

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2017

Määritelmä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ raja-arvo on A , merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim a_n = A,$$

mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(n > M_\epsilon \rightarrow d(a_n, A) < \epsilon).$$

Määritelmä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ raja-arvo on A , merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim a_n = A,$$

mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists M_\epsilon)(n > M_\epsilon \rightarrow d(a_n, A) < \epsilon).$$

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ *suppenee*, jos $\lim a_n$ on olemassa. Muutoin lukujono *hajaantuu*.

Lause 2.19

Jos lukujonolla a_n on raja-arvo, niin se on yksikäsitteisesti määrätty.

Lause 2.19

Jos lukujonolla a_n on raja-arvo, niin se on yksikäsitteisesti määrätty.

Osajono

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ *osajonoksi* sanotaan mitä hyvänsä jonoa $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$

Lause 2.19

Jos lukujonolla a_n on raja-arvo, niin se on yksikäsitteisesti määrätty.

Osajono

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ *osajonoksi* sanotaan mitä hyvänsä jonoa $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$

Lause: Suppenevan jonon osajono suppenee kohti samaa raja-arvoa kuin alkuperäinen jono.

Lause 2.19

Jos lukujonolla a_n on raja-arvo, niin se on yksikäsitteisesti määrätty.

Osajono

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ *osajonoksi* sanotaan mitä hyvänsä jonoa $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$

Lause: Suppenevan jonon osajono suppenee kohti samaa raja-arvoa kuin alkuperäinen jono.

Seuraus: Jos lukujonolla a_n on osajonot joilla on eri raja-arvo tai hajaantuva osajono, niin myös a_n hajaantuu.

Raja-arvojen ominaisuuksia

Huomautus

Vakiojonon raja-arvo: $\lim c = c$.

Raja-arvojen ominaisuuksia

Huomautus

Vakiojonon raja-arvo: $\lim c = c$.

Lause 2.23

Jos a_n on suppeneva lukujono, on olemassa sellainen $C \in \mathbb{R}_+$, että $|a_n| \leq C$. Tällöin sanotaan että a_n on *rajoitettu*.

Raja-arvojen ominaisuuksia

Huomautus

Vakiojonon raja-arvo: $\lim c = c$.

Lause 2.23

Jos a_n on suppeneva lukujono, on olemassa sellainen $C \in \mathbb{R}_+$, että $|a_n| \leq C$. Tällöin sanotaan että a_n on *rajoitettu*.

Lause 2.24

Jos $\lim a_n = A$ ja $\lim b_n = A$, sekä jostain rajasta n_0 lähtien $a_n \leq c_n \leq b_n$, on myös $\lim c_n = A$.

Raja-arvojen ominaisuuksia

Huomautus

Vakiojonon raja-arvo: $\lim c = c$.

Lause 2.23

Jos a_n on suppeneva lukujono, on olemassa sellainen $C \in \mathbb{R}_+$, että $|a_n| \leq C$. Tällöin sanotaan että a_n on *rajoitettu*.

Lause 2.24

Jos $\lim a_n = A$ ja $\lim b_n = A$, sekä jostain rajasta n_0 lähtien $a_n \leq c_n \leq b_n$, on myös $\lim c_n = A$.

Huomautus

Raja-arvon määritelmässä $d(a_n, A) < \epsilon$ voidaan korvata ehdolla $d(a_n, A) < k\epsilon$, missä $k > 0$ on vakio.

Raja-arvojen ominaisuuksia

Huomautus

Vakiojonon raja-arvo: $\lim c = c$.

Lause 2.23

Jos a_n on suppeneva lukujono, on olemassa sellainen $C \in \mathbb{R}_+$, että $|a_n| \leq C$. Tällöin sanotaan että a_n on *rajoitettu*.

Lause 2.24

Jos $\lim a_n = A$ ja $\lim b_n = A$, sekä jostain rajasta n_0 lähtien $a_n \leq c_n \leq b_n$, on myös $\lim c_n = A$.

Huomautus

Raja-arvon määritelmässä $d(a_n, A) < \epsilon$ voidaan korvata ehdolla $d(a_n, A) < k\epsilon$, missä $k > 0$ on vakio. Tämä johtuu siitä, että alun perinkin $\epsilon > 0$ on mielivaltainen ja voidaan korvata luvulla $\frac{\epsilon}{k}$.

Lause 2.25

Olkoon $\lim a_n = A$ ja $\lim b_n = B$. Tällöin

- $\lim(a_n + b_n) = A + B$
- $\lim a_n b_n = AB$

Lause 2.25

Olkoon $\lim a_n = A$ ja $\lim b_n = B$. Tällöin

- $\lim(a_n + b_n) = A + B$
- $\lim a_n b_n = AB$

Lemma 2.27

Jos $\lim a_n = A \neq 0$, on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ jolle pätee

$$|a_n| > \frac{|A|}{2}, \quad \text{kun } n \geq n_0.$$

Lause 2.25

Olkoon $\lim a_n = A$ ja $\lim b_n = B$. Tällöin

- $\lim(a_n + b_n) = A + B$
- $\lim a_n b_n = AB$

Lemma 2.27

Jos $\lim a_n = A \neq 0$, on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ jolle pätee

$$|a_n| > \frac{|A|}{2}, \quad \text{kun } n \geq n_0.$$

Lause 2.28

Jos $\lim a_n = A$ ja $\lim b_n = B \neq 0$, on

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

Esimerkki 2.29

$$\lim \frac{1}{n^2}, \quad \lim \frac{1}{n^3}$$

Esimerkki 2.29

$$\lim \frac{1}{n^2}, \quad \lim \frac{1}{n^3}$$

Esimerkki 2.30

$$\lim \frac{2n^2 + n}{3n^2 - 7n - 8}$$

Esimerkki 2.29

$$\lim \frac{1}{n^2}, \quad \lim \frac{1}{n^3}$$

Esimerkki 2.30

$$\lim \frac{2n^2 + n}{3n^2 - 7n - 8}$$

Esimerkki 2.31

Olkoon $\lim a_n = 0$. Tällöin $\lim \sqrt{1 + a_n} = 1$.