

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2017

Suuruusarvioita

- Jos $A \leq C$ ja $B \leq D$, niin $A + B \leq C + D$.
- Jos $0 \leq A \leq C$ ja $0 \leq B \leq D$, niin $AB \leq CD$
- Jos $0 \leq A \leq C$ ja $B \geq D > 0$, niin $\frac{A}{B} \leq \frac{C}{D}$
- $|A + B| \leq |A| + |B|$ (Kolmioepäyhtälö)

Suuruusarvioita

- Jos $A \leq C$ ja $B \leq D$, niin $A + B \leq C + D$.
- Jos $0 \leq A \leq C$ ja $0 \leq B \leq D$, niin $AB \leq CD$
- Jos $0 \leq A \leq C$ ja $B \geq D > 0$, niin $\frac{A}{B} \leq \frac{C}{D}$
- $|A + B| \leq |A| + |B|$ (Kolmioepäyhtälö)

Huomautus

Analogisia arvioita saadaan kääntämällä epäyhtälömerkit toisin päin. Lisäksi tuloa ja osamäärää koskeva arvio on erilainen jos ainakin toinen luvuista on negatiivinen.

Rationaaliluvuista laajennukseen

- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$.

Rationaaliluvuista laajennukseen

- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$.
- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisu joukossa $\mathbb{R}$?

Rationaaliluvuista laajennukseen

- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$.
- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisu joukossa $\mathbb{R}$?
- Miksi? Mitä $\sqrt{2}$ tarkoittaa?

Rationaaliluvuista laajennukseen

- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$.
- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisu joukossa $\mathbb{R}$?
- Miksi? Mitä $\sqrt{2}$ tarkoittaa?
- Mitä reaaliluvut ovat?

Rationaaliluvuista laajennukseen

- Yhtälöllä $x^2 = 2$ ei ole ratkaisua joukossa $\mathbb{Q}$.
- Onko yhtälöllä $x^2 = 2$ ratkaisu joukossa $\mathbb{R}$?
- Miksi? Mitä $\sqrt{2}$ tarkoittaa?
- Mitä reaaliluvut ovat?
- Lukujen $\sqrt{2}$, $\sqrt[n]{a}$ jne. olemassaolo johdettavissa aksioomista

Määritelmä

Joukon $S \subseteq \mathbb{R}$ *maksimi* määritellään

$$M = \max S \Leftrightarrow (M \in S) \wedge (\forall x \in S)(x \leq M).$$

Vastaavasti määritellään joukon S minimi.

Määritelmä

Reaalilukujoukko A on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa sellainen luku M , että $a \leq M$ pätee kaikille $a \in A$. Lukua M kutsutaan joukon M *ylärajaksi*

Määritelmä

Joukon A pienintä ylärajaa S merkitään $S = \sup A$ ja kutsutaan *supremumiksi*.

Määritelmä

Joukon A pienintä ylärajaa S merkitään $S = \sup A$ ja kutsutaan *supremumiksi*.

Lause

$$S = \sup A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \leq S) \wedge (\forall \epsilon)(\epsilon > 0 \rightarrow (\exists x \in A)(x > S - \epsilon))$$

Määritelmä

Joukon A pienintä ylärajaa S merkitään $S = \sup A$ ja kutsutaan *supremumiksi*.

Lause

$$S = \sup A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \leq S) \wedge (\forall \epsilon)(\epsilon > 0 \rightarrow (\exists x \in A)(x > S - \epsilon))$$

Määritelmä

$\inf A$ (infimum) on joukon A suurin alaraja; siis suurin luku, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin mikä hyvänsä joukon A alkio.

Huomautus

- $\max A$ ei ole aina olemassa: Esim. Jos $A = [0, 1)$, ei maksimia ole, mutta $\sup A = 1$.

Huomautus

- $\max A$ ei ole aina olemassa: Esim. Jos $A = [0, 1)$, ei maksimia ole, mutta $\sup A = 1$.
- Jos $\max A$ (joukon A maksimi) on olemassa, on $\sup A = \max A$.

Huomautus

- $\max A$ ei ole aina olemassa: Esim. Jos $A = [0, 1)$, ei maksimia ole, mutta $\sup A = 1$.
- Jos $\max A$ (joukon A maksimi) on olemassa, on $\sup A = \max A$.

Huomautus

- Jos $\min A$ (joukon A minimi) on olemassa, on $\inf A = \min A$.
- Jos $A \subseteq B$, on $\min A \geq \min B$ ja $\max A \leq \max B$
- Jos $A \subseteq B$, on $\inf A \geq \inf B$ ja $\sup A \leq \sup B$.

Täydellisyysaksiooma

Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on olemassa pienin yläraja eli supremum.

Täydellisyysaksiooma

Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on olemassa pienin yläraja eli supremum.

Esimerkki

Joukoilla

$$A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\}$$

ja

$$B = \{3, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \frac{31415}{10000}, \frac{314159}{100000}, \dots\}$$

on pienin yläraja.

Täydellisyysaksiooma

Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on olemassa pienin yläraja eli supremum.

Esimerkki

Joukoilla

$$A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\}$$

ja

$$B = \{3, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \frac{31415}{10000}, \frac{314159}{100000}, \dots\}$$

on pienin yläraja. $\sup A = 1$ ja $\sup B = \pi$.

Määritelmä

$\epsilon > 0$ on infinitesimaali (äärettömän pieni), jos

$$n\epsilon = \underbrace{\epsilon + \dots + \epsilon}_{n \text{ kpl}} \leq 1$$

kaikille $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

$\epsilon > 0$ on infinitesimaali (äärettömän pieni), jos

$$n\epsilon = \underbrace{\epsilon + \dots + \epsilon}_{n \text{ kpl}} \leq 1$$

kaikille $n \in \mathbb{N}$.

Lause: Arkhimedeen ”aksiooma” (Seur. 2.11.)

Jos $\epsilon > 0$, on olemassa sellainen kokonaisluku N , että $N\epsilon > 1$.

Määritelmä

$\epsilon > 0$ on infinitesimaali (äärettömän pieni), jos

$$n\epsilon = \underbrace{\epsilon + \dots + \epsilon}_{n \text{ kpl}} \leq 1$$

kaikille $n \in \mathbb{N}$.

Lause: Arkhimedeen ”aksiooma” (Seur. 2.11.)

Jos $\epsilon > 0$, on olemassa sellainen kokonaisluku N , että $N\epsilon > 1$.

Seuraus

Reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ ei ole infinitesimaaleja.

Esimerkki 2.15.

On olemassa sellainen reaaliluku $M > 0$, että $M^2 = 2$.

Esimerkki 2.15.

On olemassa sellainen reaaliluku $M > 0$, että $M^2 = 2$.

Todistuksen rakenne

- Olkoon $S = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < 2\}$.

Esimerkki 2.15.

On olemassa sellainen reaaliluku $M > 0$, että $M^2 = 2$.

Todistuksen rakenne

- Olkoon $S = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < 2\}$.
- $1 \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$.

Esimerkki 2.15.

On olemassa sellainen reaaliluku $M > 0$, että $M^2 = 2$.

Todistuksen rakenne

- Olkoon $S = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < 2\}$.
- $1 \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$.
- Jos $x > 3$, on $x^2 = x \cdot x > 3 \cdot 3 = 9 > 2$, joten 3 on joukon yläraja.

Esimerkki 2.15.

On olemassa sellainen reaaliluku $M > 0$, että $M^2 = 2$.

Todistuksen rakenne

- Olkoon $S = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < 2\}$.
- $1 \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$.
- Jos $x > 3$, on $x^2 = x \cdot x > 3 \cdot 3 = 9 > 2$, joten 3 on joukon yläraja.
- $\exists M = \sup S$. Edellämainitun perusteella $1 \leq M \leq 3$.

Esimerkki 2.15.

On olemassa sellainen reaaliluku $M > 0$, että $M^2 = 2$.

Todistuksen rakenne

- Olkoon $S = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < 2\}$.
- $1 \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$.
- Jos $x > 3$, on $x^2 = x \cdot x > 3 \cdot 3 = 9 > 2$, joten 3 on joukon yläraja.
- $\exists M = \sup S$. Edellämainitun perusteella $1 \leq M \leq 3$.
- Oletus $M^2 < 2$ johtaa ristiriitaan.

Esimerkki 2.15.

On olemassa sellainen reaaliluku $M > 0$, että $M^2 = 2$.

Todistuksen rakenne

- Olkoon $S = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < 2\}$.
- $1 \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$.
- Jos $x > 3$, on $x^2 = x \cdot x > 3 \cdot 3 = 9 > 2$, joten 3 on joukon yläraja.
- $\exists M = \sup S$. Edellämainitun perusteella $1 \leq M \leq 3$.
- Oletus $M^2 < 2$ johtaa ristiriitaan.
- Oletus $M^2 > 2$ johtaa ristiriitaan.

Esimerkki 2.15.

On olemassa sellainen reaaliluku $M > 0$, että $M^2 = 2$.

Todistuksen rakenne

- Olkoon $S = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < 2\}$.
- $1 \in S \Rightarrow S \neq \emptyset$.
- Jos $x > 3$, on $x^2 = x \cdot x > 3 \cdot 3 = 9 > 2$, joten 3 on joukon yläraja.
- $\exists M = \sup S$. Edellämainitun perusteella $1 \leq M \leq 3$.
- Oletus $M^2 < 2$ johtaa ristiriitaan.
- Oletus $M^2 > 2$ johtaa ristiriitaan.
- Johtopäätös: $M^2 = 2$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on funktio $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; a(n) = a_n$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on funktio $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; a(n) = a_n$

Määritelmä

Reaalilukujen välinen *etäisyys* määritellään

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Määritelmä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ raja-arvo on A , merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim a_n = A,$$

mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(n > M_\epsilon \rightarrow d(a_n, A) < \epsilon).$$

Määritelmä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ raja-arvo on A , merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim a_n = A,$$

mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(n > M_\epsilon \rightarrow d(a_n, A) < \epsilon).$$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ *suppenee*, jos $\lim a_n$ on olemassa. Muutoin lukujono *hajaantuu*.

Määritelmä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ raja-arvo on A , merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim a_n = A,$$

mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(n > M_\epsilon \rightarrow d(a_n, A) < \epsilon).$$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ *suppenee*, jos $\lim a_n$ on olemassa. Muutoin lukujono *hajaantuu*.

Esimerkki

Esimerkki 2.16: $a_n = \frac{2n}{n+1}$

Lause 2.19

Jos lukujonolla a_n on raja-arvo, niin se on yksikäsitteisesti määrätty.

Lause 2.19

Jos lukujonolla a_n on raja-arvo, niin se on yksikäsitteisesti määrätty.

Osajono

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ *osajonoksi* sanotaan mitä hyvänsä jonoa $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$

Lause 2.19

Jos lukujonolla a_n on raja-arvo, niin se on yksikäsitteisesti määrätty.

Osajono

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ *osajonoksi* sanotaan mitä hyvänsä jonoa $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$

Lause: Suppenevan jonon osajono suppenee kohti samaa raja-arvoa kuin alkuperäinen jono.

Lause 2.19

Jos lukujonolla a_n on raja-arvo, niin se on yksikäsitteisesti määrätty.

Osajono

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ *osajonoksi* sanotaan mitä hyvänsä jonoa $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$

Lause: Suppenevan jonon osajono suppenee kohti samaa raja-arvoa kuin alkuperäinen jono.

Seuraus: Jos lukujonolla a_n on osajonot joilla on eri raja-arvo tai hajaantuva osajono, niin myös a_n hajaantuu.