Analyysi I (sivuaineopiskelijat)

Tentti 22.1.2018 (4h)

Sallitut apuvälineet: Matematiikan laitoksen kaksipuolinen kaava-arkki ja laskin, joka ei kykene symboliseen eikä graafiseen laskentaan.

Vastaa jokaiseen tehtävään. Kurssin suorittaminen edellyttää, että saat yli 50% maksimipistemäärästä.

1. Olkoon S_n määritelty seuraavasti, kun $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Laske S_n muutamalla arvolla $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ kunnes arvaat S_n:lle yleisen lausekkeen. Todista arvauksesi oikeaksi matemaattisella induktiolla.

Vastaus: $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{3}{4}$, jne. Arvaus: $S_n = \frac{n}{n+1}$ kaikille $n \in \mathbb{N}$.

Induktion lähtökohta $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{2},$$

tosi.

Induktio-oletus: Väite pitää paikkansa arvolle n. Induktioväite: Väite pitää paikkansa arvolle $n+1$. Todistus:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.
\end{aligned}$$

2. a) Selosta miten raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4n^3 - 2n + 1}{3n^3 + 1}$$

käytännössä määritetään, kun tiedetään että $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} c = c$ ja tunnetaan summia, tuloja, ja osamääriä koskevat raja-arvotulokset.

Vastaus:

$$\frac{4n^3 - 2n + 1}{3n^3 + 1} = \frac{4 - 2\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{1}{n^3}}$$

Tuloa koskevan raja-arvotuloksen perusteella $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \cdot 0$ ja samoin $\frac{1}{n^3} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Tuloja, summia, ja osamääriä koskevien tulosten perusteella kysytty raja-arvo on siis

$$\frac{4 - 2 \cdot 0 + 0}{3 + 0} = \frac{4}{3}.$$

b) Olkoon $\epsilon > 0$. Selvitä miten suureksi n pitää valita, jotta

$$d(\frac{4n^3 - 2n + 1}{3n^3 + 1}, \frac{4}{3}) < \epsilon.$$

Vastaus:

$$\begin{aligned} d(\frac{4n^3 - 2n + 1}{3n^3 + 1}, \frac{4}{3}) &= \left|\frac{4n^3 - 2n + 1}{3n^3 + 1} - \frac{4}{3}\right| = \left|\frac{12n^3 - 6n + 3 - 12n^3 - 4}{3(3n^3 + 1)}\right| \\ &= \frac{|-6n - 1|}{3(3n^3 + 1)} < \frac{6n + 1}{9n^3} < \frac{6n + n}{9n^3} = \frac{7n}{9n^3} = \frac{7}{9}\frac{1}{n^2} < \epsilon, \end{aligned}$$

kun $n > \sqrt{\frac{7}{9}\frac{1}{\epsilon}}$.

3. a) Yhtälö $y \sin x = x^3 + \cos y$ määrittelee derivoituvan funktion $y = f(x)$ jossain pisteen $(0, \frac{\pi}{2})$ ympäristössä. Määritä jokin lauseke $\frac{dy}{dx}$ ja laske $f'(0)$.

   Vastaus: Sijoittamalla $(x, y) = (0, \frac{\pi}{2})$ saadaan $0 = 0$, joten kyseinen piste kuuluu käyrälle. Merkitään $F(x, y) = y \sin x - x^3 - \cos y$ ja todetaan, että $\frac{\partial}{\partial y} F = \sin x + \sin y$, ja osittaisderivaatta ei saa arvoa nolla tarkastelupisteessä $(0, \frac{\pi}{2})$.

   Implisiittisellä derivoinnilla saadaan

$$y' \sin x + y \cos x = 3x^2 - \sin y \cdot y',$$

   josta voidaan ratkaista

$$y' = \frac{3x^2 - y \cos x}{\sin x + \sin y}.$$

   Kysytty arvo $f'(0)$ saadaan sijoittamalla $(x, y) = (0, \frac{\pi}{2})$:

$$f'(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - \frac{\pi}{2} \cdot \cos 0}{\sin 0 + \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}.$$

   b) Parametriesitys $x(t) = \cos t + t \sin t$, $y(t) = \sin t - t \cos t$ määrittelee derivoituvan funktion $y = f(x)$ jossain pisteen $(1, 0)$ ympäristössä. Määritä jokin lauseke $\frac{dy}{dx}$ ja laske $f'(1)$.

   Vastaus: Koska kyseessä on parametrimuoto, pitää selvittää millä t:n arvoilla piste $(1, 0)$ saavutetaan. Yhtälöparista

$$\begin{cases} \cos t + t \sin t &= 1 \\ \sin t - t \cos t &= 0 \end{cases}$$

saadaan ylempi yhtälö $\cos t$:llä ja alempi yhtälö $\sin t$:llä kertomallla pari

$$\begin{cases} \cos^2 t + t \sin t \cos t &= \cos t \\ \sin^2 t - t \sin t \cos t &= 0 \end{cases}$$

ja edelleen yhtälöt yhteen laskemalla $1 = \cos t$, minkä perusteella $t = n \cdot 2\pi$. Sijoittamalla tämä alkuperäisen yhtälöparin alempaan yhtälöön nähdään, että ainoa ratkaisu on $t = 0$. Koordinattifunktiot ovat derivoituvia tämän pisteen ympäristössä eikä $x'(t)$ vaihda merkkiään, jolloin funktion f derivoituvuus seuraa.

Lauseke derivaattafunktiolle voidaan määrittää seuraavasti:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t - \cos t + t \sin t}{-\sin t + \sin t + t \cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t.$$

Näin ollen kysytty derivaatan arvo voidaan laskea seuraavasti: $f'(1) = \tan 0 = 0$.

4. Ilmapalloon (oletetaan pallon muotoiseksi) puhalletaan ilmaa 1 l sekunnissa. Millä nopeudella pallon säde kasvaa sillä hetkellä kun sen halkaisija on 40 cm? Ohje: r-säteisen pallon tilavuus on $\frac{4}{3}\pi r^3$.

   Vastaus: Kysytty suure on säteen kasvunopeus $\frac{dr}{dt}$, joka voidaan selvittää seuraavalla tavalla. Pallon tilavuus on $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ja tilavuuden aikaderivaatta voidaan ketjusäännön perusteella kirjoittaa muotoon

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt},$$

   mistä

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{4\pi r^2}.$$

   Koska $\frac{dV}{dt} = 1$ l/s $= 1000\,\mathrm{cm}^3/s$, saadaan säteen arvolla $40/2 = 20$ cm kasvunopeudeksi

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1000}{4\pi \cdot 20^2} = 0.1989\ldots,$$

   yksikkönä cm/s.

5. Newtonin gravitaatiolain mukaan kahden kappaleen välillä vallitsee vetovoima joka on suoraan verrannollinen kappaleiden massoihin m ja M sekä kääntäen verrannollinen etäisyyden r neliöön:

$$F = G\frac{mM}{r^2},$$

   missä verrannollisuuskerroin G on ns. gravitaatiovakio. Käytä differentiaalilaskennan tarjoamaa **lineaarista approksimaatiota** arvioidaksesi kuinka monta prosenttia maan vetovoima kiertoradalla 360 km korkeudella on maan pinnalla vallitsevasta vetovoimasta. Maan säteeksi arvioidaan 6400 km.

Vastaus: Prosentuaalinen vähennys maan vetovoimasta kiertoradalla on $\frac{F+\Delta F}{F} = 1 + \frac{\Delta F}{F}$, missä

$$\Delta F = F(r + \Delta r) - F(r) \approx F'(r)\Delta r = -2G\frac{mM}{r^3}\Delta r = -2F(r)\frac{\Delta r}{r},$$

siis

$$\frac{\Delta F}{F} = -2\frac{\Delta r}{r} = -\frac{9}{80} = -0.1125$$

ja

$$1 + \frac{\Delta F}{F} = 1 - 0.1125 = 0.8875.$$