

# Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo  
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Turun yliopisto

2017

## Kysymyksiä

- $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim a_n}$  ? (Demo 7, tehtävä 1)
- $\lim e^{a_n} = e^{\lim a_n}$  ?
- $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$  ?

## Määritelmä

Olkoon funktio  $f$  määritelty jossakin pisteen  $a$  ympäristössä, mahdollisesti piste  $a$  poislukien. Tällöin sanotaan, että funktiolla  $f$  on raja-arvo  $A$  pisteessä  $a$  ja merkitään

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(x \in B'(a, \delta_\epsilon) \rightarrow f(x) \in B(A, \epsilon))$$

## Määritelmä

Olkoon funktio  $f$  määritelty jossakin pisteen  $a$  ympäristössä, mahdollisesti piste  $a$  poislukien. Tällöin sanotaan, että funktiolla  $f$  on raja-arvo  $A$  pisteessä  $a$  ja merkitään

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(x \in B'(a, \delta_\epsilon) \rightarrow f(x) \in B(A, \epsilon))$$

Vaihtoehtoinen esitysasu:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(0 < d(x, a) < \delta_\epsilon \rightarrow d(f(x), A) < \epsilon)$$

## Lause 3.4.

Jos  $f$  on määritelty joukossa  $B'(a, r)$ , niin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$
- $\lim f(a_n) = A$  mille hyvänsä jonolle  $a_n$  joukossa  $B'(a, r)$ , jolle  $\lim a_n = a$ .

## Seuraus (Lause 3.5.)

Olkoon  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  ja  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ . Tällöin

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
- $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cA$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad \text{jos } B \neq 0.$

## Seuraus (Lause 3.6)

Jos pisteen  $a$  ympäristössä  $B'(a; r)$  ( $r > 0$ ) pätee

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  ja
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A,$

niin  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A.$

## Lemma 3.7

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |\sin x| \leq |x|$$

## Lemma 3.7

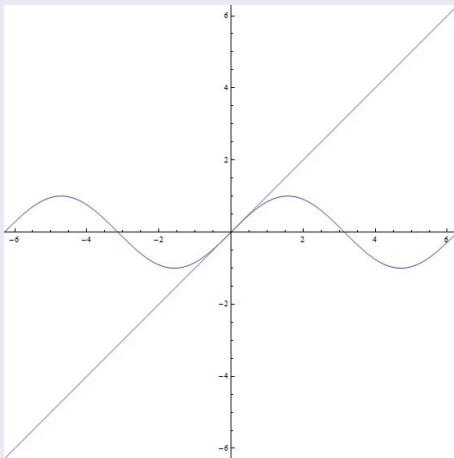
$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |\sin x| \leq |x|$$

## Esimerkki 3.8

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

## Lause 3.9

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$



## Esimerkkejä

Esimerkit 3.10 ja 3.11

## Määritelmä

Olkoon  $f$  määritelty jossakin pisteen  $a$  ympäristössä  $B'(a; r)$ . Jos

$$(\forall M > 0)(\exists \delta_M)(0 < d(x, a) < \delta_M \rightarrow f(x) > M),$$

merkitään

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

ja sanotaan, että *funktion  $f$  raja-arvo pisteessä  $x_0$  on ääretön.*

# Raja-arvokäsitteen laajennuksia

## Määritelmä

Olkoon  $f$  määritelty jossakin pisteen  $a$  ympäristössä  $B'(a; r)$ . Jos

$$(\forall M > 0)(\exists \delta_M)(0 < d(x, a) < \delta_M \rightarrow f(x) > M),$$

merkitään

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

ja sanotaan, että *funktion  $f$  raja-arvo pisteessä  $x_0$  on ääretön.*

## Huomautus

Raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

sekä vastaavat symbolin  $-\infty$  sisältävät raja-arvot määritellään analogisesti.

## Määritelmä

Olkoon reaalifunktio  $f$  määritelty jollakin avoimella välillä  $(a, a + r)$ . Mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)((0 < d(a, x) < \delta) \wedge (x > a) \rightarrow d(f(x), A) < \epsilon),$$

Merkitään

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$$

ja sanotaan, että funktion  $f$  *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä  $a$  on  $A \in \mathbb{R}$ . Tätä merkitään myös  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a+)$ .

## Määritelmä

Olkoon reaalifunktio  $f$  määritelty jollakin avoimella välillä  $(a, a + r)$ . Mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)((0 < d(a, x) < \delta) \wedge (x > a) \rightarrow d(f(x), A) < \epsilon),$$

Merkitään

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$$

ja sanotaan, että funktion  $f$  *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä  $a$  on  $A \in \mathbb{R}$ . Tätä merkitään myös  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a+)$ .

*Vasemmanpuoleinen raja-arvo*  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$  määritellään

analogisesti ja merkitään  $f(a-)$ . Oikean- ja vasemmanpuoleiset äärettömät raja-arvot määritellään ilmeisellä tavalla.

## Esimerkki

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$