraja eli supremum.

Esimerkki

Joukoilla

$$A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\}$$

ja

$$B = \{3, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \frac{31415}{10000}, \frac{314159}{100000}, \dots\}$$

on pienin yläraja.

Täydellisyysaksiooma

Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on olemassa pienin yläraja eli supremum.

Esimerkki

Joukoilla

$$A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\}$$

ja

$$B = \{3, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \frac{31415}{10000}, \frac{314159}{100000}, \dots\}$$

on pienin yläraja. $\sup A = 1$ ja $\sup B = \pi$.