

Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2017

Määritelmä

Olkoon f määritelty jossakin pisteen a ympäristössä $B'(a; r)$. Jos

$$(\forall M > 0)(\exists \delta_M)(0 < d(x, a) < \delta_M \rightarrow f(x) > M),$$

merkitään

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

ja sanotaan, että *funktion f raja-arvo pisteessä x_0 on ääretön.*

Määritelmä

Olkoon f määritelty jossakin pisteen a ympäristössä $B'(a; r)$. Jos

$$(\forall M > 0)(\exists \delta_M)(0 < d(x, a) < \delta_M \rightarrow f(x) > M),$$

merkitään

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

ja sanotaan, että *funktion f raja-arvo pisteessä x_0 on ääretön.*

Huomautus

Raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

sekä vastaavat symbolin $-\infty$ sisältävät raja-arvot määritellään analogisesti.

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jollakin avoimella välillä $(a, a + r)$. Mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)((0 < d(a, x) < \delta) \wedge (x > a) \rightarrow d(f(x), A) < \epsilon),$$

Merkitään

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$$

ja sanotaan, että funktion f *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä a on $A \in \mathbb{R}$. Tätä merkitään myös $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a+)$.

Määritelmä

Olkoon reaalifunktio f määritelty jollakin avoimella välillä $(a, a + r)$. Mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)((0 < d(a, x) < \delta) \wedge (x > a) \rightarrow d(f(x), A) < \epsilon),$$

Merkitään

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$$

ja sanotaan, että funktion f *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä a on $A \in \mathbb{R}$. Tätä merkitään myös $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a+)$.

Vasemmanpuoleinen raja-arvo $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$ määritellään

analogisesti ja merkitään $f(a-)$. Oikean- ja vasemmanpuoleiset äärettömät raja-arvot määritellään ilmeisellä tavalla.

Esimerkkejä

Esimerkit 3.14–3.17

Esimerkkejä

Esimerkit 3.14–3.17

Lause 3.18

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Esimerkkejä

Esimerkit 3.14–3.17

Lause 3.18

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Huomautus

Jos $a > 1$, $s > 0$, niin

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^s} = \infty$$

Esimerkki 3.20

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

Esimerkki 3.20

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$$

Esimerkki 3.21

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

Määritelmä

Olkoon funktio f määritelty jossakin pisteen a ympäristössä, mahdollisesti piste a poislukien. Tällöin sanotaan, että funktiolla f on raja-arvo A pisteessä a ja merkitään

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(x \in B'(a, \delta_\epsilon) \rightarrow f(x) \in B(A, \epsilon))$$

Määritelmä

Olkoon funktio f määritelty jossakin pisteen a ympäristössä, mahdollisesti piste a poislukien. Tällöin sanotaan, että funktiolla f on raja-arvo A pisteessä a ja merkitään

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

mikäli

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(x \in B'(a, \delta_\epsilon) \rightarrow f(x) \in B(A, \epsilon))$$

Vaihtoehtoinen esitysasu:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(0 < d(x, a) < \delta_\epsilon \rightarrow d(f(x), A) < \epsilon)$$

Määritelmä (Jatkuvuus pisteessä)

Olkoon funktio f määritelty jossakin joukossa $B(a; r)$. Funktio f on *jatkuva* pisteessä a jos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Määritelmä (Jatkuvuus pisteessä)

Olkoon funktio f määritelty jossakin joukossa $B(a; r)$. Funktio f on *jatkuva* pisteessä a jos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Määritelmä (Toispuoleinen jatkuvuus)

- Funktio on *oikealta jatkuva* pisteessä a , jos

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$$

- Funktio on *vasemmalta jatkuva* pisteessä a , jos

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$$

Määritelmä (Jatkuvuus välillä)

- f on jatkuva avoimella välillä (a, b) jos se on jatkuva välin jokaisessa pisteessä.

Määritelmä (Jatkuvuus välillä)

- f on jatkuva avoimella välillä (a, b) jos se on jatkuva välin jokaisessa pisteessä.
- f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ jos se on jatkuva välillä (a, b) sekä oikealta jatkuva pisteessä a ja vasemmalta jatkuva pisteessä b .
- Jatkuvuus puoliavoimella välillä määritellään analogisesti

Geometrinen tulkinta

Välillä $[a, b]$ jatkuvan funktion kuvaaja on katkeamaton käyrä.

Geometrinen tulkinta

Välillä $[a, b]$ jatkuvan funktion kuvaaja on katkeamaton käyrä.

Jatkuvia funktioita

- $f(x) = c$ (vakio) jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

Geometrinen tulkinta

Välillä $[a, b]$ jatkuvan funktion kuvaaja on katkeamaton käyrä.

Jatkuvia funktioita

- $f(x) = c$ (vakio) jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x$ jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.

Geometrinen tulkinta

Välillä $[a, b]$ jatkuvan funktion kuvaaja on katkeamaton käyrä.

Jatkuvia funktioita

- $f(x) = c$ (vakio) jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x$ jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x^2 = x \cdot x$ on jatkuva (raja-arvon tulosääntö)

Geometrinen tulkinta

Välillä $[a, b]$ jatkuvan funktion kuvaaja on katkeamaton käyrä.

Jatkuvia funktioita

- $f(x) = c$ (vakio) jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x$ jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x^2 = x \cdot x$ on jatkuva (raja-arvon tulosääntö)
- $f(x) = x^3 = x \cdot x^2$ on jatkuva (raja-arvon tulosääntö), jne.

Geometrinen tulkinta

Välillä $[a, b]$ jatkuvan funktion kuvaaja on katkeamaton käyrä.

Jatkuvia funktioita

- $f(x) = c$ (vakio) jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x$ jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x^2 = x \cdot x$ on jatkuva (raja-arvon tulosääntö)
- $f(x) = x^3 = x \cdot x^2$ on jatkuva (raja-arvon tulosääntö), jne.
- $f(x) = p(x)$, missä $p(x)$ on polynomi, on jatkuva (tulo- ja summasäännöt)

Geometrinen tulkinta

Välillä $[a, b]$ jatkuvan funktion kuvaaja on katkeamaton käyrä.

Jatkuvia funktioita

- $f(x) = c$ (vakio) jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x$ jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x^2 = x \cdot x$ on jatkuva (raja-arvon tulosääntö)
- $f(x) = x^3 = x \cdot x^2$ on jatkuva (raja-arvon tulosääntö), jne.
- $f(x) = p(x)$, missä $p(x)$ on polynomi, on jatkuva (tulo- ja summasäännöt)
- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan (osamäärän sääntö)

Geometrinen tulkinta

Välillä $[a, b]$ jatkuvan funktion kuvaaja on katkeamaton käyrä.

Jatkuvia funktioita

- $f(x) = c$ (vakio) jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x$ jatkuva joukossa $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x^2 = x \cdot x$ on jatkuva (raja-arvon tulosääntö)
- $f(x) = x^3 = x \cdot x^2$ on jatkuva (raja-arvon tulosääntö), jne.
- $f(x) = p(x)$, missä $p(x)$ on polynomi, on jatkuva (tulo- ja summasäännöt)
- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ on jatkuva määrittelyjoukossaan (osamäärän sääntö)
- $\sin x$ ja $\cos x$ ovat jatkuvia koko $\mathbb{R}$:ssä (Esimerkki 3.8)

Lause 3.26

Jos f on jatkuva pisteessä a ja g on jatkuva pisteessä $f(a)$, niin yhdistetty funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä a .

Lause 3.26

Jos f on jatkuva pisteessä a ja g on jatkuva pisteessä $f(a)$, niin yhdistetty funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä a .

Todistus

- Oletuksen mukaan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ja $\lim_{y \rightarrow f(a)} g(y) = g(f(a))$.

Lause 3.26

Jos f on jatkuva pisteessä a ja g on jatkuva pisteessä $f(a)$, niin yhdistetty funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä a .

Todistus

- Oletuksen mukaan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ja $\lim_{y \rightarrow f(a)} g(y) = g(f(a))$.
- Jos $\epsilon > 0$, on siis olemassa $\delta_1 > 0$, jolle $d(y, f(a)) < \delta_1 \Rightarrow d(g(y), g(f(a))) < \epsilon$ toteutuu.

Lause 3.26

Jos f on jatkuva pisteessä a ja g on jatkuva pisteessä $f(a)$, niin yhdistetty funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä a .

Todistus

- Oletuksen mukaan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ja $\lim_{y \rightarrow f(a)} g(y) = g(f(a))$.
- Jos $\epsilon > 0$, on siis olemassa $\delta_1 > 0$, jolle $d(y, f(a)) < \delta_1 \Rightarrow d(g(y), g(f(a))) < \epsilon$ toteutuu.
- On olemassa myös $\delta_2 > 0$, jolle $d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \delta_1$.

Lause 3.26

Jos f on jatkuva pisteessä a ja g on jatkuva pisteessä $f(a)$, niin yhdistetty funktio $g \circ f$ on jatkuva pisteessä a .

Todistus

- Oletuksen mukaan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ja $\lim_{y \rightarrow f(a)} g(y) = g(f(a))$.
- Jos $\epsilon > 0$, on siis olemassa $\delta_1 > 0$, jolle $d(y, f(a)) < \delta_1 \Rightarrow d(g(y), g(f(a))) < \epsilon$ toteutuu.
- On olemassa myös $\delta_2 > 0$, jolle $d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \delta_1$.
- Jos nyt $d(x, a) < \delta_2$, niin $f(x)$ toteuttaa ehdon $d(f(x), f(a)) < \delta_1$ ja siksi $d(g(f(x)), g(f(a))) < \epsilon$.

Lause 3.27

Olkoon f jossakin pisteen a ympäristössä aidosti monotoninen ja jatkuva. Silloin käänteisfunktio f^{-1} on olemassa jossakin pisteen $b = f(a)$ ympäristössä ja on jatkuva pisteessä b .

Lause 3.27

Olkoon f jossakin pisteen a ympäristössä aidosti monotoninen ja jatkuva. Silloin käänteisfunktio f^{-1} on olemassa jossakin pisteen $b = f(a)$ ympäristössä ja on jatkuva pisteessä b .

Huomautus

Tässä tarvitaan myöhemmin todistettavaa tulosta Seuraus 3.40, jonka mukaan jatkuva funktio kuvaa suljetun välin suljetuksi väliksi.

Lauseen 3.27 todistus

- Olkoon f jatkuva ja aidosti monotoninen joukossa $B(a; r)$ ja valitaan $0 < \epsilon < r$. Voidaan olettaa että f on aidosti kasvava, jolloin $f(a - \epsilon) < b < f(a + \epsilon)$.

Lauseen 3.27 todistus

- Olkoon f jatkuva ja aidosti monotoninen joukossa $B(a; r)$ ja valitaan $0 < \epsilon < r$. Voidaan olettaa että f on aidosti kasvava, jolloin $f(a - \epsilon) < b < f(a + \epsilon)$.
- Seurauksen 3.40 mukaan f kuvaa välin $I_1 = [a - \epsilon, a + \epsilon]$ suljetuksi väliksi $I_2 = [f(a - \epsilon), f(a + \epsilon)]$.

Lauseen 3.27 todistus

- Olkoon f jatkuva ja aidosti monotoninen joukossa $B(a; r)$ ja valitaan $0 < \epsilon < r$. Voidaan olettaa että f on aidosti kasvava, jolloin $f(a - \epsilon) < b < f(a + \epsilon)$.
- Seurauksen 3.40 mukaan f kuvaa välin $I_1 = [a - \epsilon, a + \epsilon]$ suljetuksi väliksi $I_2 = [f(a - \epsilon), f(a + \epsilon)]$.
- Näin ollen $f : I_1 \rightarrow I_2$ on bijektio ja käänteisfunktio $f^{-1} : I_2 \rightarrow I_1$ on olemassa.

Lauseen 3.27 todistus

- Olkoon f jatkuva ja aidosti monotoninen joukossa $B(a; r)$ ja valitaan $0 < \epsilon < r$. Voidaan olettaa että f on aidosti kasvava, jolloin $f(a - \epsilon) < b < f(a + \epsilon)$.
- Seurauksen 3.40 mukaan f kuvaa välin $I_1 = [a - \epsilon, a + \epsilon]$ suljetuksi väliksi $I_2 = [f(a - \epsilon), f(a + \epsilon)]$.
- Näin ollen $f : I_1 \rightarrow I_2$ on bijektio ja käänteisfunktio $f^{-1} : I_2 \rightarrow I_1$ on olemassa.
- Merkitään $\delta = \min\{f(a + \epsilon) - b, b - f(a - \epsilon)\} > 0$ ja valitaan $y \in B(b; \delta)$

Lauseen 3.27 todistus

- Olkoon f jatkuva ja aidosti monotoninen joukossa $B(a; r)$ ja valitaan $0 < \epsilon < r$. Voidaan olettaa että f on aidosti kasvava, jolloin $f(a - \epsilon) < b < f(a + \epsilon)$.
- Seurauksen 3.40 mukaan f kuvaa välin $I_1 = [a - \epsilon, a + \epsilon]$ suljetuksi väliksi $I_2 = [f(a - \epsilon), f(a + \epsilon)]$.
- Näin ollen $f : I_1 \rightarrow I_2$ on bijektio ja käänteisfunktio $f^{-1} : I_2 \rightarrow I_1$ on olemassa.
- Merkitään $\delta = \min\{f(a + \epsilon) - b, b - f(a - \epsilon)\} > 0$ ja valitaan $y \in B(b; \delta)$
- Tällöin $f(a - \epsilon) \leq b - \delta < y < b + \delta < f(a + \epsilon)$, mistä käänteisfunktion kasvavuuden perusteella seuraa

$$a - \epsilon < f^{-1}(y) < a + \epsilon$$

Lauseen 3.27 todistus

- Olkoon f jatkuva ja aidosti monotoninen joukossa $B(a; r)$ ja valitaan $0 < \epsilon < r$. Voidaan olettaa että f on aidosti kasvava, jolloin $f(a - \epsilon) < b < f(a + \epsilon)$.
- Seurauksen 3.40 mukaan f kuvaa välin $I_1 = [a - \epsilon, a + \epsilon]$ suljetuksi väliksi $I_2 = [f(a - \epsilon), f(a + \epsilon)]$.
- Näin ollen $f : I_1 \rightarrow I_2$ on bijektio ja käänteisfunktio $f^{-1} : I_2 \rightarrow I_1$ on olemassa.
- Merkitään $\delta = \min\{f(a + \epsilon) - b, b - f(a - \epsilon)\} > 0$ ja valitaan $y \in B(b; \delta)$
- Tällöin $f(a - \epsilon) \leq b - \delta < y < b + \delta < f(a + \epsilon)$, mistä käänteisfunktion kasvavuuden perusteella seuraa

$$a - \epsilon < f^{-1}(y) < a + \epsilon,$$

siis $d(f^{-1}(y), a) < \epsilon$, kunhan $d(b, y) < \delta$.

Seuraus 3.28

Jos f on aidosti monotoninen ja jatkuva välillä $[a, b]$ sekä $f([a, b]) = [c, d]$ niin f^{-1} on jatkuva välillä $[c, d]$.

Seuraus 3.28

Jos f on aidosti monotoninen ja jatkuva välillä $[a, b]$ sekä $f([a, b]) = [c, d]$ niin f^{-1} on jatkuva välillä $[c, d]$.

Esimerkki: Jatkuvia funktioita

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = \sqrt{x}$.

Seuraus 3.28

Jos f on aidosti monotoninen ja jatkuva välillä $[a, b]$ sekä $f([a, b]) = [c, d]$ niin f^{-1} on jatkuva välillä $[c, d]$.

Esimerkki: Jatkuvia funktioita

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = \sqrt{x}$.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f(x) = \arctan x$

Seuraus 3.28

Jos f on aidosti monotoninen ja jatkuva välillä $[a, b]$ sekä $f([a, b]) = [c, d]$ niin f^{-1} on jatkuva välillä $[c, d]$.

Esimerkki: Jatkuvia funktioita

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = \sqrt{x}$.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f(x) = \arctan x$
- $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$

Seuraus 3.28

Jos f on aidosti monotoninen ja jatkuva välillä $[a, b]$ sekä $f([a, b]) = [c, d]$ niin f^{-1} on jatkuva välillä $[c, d]$.

Esimerkki: Jatkuvia funktioita

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = \sqrt{x}.$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f(x) = \arctan x$
- $f(x) = \arcsin(\sqrt{1 - x^2})$
- $f(x) = \frac{\cos(\arctan(4x^2 - 2x + 1))}{\sqrt[3]{\sin x + 3 \cos^2 \sqrt{5x}}}.$

Seuraus 3.28

Jos f on aidosti monotoninen ja jatkuva välillä $[a, b]$ sekä $f([a, b]) = [c, d]$ niin f^{-1} on jatkuva välillä $[c, d]$.

Esimerkki: Jatkuvia funktioita

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = \sqrt{x}$.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f(x) = \arctan x$
- $f(x) = \arcsin(\sqrt{1 - x^2})$
- $f(x) = \frac{\cos(\arctan(4x^2 - 2x + 1))}{\sqrt[3]{\sin x + 3 \cos^2 \sqrt{5x}}}$.
- Kaikki edellisistä summilla, tuloilla, funktioiden yhdistämisillä saatavat. Lisäksi niiden käänteisfunktiot, jne.

Määritelmä

Alkeisfunktioita ovat rationaali- ja juurifunktiot, trigonometriset ja eksponenttifunktiot, sekä aiemmista alkeisfunktioista yhdistämällä, rationaalisilla toimituksilla ja käänteisfunktioina saatavat funktiot.

Määritelmä

Alkeisfunktioita ovat rationaali- ja juurifunktiot, trigonometriset ja eksponenttifunktiot, sekä aiemmista alkeisfunktioista yhdistämällä, rationaalisilla toimituksilla ja käänteisfunktioina saatavat funktiot.

Lause

Kaikki alkeisfunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukossaan.

Lemma

Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva ja $c \in (a, b)$. Jos $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$, niin on olemassa sellainen pisteen c ympäristö $B(c; \delta)$, jossa $f(x) > 0$.

Lemma

Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva ja $c \in (a, b)$. Jos $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$, niin on olemassa sellainen pisteen c ympäristö $B(c; \delta)$, jossa $f(x) > 0$.

Todistus

- Raja-arvon määritelmän perusteella on sellainen $\delta > 0$, että $d(f(x), f(c)) < \frac{f(c)}{2}$, kunhan $x \in B(x, \delta)$.

Lemma

Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva ja $c \in (a, b)$. Jos $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$, niin on olemassa sellainen pisteen c ympäristö $B(c; \delta)$, jossa $f(x) > 0$.

Todistus

- Raja-arvon määritelmän perusteella on sellainen $\delta > 0$, että $d(f(x), f(c)) < \frac{f(c)}{2}$, kunhan $x \in B(x, \delta)$.
- Tällöin siis $-\frac{f(c)}{2} < f(x) - f(c) < \frac{f(c)}{2}$, kun $d(f(x), f(c)) < \frac{f(c)}{2}$.

Lemma

Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva ja $c \in (a, b)$. Jos $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$, niin on olemassa sellainen pisteen c ympäristö $B(c; \delta)$, jossa $f(x) > 0$.

Todistus

- Raja-arvon määritelmän perusteella on sellainen $\delta > 0$, että $d(f(x), f(c)) < \frac{f(c)}{2}$, kunhan $x \in B(x, \delta)$.
- Tällöin siis $-\frac{f(c)}{2} < f(x) - f(c) < \frac{f(c)}{2}$, kun $d(f(x), f(c)) < \frac{f(c)}{2}$.
- Edelleen, $\frac{1}{2}f(c) < f(x) < \frac{3}{2}f(c)$, kun $d(x, c) < \delta$.

Lemma

Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva ja $c \in (a, b)$. Jos $\lim_{x \rightarrow c} f(x) > 0$, niin on olemassa sellainen pisteen c ympäristö $B(c; \delta)$, jossa $f(x) > 0$.

Todistus

- Raja-arvon määritelmän perusteella on sellainen $\delta > 0$, että $d(f(x), f(c)) < \frac{f(c)}{2}$, kunhan $x \in B(x, \delta)$.
- Tällöin siis $-\frac{f(c)}{2} < f(x) - f(c) < \frac{f(c)}{2}$, kun $d(f(x), f(c)) < \frac{f(c)}{2}$.
- Edelleen, $\frac{1}{2}f(c) < f(x) < \frac{3}{2}f(c)$, kun $d(x, c) < \delta$.

Huomautus

Todistus on analoginen tapauksessa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) < 0$ ja yleistyy helposti koskemaan myös suljetun välin päätepisteitä.
Luentomonisteen Lemma 3.30 seuraa tästä suoraviivaisesti.

Lause 3.31 (Bolzanon lause)

Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Jos $f(a)f(b) < 0$, niin on olemassa $c \in (a, b)$, jolle pätee $f(c) = 0$

Bolzanon lauseen todistus

- Voidaan olettaa, että $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$; merkitään $S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$.

Bolzanon lauseen todistus

- Voidaan olettaa, että $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$; merkitään $S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$.
- $a \in S$, b on joukon S yläraja, siis on olemassa $c = \sup S \in [a, b]$ ja väitetään, että $f(c) = 0$.

Bolzanon lauseen todistus

- Voidaan olettaa, että $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$; merkitään $S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$.
- $a \in S$, b on joukon S yläraja, siis on olemassa $c = \sup S \in [a, b]$ ja väitetään, että $f(c) = 0$.
- Vastaoletus 1: $f(c) < 0$. Tällöin on (Lemma 3.30) sellainen väli $(c - \delta, c + \delta)$ jossa $f(x) < 0$.

Bolzanon lauseen todistus

- Voidaan olettaa, että $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$; merkitään $S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$.
- $a \in S$, b on joukon S yläraja, siis on olemassa $c = \sup S \in [a, b]$ ja väitetään, että $f(c) = 0$.
- Vastaoletus 1: $f(c) < 0$. Tällöin on (Lemma 3.30) sellainen väli $(c - \delta, c + \delta)$ jossa $f(x) < 0$. Tällöin siis $f(c + \frac{\delta}{2}) < 0$ ja $c + \frac{\delta}{2} \in S$

Bolzanon lauseen todistus

- Voidaan olettaa, että $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$; merkitään $S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$.
- $a \in S$, b on joukon S yläraja, siis on olemassa $c = \sup S \in [a, b]$ ja väitetään, että $f(c) = 0$.
- Vastaoletus 1: $f(c) < 0$. Tällöin on (Lemma 3.30) sellainen väli $(c - \delta, c + \delta)$ jossa $f(x) < 0$. Tällöin siis $f(c + \frac{\delta}{2}) < 0$ ja $c + \frac{\delta}{2} \in S$, jolloin c ei olekaan joukon S yläraja.

Bolzanon lauseen todistus

- Voidaan olettaa, että $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$; merkitään $S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$.
- $a \in S$, b on joukon S yläraja, siis on olemassa $c = \sup S \in [a, b]$ ja väitetään, että $f(c) = 0$.
- Vastaoletus 1: $f(c) < 0$. Tällöin on (Lemma 3.30) sellainen väli $(c - \delta, c + \delta)$ jossa $f(x) < 0$. Tällöin siis $f(c + \frac{\delta}{2}) < 0$ ja $c + \frac{\delta}{2} \in S$, jolloin c ei olekaan joukon S yläraja.
- Vastaoletus 2: $f(c) > 0$. Tällöin on sellainen väli $(c - \delta, c + \delta)$ jossa $f(x) > 0$ ja siksi esim. $f(c - \frac{\delta}{2}) > 0$. Näin ollen c ei olekaan joukon S pienin yläraja.

Bolzanon lauseen todistus

- Voidaan olettaa, että $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$; merkitään $S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$.
- $a \in S$, b on joukon S yläraja, siis on olemassa $c = \sup S \in [a, b]$ ja väitetään, että $f(c) = 0$.
- Vastaoletus 1: $f(c) < 0$. Tällöin on (Lemma 3.30) sellainen väli $(c - \delta, c + \delta)$ jossa $f(x) < 0$. Tällöin siis $f(c + \frac{\delta}{2}) < 0$ ja $c + \frac{\delta}{2} \in S$, jolloin c ei olekaan joukon S yläraja.
- Vastaoletus 2: $f(c) > 0$. Tällöin on sellainen väli $(c - \delta, c + \delta)$ jossa $f(x) > 0$ ja siksi esim. $f(c - \frac{\delta}{2}) > 0$. Näin ollen c ei olekaan joukon S pienin yläraja.
- Koska mahdollisuudet $f(c) > 0$ ja $f(c) < 0$ johtavat ristiriitaan, on ainoa mahdollisuus $f(c) = 0$.

Jatkuvien funktioiden väliarvolause (Seuraus 3.32.)

Jos f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja $f(a) \neq f(b)$, niin f saa jokaisen arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välisen arvon ainakin yhdessä välin $[a, b]$ pisteessä.

Jatkuvat funktiot suljetulla välillä

Jatkuvien funktioiden väliarvolause (Seuraus 3.32.)

Jos f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja $f(a) \neq f(b)$, niin f saa jokaisen arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välisen arvon ainakin yhdessä välin $[a, b]$ pisteessä.

Todistus

Olkoon d jokin arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä oleva luku. Merkitään $g(x) = f(x) - d$. Tällöin myös g on jatkuva välillä $[a, b]$ ja arvot $g(a) = f(a) - d$ ja $g(b) = f(b) - d$ ovat erimerkkiset.

Jatkuvat funktiot suljetulla välillä

Jatkuvien funktioiden väliarvolause (Seuraus 3.32.)

Jos f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja $f(a) \neq f(b)$, niin f saa jokaisen arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välisen arvon ainakin yhdessä välin $[a, b]$ pisteessä.

Todistus

Olkoon d jokin arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ välissä oleva luku. Merkitään $g(x) = f(x) - d$. Tällöin myös g on jatkuva välillä $[a, b]$ ja arvot $g(a) = f(a) - d$ ja $g(b) = f(b) - d$ ovat erimerkkiset. Bolzanon lauseen perusteella funktiolla g on ainakin yksi nollakohta $c \in (a, b)$. Tämä merkitsee sitä, että $0 = g(c) = f(c) - d$, joten $f(c) = d$.

Juuren olemassaolo

Jos $n \in \mathbb{N}$ ja a on positiivinen, on yhtälöllä $x^n = a$ tarkalleen yksi positiivinen ratkaisu.

Juuren olemassaolo

Jos $n \in \mathbb{N}$ ja a on positiivinen, on yhtälöllä $x^n = a$ tarkalleen yksi positiivinen ratkaisu.

Todistus

Funktio $f(x) = x^n - a$ on jatkuva $f(0) = -a < 0$ sekä
 $f(a+1) = (a+1)^n - a > (1+na) - a = 1 + (n-1)a \geq 1 > 0$.

Juuren olemassaolo

Jos $n \in \mathbb{N}$ ja a on positiivinen, on yhtälöllä $x^n = a$ tarkalleen yksi positiivinen ratkaisu.

Todistus

Funktio $f(x) = x^n - a$ on jatkuva $f(0) = -a < 0$ sekä $f(a+1) = (a+1)^n - a > (1+na) - a = 1 + (n-1)a \geq 1 > 0$. Bolzanon lauseen mukaan välillä $[0, a+1]$ on funktion f nollakohta.

Jatkuvat funktiot suljetulla välillä

Juuren olemassaolo

Jos $n \in \mathbb{N}$ ja a on positiivinen, on yhtälöllä $x^n = a$ tarkalleen yksi positiivinen ratkaisu.

Todistus

Funktio $f(x) = x^n - a$ on jatkuva $f(0) = -a < 0$ sekä $f(a+1) = (a+1)^n - a > (1+na) - a = 1 + (n-1)a \geq 1 > 0$. Bolzanon lauseen mukaan välillä $[0, a+1]$ on funktion f nollakohta. Jos $0 < x_1 < x_2$, on

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \dots + x_1^{n-1}) > 0,$$

joten f on aidosti kasvava kun $x > 0$ eikä nollakohtia voi siis olla useampia.

Ääretön unioni

Olkoon A_i , $i \in I$ kokoelma joukkoja. Joukkojen A_i unioni määritellään seuraavasti:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I)(x \in A_i)$$

Ääretön unioni

Olkoon A_i , $i \in I$ kokoelma joukkoja. Joukkojen A_i unioni määritellään seuraavasti:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I)(x \in A_i)$$

Määritelmä

Reaalilukujoukkojen $\{A_i \mid i \in I\}$ kokoelma *peittää* reaalilukujoukon B , jos

$$B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

Heine-Borelin peittolause (Suljetun välin kompaktisuus)

Jos jokin kokoelma A_i ($i \in I$) avoimia välejä $A_i = (a_i, b_i)$ peittää suljetun välin $B = [a, b]$, niin on olemassa sellainen äärellinen osakokoelma $\{A_i \mid i \in I_1\}$ ($I_1 \subseteq I$ äärellinen), joka myös peittää suljetun välin $B = [a, b]$.

Heine-Borelin peittolause (Suljetun välin kompaktisuus)

Jos jokin kokoelma A_i ($i \in I$) avoimia välejä $A_i = (a_i, b_i)$ peittää suljetun välin $B = [a, b]$, niin on olemassa sellainen äärellinen osakokoelma $\{A_i \mid i \in I_1\}$ ($I_1 \subseteq I$ äärellinen), joka myös peittää suljetun välin $B = [a, b]$.

Peittolauseen todistus

- Merkitään $S = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \text{ voidaan peittää äärellisellä määrällä välejä } A_i\}$

Peittolauseen todistus

- Merkitään $S = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \text{ voidaan peittää äärellisellä määrällä välejä } A_i\}$
- Jokin väli A_{i_1} peittää pisteen a , joten $S \neq \emptyset$. Lisäksi S on ylhäältä rajoitettu (b on yläraja).

Peittolauseen todistus

- Merkitään $S = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \text{ voidaan peittää äärellisellä määrällä välejä } A_i\}$
- Jokin väli A_{i_1} peittää pisteen a , joten $S \neq \emptyset$. Lisäksi S on ylhäältä rajoitettu (b on yläraja).
- Olkoon $c = \sup S$ ja näytetään, että $c = b$. Väite seuraa tästä, sillä pisteen b peittää yksi ainoa väli. Vastaoletus: $c < b$.

Peittolauseen todistus

- Merkitään $S = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \text{ voidaan peittää äärellisellä määrällä välejä } A_i\}$
- Jokin väli A_{i_1} peittää pisteen a , joten $S \neq \emptyset$. Lisäksi S on ylhäältä rajoitettu (b on yläraja).
- Olkoon $c = \sup S$ ja näytetään, että $c = b$. Väite seuraa tästä, sillä pisteen b peittää yksi ainoa väli. Vastaoletus: $c < b$.
- Olkoot $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ joukon S peittävät avoimet välit ja $A_l = (a_l, b_l)$ näistä (jokin) sellainen, jossa b_l on suurin.

Peittolauseen todistus

- Merkitään $S = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \text{ voidaan peittää äärellisellä määrällä välejä } A_i\}$
- Jokin väli A_{i_1} peittää pisteen a , joten $S \neq \emptyset$. Lisäksi S on ylhäältä rajoitettu (b on yläraja).
- Olkoon $c = \sup S$ ja näytetään, että $c = b$. Väite seuraa tästä, sillä pisteen b peittää yksi ainoa väli. Vastaoletus: $c < b$.
- Olkoot $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ joukon S peittävät avoimet välit ja $A_l = (a_l, b_l)$ näistä (jokin) sellainen, jossa b_l on suurin.
- Jos $c \in A_l = (a_l, b_l)$, on välttämättä $c < b_l$ ja siksi voidaan valita $c + \epsilon \in (c, b_l)$ ja myös $[a, c + \epsilon]$ voidaan peittää samoilla joukoilla. Näin ollen c ei olekaan joukon S yläraja.

Peittolauseen todistus

- Olkoon $c = \sup S$ ja näytetään, että $c = b$. Väite seuraa tästä, sillä pisteen b peittää yksi ainoa väli. Vastaoletus: $c < b$.
- Olkoot $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ joukon S peittävät avoimet välit ja $A_l = (a_l, b_l)$ näistä (jokin) sellainen, jossa b_l on suurin.
- Jos $c \in A_l = (a_l, b_l)$, on välttämättä $c < b_l$ ja siksi voidaan valita $c + \epsilon \in (c, b_l)$ ja myös $[a, c + \epsilon]$ voidaan peittää samoilla joukoilla. Näin ollen c ei olekaan joukon S yläraja.

Peittolauseen todistus

- Olkoon $c = \sup S$ ja näytetään, että $c = b$. Väite seuraa tästä, sillä pisteen b peittää yksi ainoa väli. Vastaoletus: $c < b$.
- Olkoot $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ joukon S peittävät avoimet välit ja $A_l = (a_l, b_l)$ näistä (jokin) sellainen, jossa b_l on suurin.
- Jos $c \in A_l = (a_l, b_l)$, on välttämättä $c < b_l$ ja siksi voidaan valita $c + \epsilon \in (c, b_l)$ ja myös $[a, c + \epsilon]$ voidaan peittää samoilla joukoilla. Näin ollen c ei olekaan joukon S yläraja.
- Jos $c \notin A_l$ on joko $b_l < c$ tai $b_l = c$. Ensimmäisessä tapauksessa voidaan valita $c - \epsilon < c$, jolle pätee $c - \epsilon \notin A_l$ ja siksi myös $c - \epsilon$ olisi joukon S yläraja. Täten $b_l = c$.

Peittolauseen todistus

- Olkoon $c = \sup S$ ja näytetään, että $c = b$. Väite seuraa tästä, sillä pisteen b peittää yksi ainoa väli. Vastaoletus: $c < b$.
- Olkoot $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ joukon S peittävät avoimet välit ja $A_l = (a_l, b_l)$ näistä (jokin) sellainen, jossa b_l on suurin.
- Jos $c \in A_l = (a_l, b_l)$, on välttämättä $c < b_l$ ja siksi voidaan valita $c + \epsilon \in (c, b_l)$ ja myös $[a, c + \epsilon]$ voidaan peittää samoilla joukoilla. Näin ollen c ei olekaan joukon S yläraja.
- Jos $c \notin A_l$ on joko $b_l < c$ tai $b_l = c$. Ensimmäisessä tapauksessa voidaan valita $c - \epsilon < c$, jolle pätee $c - \epsilon \notin A_l$ ja siksi myös $c - \epsilon$ olisi joukon S yläraja. Täten $b_l = c$.
- Koska $c \in [a, b]$, voidaan piste c peittää yhdellä ainoalla välillä $A_{i_{k+1}}$ ja näin ollen äärellinen joukko välejä $A_{i_1}, \dots, A_{i_{k+1}}$ peittää jonkin välin $[a, c + \epsilon]$, ristiriita.

Määritelmä

Funktio f on *rajoitettu* joukossa A , jos on olemassa sellainen $M > 0$, että $|f(x)| \leq M$ aina kun $x \in A$.

Määritelmä

Funktio f on *rajoitettu* joukossa A , jos on olemassa sellainen $M > 0$, että $|f(x)| \leq M$ aina kun $x \in A$.

Lause 3.37

Jos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva, on f rajoitettu välillä $[a, b]$.

Lauseen 3.37 todistus

- Jatkuvuuden perusteella $\forall x \in [a, b]$ on avoin väli $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ jolle $|f(x) - f(y)| = d(f(x), f(y)) < 1$ aina, kun $y \in I_x$.

Lauseen 3.37 todistus

- Jatkuvuuden perusteella $\forall x \in [a, b]$ on avoin väli $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ jolle $|f(x) - f(y)| = d(f(x), f(y)) < 1$ aina, kun $y \in I_x$.
- Välit I_x peittävät suljetun välin $[a, b]$, joten Heine-Borelin lauseen perusteella on olemassa äärellinen määrä välejä $I_{x_1}, \dots, I_{x_M}$, jotka peittävät välin $[a, b]$.

Lauseen 3.37 todistus

- Jatkuvuuden perusteella $\forall x \in [a, b]$ on avoin väli $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ jolle $|f(x) - f(y)| = d(f(x), f(y)) < 1$ aina, kun $y \in I_x$.
- Välit I_x peittävät suljetun välin $[a, b]$, joten Heine-Borelin lauseen perusteella on olemassa äärellinen määrä välejä $I_{x_1}, \dots, I_{x_M}$, jotka peittävät välin $[a, b]$.
- Jokaiselle näistä pätee $|f(y) - f(x_k)| < 1$ aina, kun $y \in I_{x_k}$ ja siis $|f(y)| = |f(y) - f(x_k) + f(x_k)| \leq |f(y) - f(x_k)| + |f(x_k)| < 1 + |f(x_k)|$

Lauseen 3.37 todistus

- Jatkuvuuden perusteella $\forall x \in [a, b]$ on avoin väli $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ jolle $|f(x) - f(y)| = d(f(x), f(y)) < 1$ aina, kun $y \in I_x$.
- Välit I_x peittävät suljetun välin $[a, b]$, joten Heine-Borelin lauseen perusteella on olemassa äärellinen määrä välejä $I_{x_1}, \dots, I_{x_M}$, jotka peittävät välin $[a, b]$.
- Jokaiselle näistä pätee $|f(y) - f(x_k)| < 1$ aina, kun $y \in I_{x_k}$ ja siis $|f(y)| = |f(y) - f(x_k) + f(x_k)| \leq |f(y) - f(x_k)| + |f(x_k)| < 1 + |f(x_k)|$
- Näin ollen $|f(y)| < 1 + \max\{|f(x_1)|, \dots, |f(x_M)|\}$ aina kun $y \in [a, b]$

Lause 3.39

Suljetulla välillä jatkuvalla funktiolla on tällä välillä suurin (maksimi) ja pienin (minimi) arvo

Lauseen 3.39 todistus

- Osoitetaan maksimin olemassaolo, todistus minimille on analoginen.
- Lauseen 3.37 perusteella $S = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ on ylhäältä rajoitettu ja joka tapauksessa epätyhjä, joten on olemassa $M = \sup S$.

Lauseen 3.39 todistus

- Osoitetaan maksimin olemassaolo, todistus minimille on analoginen.
- Lauseen 3.37 perusteella $S = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ on ylhäältä rajoitettu ja joka tapauksessa epätyhjä, joten on olemassa $M = \sup S$.
- Osoitetaan, että funktion maksimiarvo on M .

Lauseen 3.39 todistus

- Osoitetaan maksimin olemassaolo, todistus minimille on analoginen.
- Lauseen 3.37 perusteella $S = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ on ylhäältä rajoitettu ja joka tapauksessa epätyhjä, joten on olemassa $M = \sup S$.
- Osoitetaan, että funktion maksimiarvo on M . Vastaoletus:
 $\forall x \in [a, b] \ f(x) < M$.

Lauseen 3.39 todistus

- Osoitetaan maksimin olemassaolo, todistus minimille on analoginen.
- Lauseen 3.37 perusteella $S = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ on ylhäältä rajoitettu ja joka tapauksessa epätyhjä, joten on olemassa $M = \sup S$.
- Osoitetaan, että funktion maksimiarvo on M . Vastaoletus: $\forall x \in [a, b] \ f(x) < M$.
- Vastaoletuksen mukaan funktio $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ on määritelty, positiivinen ja jatkuva koko välillä $[a, b]$.

Lauseen 3.39 todistus

- Osoitetaan maksimin olemassaolo, todistus minimille on analoginen.
- Lauseen 3.37 perusteella $S = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ on ylhäältä rajoitettu ja joka tapauksessa epätyhjä, joten on olemassa $M = \sup S$.
- Osoitetaan, että funktion maksimiarvo on M . Vastaoletus: $\forall x \in [a, b] \ f(x) < M$.
- Vastaoletuksen mukaan funktio $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ on määritelty, positiivinen ja jatkuva koko välillä $[a, b]$.
- Koska $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, on mitä hyvänsä lukua $M_1 > 0$ kohti olemassa $x \in [a, b]$, jolle pätee $f(x) \geq M - \frac{1}{M_1} \Leftrightarrow M_1 \leq \frac{1}{M-f(x)} = g(x)$.

Lauseen 3.39 todistus

- Osoitetaan maksimin olemassaolo, todistus minimille on analoginen.
- Lauseen 3.37 perusteella $S = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ on ylhäältä rajoitettu ja joka tapauksessa epätyhjä, joten on olemassa $M = \sup S$.
- Osoitetaan, että funktion maksimiarvo on M . Vastaoletus: $\forall x \in [a, b] \ f(x) < M$.
- Vastaoletuksen mukaan funktio $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ on määritelty, positiivinen ja jatkuva koko välillä $[a, b]$.
- Koska $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, on mitä hyvänsä lukua $M_1 > 0$ kohti olemassa $x \in [a, b]$, jolle pätee $f(x) \geq M - \frac{1}{M_1} \Leftrightarrow M_1 \leq \frac{1}{M-f(x)} = g(x)$.
- Tämä merkitsee sitä, että g ei ole rajoitettu funktio, ja on ristiriidassa Lauseen 3.37. kanssa.

Seuraus

Jatkuvan funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kuvajoukko on suljettu väli $[m, M]$, missä $m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ ja $M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$

Jatkuvat funktiot suljetulla välillä

Seuraus

Jatkuvan funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kuvajoukko on suljettu väli $[m, M]$, missä $m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ ja $M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$

Todistus

Edellisen lauseen mukaan f saavuttaa maksimin M ja minimin m joissakin välin $[a, b]$ pisteissä. Jatkuvien funktioiden väliarvolauseen mukaan f saavuttaa myös jokaisen näiden välissä olevan arvon.

Esimerkki

$$f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}.$$

Esimerkki

$$f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}.$$

Esimerkkejä

Esimerkit 3.41 ja 3.42.

Kahden muuttujan funktioista

Määritelmä

Funktioita $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sanotaan *kahden muuttujan reaalfunktioiksi*

Kahden muuttujan funktioista

Määritelmä

Funktioita $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sanotaan *kahden muuttujan reaalfunktioiksi*

Määritelmä

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Kahden muuttujan funktioista

Määritelmä

Funktioita $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sanotaan *kahden muuttujan reaalifunktioiksi*

Määritelmä

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Määritelmä

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = A,$$

jos

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta_\epsilon > 0)(d((x, y), (a, b)) < \delta_\epsilon \rightarrow d(f(x, y), A) < \epsilon)$$