

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2017

Määritelmiä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ raja-arvosta (jos olemassa) käytetään merkintää $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ tai $\lim a_n$

Määritelmiä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ raja-arvosta (jos olemassa) käytetään merkintää $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ tai $\lim a_n$

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ *suppenee*, jos $\lim a_n$ on olemassa. Muutoin lukujono *hajaantuu*.

Määritelmiä

Lukujonon $a_1, a_2, a_3, \dots$ raja-arvosta (jos olemassa) käytetään merkintää $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ tai $\lim a_n$

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ *suppenee*, jos $\lim a_n$ on olemassa. Muutoin lukujono *hajaantuu*.

Merkintä $a_n \downarrow$ tarkoittaa, että lukujono a_n suppenee, ja merkintä $a_n \uparrow$ että lukujono a_n hajaantuu

Määritelmä

Reaalinen lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Reaalinen lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos $a_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Reaalinen lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos $a_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lause 2.33

Ylhäältä rajoitetut, kasvavat lukujonot suppenevat

Määritelmä

Reaalinen lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *kasvava*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Määritelmä

Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos $a_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lause 2.33

Ylhäältä rajoitetut, kasvavat lukujonot suppenevat

Seuraus

Alhaalta rajoitetut, vähenevät lukujonot suppenevat.

Esimerkki 2.34

Olkoon $a_n = 1$ ja $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$, kun $n > 1$.

Esimerkki 2.34

Olkoon $a_n = 1$ ja $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$, kun $n > 1$.

Esimerkki 2.35

Olkoon $q \in (-1, 1)$. Tällöin $\lim q^n = 0$.

Esimerkki 2.34

Olkoon $a_n = 1$ ja $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$, kun $n > 1$.

Esimerkki 2.35

Olkoon $q \in (-1, 1)$. Tällöin $\lim q^n = 0$.

Esimerkki 2.36

$$\lim \frac{4^n + 3^n}{5^n + 2^n}$$

Esimerkki 2.34

Olkoon $a_n = 1$ ja $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$, kun $n > 1$.

Esimerkki 2.35

Olkoon $q \in (-1, 1)$. Tällöin $\lim q^n = 0$.

Esimerkki 2.36

$$\lim \frac{4^n + 3^n}{5^n + 2^n}$$

Esimerkki (Lause 2.37)

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Määritelmä

$$\lim a_n = \infty$$

Määritelmä

$$\lim a_n = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists N_M > 0)(n > N_M \rightarrow a_n > M).$$

Määritelmä

$$\lim a_n = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists N_M > 0)(n > N_M \rightarrow a_n > M).$$

Analogisesti

$$\lim a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists N_M > 0)(n > N_M \rightarrow a_n < -M)$$

Määritelmä

$$\lim a_n = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists N_M > 0)(n > N_M \rightarrow a_n > M).$$

Analogisesti

$$\lim a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists N_M > 0)(n > N_M \rightarrow a_n < -M)$$

Jaottelu

- Suppenevat jonot
- Hajaantuvat jonot:
 - Raja-arvo ∞ tai $-\infty$
 - Muut hajaantuvat jonot.

Esimerkki 2.40

$$\lim a_n = \lim b_n = \infty \Rightarrow \lim a_n b_n = \infty.$$

Esimerkki 2.40

$$\lim a_n = \lim b_n = \infty \Rightarrow \lim a_n b_n = \infty.$$

Esimerkki

Muodot $0 \cdot \infty$ ja $\infty - \infty$