Analyysi I (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2017

Esimerkki

- $x_0 = 29.112017$

Esimerkki

- $x_0 = 29.112017$
- $x_1 = \cos x_0 = -0.669186283317726\ldots$

Likimääräisratkaisut

Esimerkki

- $x_0 = 29.112017$
- $x_1 = \cos x_0 = -0.669186283317726\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.784326712984393\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 29.112017$
- $x_1 = \cos x_0 = -0.669186283317726\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.784326712984393\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.707864005012992\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 29.112017$
- $x_1 = \cos x_0 = -0.669186283317726\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.784326712984393\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.707864005012992\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.759752458596305\ldots$

Likimääräisratkaisut

Esimerkki

- $x_0 = 29.112017$
- $x_1 = \cos x_0 = -0.669186283317726\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.784326712984393\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.707864005012992\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.759752458596305\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.725006525112925\ldots$

Likimääräisratkaisut

Esimerkki

- $x_0 = 29.112017$
- $x_1 = \cos x_0 = -0.669186283317726\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.784326712984393\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.707864005012992\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.759752458596305\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.725006525112925\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.748495094916582\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 29.112017$
- $x_1 = \cos x_0 = -0.669186283317726\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.784326712984393\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.707864005012992\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.759752458596305\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.725006525112925\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.748495094916582\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.732713841579523\ldots$

Likimääräisratkaisut

Esimerkki

- $x_0 = 29.112017$
- $x_1 = \cos x_0 = -0.669186283317726\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.784326712984393\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.707864005012992\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.759752458596305\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.725006525112925\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.748495094916582\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.732713841579523\ldots$
- $x_8 = \cos x_7 = 0.743361881943507\ldots$

Likimääräisratkaisut

Esimerkki

- $x_0 = 29.112017$
- $x_1 = \cos x_0 = -0.669186283317726\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.784326712984393\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.707864005012992\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.759752458596305\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.725006525112925\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.748495094916582\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.732713841579523\ldots$
- $x_8 = \cos x_7 = 0.743361881943507\ldots$
- $x_9 = \cos x_8 = 0.736197513470613\ldots$

Esimerkki

- $x_0 = 29.112017$
- $x_1 = \cos x_0 = -0.669186283317726\ldots$
- $x_2 = \cos x_1 = 0.784326712984393\ldots$
- $x_3 = \cos x_2 = 0.707864005012992\ldots$
- $x_4 = \cos x_3 = 0.759752458596305\ldots$
- $x_5 = \cos x_4 = 0.725006525112925\ldots$
- $x_6 = \cos x_5 = 0.748495094916582\ldots$
- $x_7 = \cos x_6 = 0.732713841579523\ldots$
- $x_8 = \cos x_7 = 0.743361881943507\ldots$
- $x_9 = \cos x_8 = 0.736197513470613\ldots$
- $x_{10} = \cos x_9 = 0.741027184535291\ldots$

Likimääräisratkaisut

Esimerkki

$$x = 0.7390851332151606416553120876 7\ldots.$$

on yhtälön $x = \cos x$ ratkaisu.

Likimääräisratkaisut

Esimerkki

$$x = 0.7390851332151606416553120876 7 \ldots.$$

on yhtälön $x = \cos x$ ratkaisu.

Likimääräinen ratkaisu

- Haarukointimenetelmä

Likimääräisratkaisut

Esimerkki

$$x = 0.739085133215160641655312087673\ldots$$

on yhtälön $x = \cos x$ ratkaisu.

Likimääräinen ratkaisu

- Haarukointimenetelmä
- Iterointimenetelmä

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.
- Pyrkimys: Löytää h, jolle $f(x+h) = 0$.

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.
- Pyrkimys: Löytää h, jolle $f(x+h) = 0$.
- Derivaatan määritelmä $\Rightarrow \underbrace{f(x+h)}_{=0} - f(x) \approx f'(x)h$,

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.
- Pyrkimys: Löytää h, jolle $f(x+h) = 0$.
- Derivaatan määritelmä $\Rightarrow \underbrace{f(x+h)}_{=0} - f(x) \approx f'(x)h$, joten h kannattaa valita
$$h = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Newtonin menetelmä

- Lähtökohta: $f(x) \neq 0$, mutta $f(x) \approx 0$.
- Pyrkimys: Löytää h, jolle $f(x+h) = 0$.
- Derivaatan määritelmä $\Rightarrow \underbrace{f(x+h)}_{=0} - f(x) \approx f'(x)h$, joten h kannattaa valita
$$h = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$
- $x + h = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ voi siis olla x:ää parempi likiarvo nollakohdalle.

Newtonin menetelmä

- Valitse alkulikiarvo x_0
- Aseta $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Newtonin menetelmä

- Valitse alkulikiarvo x_0
- Aseta $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Esimerkki

Valitaan $N > 0$ ja sovelletaan Newtonin menetelmää funktioon $f(x) = x^2 - N$

Likimääräisratkaisut

Määritelmä

- Jos $f(x_f) = x_f$, sanotaan, että x_f on funktion f kiintopiste
- Jos on olemassa $c \in (0,1)$ ja väli I, jolle pätee $f(I) \subset I$ ja $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$ aina, kun x, $y \in I$, sanotaan, että f on kutistava kuvaus välillä I.

Likimääräisratkaisut

Määritelmä

- Jos $f(x_f) = x_f$, sanotaan, että x_f on funktion f kiintopiste
- Jos on olemassa $c \in (0,1)$ ja väli I, jolle pätee $f(I) \subset I$ ja $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x,y)$ aina, kun x, $y \in I$, sanotaan, että f on kutistava kuvaus välillä I.

Kiintopistelause

Jos f on kutistava kuvaus välillä I, on f:llä myös kiintopiste $x_f \in I$. Mikä hyvänsä jono $x_0 \in I$, $x_{i+1} = f(x_i)$ lähestyy kiintopistettä x_f.

Huomautus

Jos $f(I) \subseteq I$ ja $|f'(x)| \leq c < 1$ välillä I, on f kutistava kuvaus välillä I.

Huomautus

Jos $f(I) \subseteq I$ ja $|f'(x)| \leq c < 1$ välillä I, on f kutistava kuvaus välillä I. (Seuraa differentiaalilaskennan väliarvolauseesta)

Likimääräisratkaisut

Huomautus

Jos $f(I) \subseteq I$ ja $|f'(x)| \leq c < 1$ välillä I, on f kutistava kuvaus välillä I. (Seuraa differentiaalilaskennan väliarvolauseesta)

Esimerkki

Newtonin menetelmän analysointi.

Käyrän tangentti

Tarkastellaan käyrää $y = f(x)$ pisteessä $x = x_0$ ja merkitään $x = x_0 + h$.

Käyrän tangentti

Tarkastellaan käyrää $y = f(x)$ pisteessä $x = x_0$ ja merkitään $x = x_0 + h$. Jos f on derivoituva x_0:ssa, on

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\epsilon(h)$$

Käyrän tangentti

Tarkastellaan käyrää $y = f(x)$ pisteessä $x = x_0$ ja merkitään $x = x_0 + h$. Jos f on derivoituva x_0:ssa, on

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\epsilon(h)$$

Nyt

$$y = f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\epsilon(h)$$

esittää alkuperäistä käyrää,

Käyrän tangentti

Tarkastellaan käyrää $y = f(x)$ pisteessä $x = x_0$ ja merkitään $x = x_0 + h$. Jos f on derivoituva x_0:ssa, on

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\epsilon(h)$$

Nyt

$$y = f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\epsilon(h)$$

esittää alkuperäistä käyrää, ja

$$y = f(x_0) + f'(x_0)h$$

esittää tangenttia pisteessä $x = x_0$.

Käyrän tangentti

Tarkastellaan käyrää $y = f(x)$ pisteessä $x = x_0$ ja merkitään $x = x_0 + h$. Jos f on derivoituva x_0:ssa, on

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h\epsilon(h)$$

Nyt

$$y = f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\epsilon(h)$$

esittää alkuperäistä käyrää, ja

$$y = f(x_0) + f'(x_0)h$$

esittää tangenttia pisteessä $x = x_0$. Sijoittamalla $h = x - x_0$ saadaan tangentin yhtälöksi

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f(x_0)$$

Käyrän tangentti

Esimerkkejä

- Käyrän $y = f(x) = x^3$ tangentti pisteessä $x = 2$.

Muutoksen arviointi

Lineaarinen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

Muutoksen arviointi

Lineaarinen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

Merkitään $\Delta x = h$ ja $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, jolloin

$$\underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\Delta y} \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

Muutoksen arviointi

Lineaarinen approksimaatio

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

Merkitään $\Delta x = h$ ja $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, jolloin

$$\underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\Delta y} \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

Esimerkki

Arvioi funktioita $\ln(1+x)$ ja e^x kun x on itseisarvoltaan pieni.

Muutoksen arviointi

Määritelmä

Muutoksen

$$\underbrace{f(x+\Delta x)-f(x)}_{\Delta y} \approx f'(x)\cdot\Delta x$$

lineaarista osaa kutsutaan *differentiaaliksi* ja merkitään $df = f'(x)\Delta x$ tai dy, jos $y = f(x)$.

Muutoksen arviointi

Määritelmä

Muutoksen

$$\underbrace{f(x+\Delta x)-f(x)}_{\Delta y} \approx f'(x)\cdot\Delta x$$

lineaarista osaa kutsutaan *differentiaaliksi* ja merkitään $df = f'(x)\Delta x$ tai dy, jos $y = f(x)$.

Huomautus

Koska funktiolle $f(x) = x$ on $dx = \frac{d}{dx}x \cdot \Delta x = \Delta x$, on mahdollista merkitä myös

$$df = f'(x)dx.$$

Tällöin kuitenkin df ja dx ovat äärellisiä reaalilukuja, joille pätee

$$\frac{df}{dx} = f'(x).$$

Seuraus

- $d(f+g) = df + dg$
- $d(fg) = g\,df + f\,dg$
- $d(\frac{f}{g}) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$
- $d(f \circ g) = f'dg$

Osittaisderivaatat

Määritelmä

Funktion $z = f(x, y)$ osittaisderivaatta x:n suhteen määritellään

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Osittaisderivaatat

Määritelmä

Funktion $z = f(x, y)$ osittaisderivaatta x:n suhteen määritellään

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Muita merkintöjä ovat $\frac{\partial f}{\partial x}$, $D_x f$, $f_x(x, y)$, f_x, ja z_x.

Osittaisderivaatat

Määritelmä

Funktion $z = f(x, y)$ osittaisderivaatta x:n suhteen määritellään

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Muita merkintöjä ovat $\frac{\partial f}{\partial x}$, $D_x f$, $f_x(x, y)$, f_x, ja z_x.

Esimerkkejä

Esimerkit 4.62, 4.63, 4.64

Lause

Oletetaan, että jossakin pisteen (a, b) ympäristössä funktiolla $f(x, y)$ on jatkuvat osittaisderivaatat ja että funktioilla $x(t)$ sekä $y(t)$ on jatkuvat derivaattafunktiot pisteiden $a = x(c)$ ja $b = y(c)$ ympäristössä. Tällöin yhdistetty funktio

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

on derivoituva ja

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)y'(t) \end{aligned}$$

jossakin pisteen $t = c$ ympäristössä.

Todistuksen idea

Derivoituvuutta vastaava käsite, *differentioituvuus* määritellään usean muuttujan funktioille $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ seuraavasti: $f = (f_1, \ldots, f_n)$ on differentioituva pisteessä $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, jos on olemassa sellainen lineaarikuvaus $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, että

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = T\boldsymbol{h} + ||\boldsymbol{h}||\epsilon(\boldsymbol{h}),$$

missä $\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \epsilon(\boldsymbol{h}) = \epsilon(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ ja $||\boldsymbol{h}|| = d(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{0})$.

Osittaisderivaatat

Todistuksen idea

Derivoituvuutta vastaava käsite, *differentioituvuus* määritellään usean muuttujan funktioille $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ seuraavasti: $f = (f_1, \ldots, f_n)$ on differentioituva pisteessä $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, jos on olemassa sellainen lineaarikuvaus $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, että

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = T\boldsymbol{h} + ||\boldsymbol{h}||\epsilon(\boldsymbol{h}),$$

missä $\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \epsilon(\boldsymbol{h}) = \epsilon(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ ja $||\boldsymbol{h}|| = d(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{0})$. Tarkastelemalla tapauksia $\boldsymbol{h} = h\boldsymbol{e_i} = h(0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$ käy ilmi, että lineaarikuvauksen T matriisi on muotoa

$$T_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Todistuksen idea

Funktion $f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ derivaattaa vastaava matriisi on muotoa

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}$$

ja funktion $g(t)=(x(t),y(t))$ derivaattaa vastaava matriisi on

$$(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t})^T=(x'(t),y'(y))^T.$$

Yhdistetyn funktion derivaatta saadaan näiden tulona

$$\begin{aligned}F'(t) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial t}\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)y'(t).\end{aligned}$$

Lause 4.65

Edellisen lauseen oletuksin funktion $F(x) = f(x, g(x))$ derivaatta on olemassa ja voidaan esittää muodossa

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} g'(x).$$