Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2017

Esimerkki

Esimerkki 4.40

- $S(t)$: pääoma hetkellä t, $S_0 = S(0)$

Esimerkki

Esimerkki 4.40

- $S(t)$: pääoma hetkellä t, $S_0 = S(0)$
- Ajan Δt jälkeen lisättävä korko: $S(t)\frac{p\Delta t}{100}$

Esimerkki 4.40

- $S(t)$: pääoma hetkellä t, $S_0 = S(0)$
- Ajan Δt jälkeen lisättävä korko: $S(t)\frac{p\Delta t}{100}$
- $S(t+\Delta t) = S(t) + S(t)\frac{p\Delta t}{100} = S(t)(1 + \frac{p\Delta t}{100})$

Esimerkki

Esimerkki 4.40

- $S(t)$: pääoma hetkellä t, $S_0 = S(0)$
- Ajan Δt jälkeen lisättävä korko: $S(t)\frac{p\Delta t}{100}$
- $S(t+\Delta t) = S(t) + S(t)\frac{p\Delta t}{100} = S(t)(1 + \frac{p\Delta t}{100})$
- Jaetaan aikaväli $[0, t]$ n:ään yhtäsuureen osaan, jokaisen pituus $\Delta t = t/n$.

Esimerkki 4.40

- $S(t)$: pääoma hetkellä t, $S_0 = S(0)$
- Ajan Δt jälkeen lisättävä korko: $S(t)\frac{p\Delta t}{100}$
- $S(t+\Delta t) = S(t) + S(t)\frac{p\Delta t}{100} = S(t)(1+\frac{p\Delta t}{100})$
- Jaetaan aikaväli $[0,t]$ n:ään yhtäsuureen osaan, jokaisen pituus $\Delta t = t/n$.

$$S(t) \quad = \quad S_0(1+\frac{pt}{100n})\dots(1+\frac{pt}{100n})$$

Esimerkki 4.40

- $S(t)$: pääoma hetkellä t, $S_0 = S(0)$
- Ajan Δt jälkeen lisättävä korko: $S(t)\frac{p\Delta t}{100}$
- $S(t+\Delta t) = S(t) + S(t)\frac{p\Delta t}{100} = S(t)(1+\frac{p\Delta t}{100})$
- Jaetaan aikaväli $[0,t]$ n:ään yhtäsuureen osaan, jokaisen pituus $\Delta t = t/n$.

$$S(t) \quad = \quad S_0(1+\frac{pt}{100n})\ldots(1+\frac{pt}{100n}) = S_0\left(1+\frac{pt}{100n}\right)^n$$

Esimerkki 4.40

- $S(t)$: pääoma hetkellä t, $S_0 = S(0)$
- Ajan Δt jälkeen lisättävä korko: $S(t)\frac{p\Delta t}{100}$
- $S(t+\Delta t) = S(t) + S(t)\frac{p\Delta t}{100} = S(t)(1+\frac{p\Delta t}{100})$
- Jaetaan aikaväli $[0, t]$ n:ään yhtäsuureen osaan, jokaisen pituus $\Delta t = t/n$.

$$
\begin{aligned}
S(t) &= S_0(1+\frac{pt}{100n})\ldots(1+\frac{pt}{100n}) = S_0\left(1+\frac{pt}{100n}\right)^n \\
&= S_0\left(1+\frac{1}{\frac{100}{pt}n}\right)^n
\end{aligned}
$$

Esimerkki

Esimerkki 4.40

- $S(t)$: pääoma hetkellä t, $S_0 = S(0)$
- Ajan Δt jälkeen lisättävä korko: $S(t)\frac{p\Delta t}{100}$
- $S(t+\Delta t) = S(t) + S(t)\frac{p\Delta t}{100} = S(t)(1+\frac{p\Delta t}{100})$
- Jaetaan aikaväli $[0,t]$ n:ään yhtäsuureen osaan, jokaisen pituus $\Delta t = t/n$.

$$
\begin{aligned}
S(t) &= S_0(1+\frac{pt}{100n})\ldots(1+\frac{pt}{100n}) = S_0\left(1+\frac{pt}{100n}\right)^n \\
&= S_0\left(1+\frac{1}{\frac{100}{pt}n}\right)^n = S_0\left(\left(1+\frac{1}{\frac{100}{pt}n}\right)^{\frac{100}{pt}n}\right)^{\frac{pt}{100}}
\end{aligned}
$$

Esimerkki

Esimerkki 4.40

- $S(t)$: pääoma hetkellä t, $S_0 = S(0)$
- Ajan Δt jälkeen lisättävä korko: $S(t)\frac{p\Delta t}{100}$
- $S(t+\Delta t) = S(t) + S(t)\frac{p\Delta t}{100} = S(t)(1+\frac{p\Delta t}{100})$
- Jaetaan aikaväli $[0, t]$ n:ään yhtäsuureen osaan, jokaisen pituus $\Delta t = t/n$.

$$
\begin{aligned}
S(t) &= S_0(1+\frac{pt}{100n})\ldots(1+\frac{pt}{100n}) = S_0\left(1+\frac{pt}{100n}\right)^n \\
&= S_0\left(1+\frac{1}{\frac{100}{pt}n}\right)^n = S_0\left(\left(1+\frac{1}{\frac{100}{pt}n}\right)^{\frac{100}{pt}n}\right)^{\frac{pt}{100}} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} S_0 e^{\frac{pt}{100}}
\end{aligned}
$$

Esimerkki

Esimerkki 4.40

$$S(t) = S_0 e^{\frac{pt}{100}}$$

Esimerkki

Esimerkki 4.40

$$
\begin{aligned}
& S(t) = S_0 e^{\frac{pt}{100}} \\
\Rightarrow \quad & S'(t) = S_0 e^{\frac{pt}{100}} \frac{p}{100}
\end{aligned}
$$

Esimerkki

Esimerkki 4.40

$$
\begin{aligned}
& S(t) = S_0 e^{\frac{pt}{100}} \\
\Rightarrow \quad & S'(t) = S_0 e^{\frac{pt}{100}} \frac{p}{100} = \frac{p}{100} S(t)
\end{aligned}
$$

Esimerkki

Esimerkki 4.40

$$
\begin{aligned}
& S(t) = S_0 e^{\frac{pt}{100}} \\
\Rightarrow \quad & S'(t) = S_0 e^{\frac{pt}{100}} \frac{p}{100} = \frac{p}{100} S(t),
\end{aligned}
$$

josta

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = \frac{p}{100}.$$

Useampikertaiset derivaatat

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta: $D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta: $D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$
- n-kertainen derivaatta: $D^n f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$

Useampikertaiset derivaatat

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta: $D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$
- n-kertainen derivaatta: $D^n f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$

Osittaisderivaatat:

- $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta: $D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$
- n-kertainen derivaatta: $D^n f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$

Osittaisderivaatat:

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x} f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$,

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta: $D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$
- n-kertainen derivaatta: $D^n f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$

Osittaisderivaatat:

- $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$,

Merkintöjä

- 2-kertainen derivaatta: $D^2 f(x)$, $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$, $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$
- 3-kertainen derivaatta: $D^3 f(x)$, $f'''(x)$, $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$
- n-kertainen derivaatta: $D^n f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$

Osittaisderivaatat:

- $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, jne.
- $D_x^2 f$, $D_{yx} f$, $D_{xy} f$, $D_y^2 f$ jne.

Useampikertaiset derivaatat

Esimerkki

- $D\sin x = \cos x$, $D^2\sin x = -\sin x$, $D^3\sin x = -\cos x$ ja $D^4\sin x = \sin x$, $D^5\sin x = \cos x$, jne.

Esimerkki

- $D\sin x = \cos x$, $D^2\sin x = -\sin x$, $D^3\sin x = -\cos x$ ja $D^4\sin x = \sin x$, $D^5\sin x = \cos x$, jne.
- $De^x = e^x$, $D^2e^x = e^x$, $D^3e^x = e^x$, jne.

Esimerkki

Jos $f(x,y) = x\sin(xy)$, on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sin(xy) + x\cos(xy)y,$$

Esimerkki

Jos $f(x,y) = x\sin(xy)$, on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sin(xy) + x\cos(xy)y,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \cos(xy)x + x\cos(xy) - xy\sin(xy)x$$

Esimerkki

Jos $f(x,y) = x\sin(xy)$, on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sin(xy) + x\cos(xy)y,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) &= \cos(xy)x + x\cos(xy) - xy\sin(xy)x \\ &= 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy). \end{aligned}$$

Esimerkki

Jos $f(x,y) = x\sin(xy)$, on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sin(xy) + x\cos(xy)y,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) &= \cos(xy)x + x\cos(xy) - xy\sin(xy)x \\ &= 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy).\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2\cos(xy)$$

Esimerkki

Jos $f(x,y) = x\sin(xy)$, on

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \sin(xy) + x\cos(xy)y,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) &= \cos(xy)x + x\cos(xy) - xy\sin(xy)x \\ &= 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy).\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^2\cos(xy)$$

ja

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 2x\cos(xy) - x^2 y\sin(xy).$$

Huomautus

Mahdollisesti

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Derivointijärjestyksen voi kuitenkin vaihtaa, jos f on riittävän säännöllinen (toisen kertaluvun osittaisderivaatat jatkuvia).

Väliarvolause

Rollen lause

Olkoon f jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b). Jos $f(a) = f(b)$, niin välillä (a, b) on ainakin yksi sellainen piste ξ, jolle pätee $f'(\xi) = 0$.

Rollen lause

Olkoon f jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b). Jos $f(a) = f(b)$, niin välillä (a, b) on ainakin yksi sellainen piste ξ, jolle pätee $f'(\xi) = 0$.

Todistus

Vakiofunktioille lause on selvä. Jos f ei ole vakio, saa se esim. suurempia arvoja kuin $f(a)$.

Rollen lause

Olkoon f jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b). Jos $f(a) = f(b)$, niin välillä (a, b) on ainakin yksi sellainen piste ξ, jolle pätee $f'(\xi) = 0$.

Todistus

Vakiofunktioille lause on selvä. Jos f ei ole vakio, saa se esim. suurempia arvoja kuin $f(a)$.
Jatkuvana funktiona f:llä on suurin arvo M suljetulla välillä $[a, b]$, olkoon $f(\xi) = M$. Tällöin $f(\xi + h) \leq f(\xi)$ aina, kun $|h|$ on niin pieni että $\xi + h \in [a, b]$. Täten

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \begin{cases} \leq 0, & \text{kun } h > 0 \\ \geq 0, & \text{kun } h < 0. \end{cases}$$

Väliarvolause

Todistus

Vakiofunktioille lause on selvä. Jos f ei ole vakio, saa se esim. suurempia arvoja kuin $f(a)$.
Jatkuvana funktiona f:llä on suurin arvo M suljetulla välillä $[a, b]$, olkoon $f(\xi) = M$. Tällöin $f(\xi + h) \leq f(\xi)$ aina, kun $|h|$ on niin pieni että $\xi + h \in [a, b]$. Täten

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \begin{cases} \leq 0, & \text{kun } h > 0 \\ \geq 0, & \text{kun } h < 0. \end{cases}$$

Todistus

Vakiofunktioille lause on selvä. Jos f ei ole vakio, saa se esim. suurempia arvoja kuin $f(a)$.
Jatkuvana funktiona f:llä on suurin arvo M suljetulla välillä $[a, b]$, olkoon $f(\xi) = M$. Tällöin $f(\xi + h) \leq f(\xi)$ aina, kun $|h|$ on niin pieni että $\xi + h \in [a, b]$. Täten

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \begin{cases} \leq 0, & \text{kun } h > 0 \\ \geq 0, & \text{kun } h < 0. \end{cases}$$

Koska $f'(\xi)$ on olemassa, on olemassa raja-arvo

$$f'(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

Edellämainitusta seuraa, että $f'(\xi) < 0$ ja $f'(\xi) > 0$ ovat molemmat mahdottomia, siis $f'(\xi) = 0$. $\square$

Väliarvolause

Seuraus

Derivoituvan funktion maksimi- tai minimikohdassa on ξ on $f'(\xi) = 0$.

Seuraus

Derivoituvan funktion maksimi- tai minimikohdassa on ξ on $f'(\xi) = 0$.

Seuraus 4.46

Derivoituvalla funktiolla on kahden nollakohtansa välillä ainakin yksi derivaatan nollakohta.

Seuraus

Derivoituvan funktion maksimi- tai minimikohdassa on ξ on $f'(\xi) = 0$.

Seuraus 4.46

Derivoituvalla funktiolla on kahden nollakohtansa välillä ainakin yksi derivaatan nollakohta.

Seuraus 4.47

Jos funktiolla f on derivaatat k:nteen kertalukuun asti ja n reaalista nollakohtaa, on funktiolla $f^{(k)}(x)$ ainakin $n - k$ reaalista nollakohtaa.

Väliarvolause

Differentiaalilaskennan väliarvolause

Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b), niin tällöin on ainakin yksi piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(b-a) = f(b) - f(a).$$

Differentiaalilaskennan väliarvolause

Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä (a, b), niin tällöin on ainakin yksi piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(b-a) = f(b) - f(a).$$

Todistus

Määritellään $g(x) = f(x)(b-a) - (f(b) - f(a))x$, jolloin $g(a) = g(b)$. Rollen lauseen mukaan on olemassa $\xi \in (a, b)$, jossa

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi)(b-a) - (f(b) - f(a)).$$

Väliarvolause

Integraalilaskennan peruslause

Jos välillä I on $f'(x) = 0$, niin f on vakio välillä I.

Väliarvolause

Integraalilaskennan peruslause

Jos välillä I on $f'(x) = 0$, niin f on vakio välillä I.

Todistus

Jos a, $x \in I$, niin

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0,$$

joten $f(x) = f(a)$.

Väliarvolause

Integraalilaskennan peruslause

Jos välillä I on $f'(x) = 0$, niin f on vakio välillä I.

Todistus

Jos a, $x \in I$, niin

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0,$$

joten $f(x) = f(a)$.

Seuraus

Jos $f'(x) = g'(x)$ välillä I, niin $f(x) = g(x) + C$ välillä I

Integraalilaskennan peruslause

Jos välillä I on $f'(x) = 0$, niin f on vakio välillä I.

Todistus

Jos a, $x \in I$, niin

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0,$$

joten $f(x) = f(a)$.

Seuraus

Jos $f'(x) = g'(x)$ välillä I, niin $f(x) = g(x) + C$ välillä I

Todistus

Funktio $h(x) = f(x) - g(x)$ toteuttaa $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, joten se on vakio C välillä I.

Väliarvolause

Seuraus

Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $I = (a, b)$, niin f on kasvava välillä $[a, b]$

Seuraus

Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $I = (a, b)$, niin f on kasvava välillä $[a, b]$

Todistus

Valitaan $x_1 < x_2$ väliltä $[a, b]$. Tällöin

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0.$$

Väliarvolause

Seuraus

Jos $f'(x) \geq 0$ välillä $I = (a, b)$, niin f on kasvava välillä $[a, b]$

Todistus

Valitaan $x_1 < x_2$ väliltä $[a, b]$. Tällöin

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0.$$

Huomautus

Jos välillä (a, b) on $f'(x) > 0$, $f'(x) \leq 0$, tai $f'(x) < 0$, voidaan vastaavasti todistaa, että funktio f on aidosti kasvava, vähenevä, tai aidosti vähenevä välillä $[a, b]$.

Väliarvolause

Yleistetty väliarvolause

Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia sen sisällä, on olemassa piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Väliarvolause

Yleistetty väliarvolause

Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia sen sisällä, on olemassa piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Todistus

Apufunktio

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

toteuttaa Rollen lauseen ehdot, joten on olemassa ξ, jolle $h'(\xi) = 0$. Koska $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, seuraa väite suoraan tästä. $\square$

Väliarvolause

Yleistetty väliarvolause

Jos f ja g ovat jatkuvia välillä $[a, b]$ ja derivoituvia sen sisällä, on olemassa piste $\xi \in (a, b)$, jossa

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Todistus

Apufunktio

$$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

toteuttaa Rollen lauseen ehdot, joten on olemassa ξ, jolle $h'(\xi) = 0$. Koska $h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a))$, seuraa väite suoraan tästä. $\square$

Huomautus

Tavallinen väliarvolause saadaan yleistetystä valitsemalla $g(x) = x$.

Esimerkki 4.53

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

Esimerkki 4.53

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

Lause 4.54 (Käänteisfunktiolause)

Oletetaan, että $f'(x)$ on olemassa ja jatkuva jossain pisteen a ympäristössä ja $f'(a) \neq 0$. Merkitään $f(a) = b$. Tällöin on olemassa suljetut välit $I_1 = [a_0, a_1]$ ja $I_2 = [b_0, b_1]$, joille $a \in (a_0, a_1)$ ja $b \in (b_0, b_1)$ siten, että

- $f : I_1 \to I_2$ on aidosti monotoninen bijektio.
- $f^{-1} : I_2 \to I_1$ on myös aidosti monotoninen ja derivoituva.
- $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

l'Hospitalin sääntö

Lause (l'Hospital)

Olkoon $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ ja $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ ja raja-arvo

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olemassa äärellisenä tai äärettömänä. Silloin

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Todistuksen idea

(Tapaus a äärellinen) Yleistetyn väliarvolauseen perusteella

$$f'(\xi)(g(x)-g(a)) = g'(\xi)(f(x)-f(a)),$$

missä $\xi \in (a, x)$.

Todistuksen idea

(Tapaus a äärellinen) Yleistetyn väliarvolauseen perusteella

$$f'(\xi)(g(x) - g(a)) = g'(\xi)(f(x) - f(a)),$$

missä $\xi \in (a, x)$. Jos $f(a)$ tai $g(a)$ ei ole aiemmin määritelty, määritellään ne nollaksi, jolloin f ja g tulevat jatkuviksi pisteessä a ja kaava saa muodon

$$f'(\xi)g(x) = g'(\xi)f(x).$$

Todistuksen idea

(Tapaus a äärellinen) Yleistetyn väliarvolauseen perusteella

$$f'(\xi)(g(x) - g(a)) = g'(\xi)(f(x) - f(a)),$$

missä $\xi \in (a, x)$. Jos $f(a)$ tai $g(a)$ ei ole aiemmin määritelty, määritellään ne nollaksi, jolloin f ja g tulevat jatkuviksi pisteessä a ja kaava saa muodon

$$f'(\xi)g(x) = g'(\xi)f(x).$$

Tällöin

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Väite seuraa tästä, sillä kun $x \to a$ on myös $\xi \to a$.

Esimerkkejä

Esimerkit 4.58 ja 4.59

Esimerkkejä

Esimerkit 4.58 ja 4.59

Esimerkki

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Esimerkkejä

Esimerkit 4.58 ja 4.59

Esimerkki

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Esimerkki

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x}$$