

Analyysi I (sivuaineopiskelijat)

Tentti 26.3.2018 (4h)

Sallitut apuvälineet: Matematiikan laitoksen kaksipuolinen kaava-arkki ja laskin, joka ei kykene symboliseen eikä graafiseen laskentaan.

Vastaa jokaiseen tehtävään. Kurssin suorittaminen edellyttää, että saat yli 50% maksimipistemäärästä.

1. Laske summan

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)$$

arvo muutamalla pienellä luvun $n \in \mathbb{N}$ arvolla. Arvaa yleinen lauseke summalle ja todista arvaus induktiolla oikeaksi.

Vastaus: Arvoilla $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ saadaan summan arvoiksi 1, $1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$ ja $1+3+5+7=16=4^2$ joten arvataan summan arvoksi yleisesti

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

Induktion lähtökohta $n=1$ on jo todettu oikeaksi, joten oletetaan (induktio-oletus), että väite pitää paikkansa luvulle n .

Näytetään sitten toteen että väite pitää paikkansa myös luvulle $n+1$ (induktioväite):

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) + (2(n+1)-1) \stackrel{\text{ind.ol}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

2. a) Selosta miten raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - n + 3}{3n^3 - 1}$$

käytännössä määritetään, kun tiedetään että $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ ja tunnetaan summia, tuloja, ja osamääriä koskevat raja-arvotulokset.

Vastaus:

$$\frac{4n^3 - n + 3}{3n^3 - 1} = \frac{4 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{3 - \frac{1}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0}{3 - 0} = \frac{4}{3}.$$

b) Olkoon $\epsilon > 0$. Selvitä miten suureksi n pitää valita, jotta

$$d\left(\frac{4n^3 - n + 3}{3n^3 - 1}, \frac{4}{3}\right) < \epsilon.$$

Vastaus:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{4n^3 - n + 3}{3n^3 - 1}, \frac{4}{3}\right) &= \left| \frac{4n^3 - n + 3}{3n^3 - 1} - \frac{4}{3} \right| = \left| \frac{3(4n^3 - n + 3) - 4(3n^3 - 1)}{3(3n^3 - 1)} \right| \\ &= \left| \frac{-3n + 13}{3(3n^3 - 1)} \right| = \frac{3n - 13}{3(3n^3 - 1)} \leq \frac{3n}{3(3n^3 - n^3)} = \frac{n}{2n^3} = \frac{1}{2n^2} < \epsilon, \end{aligned}$$

kunhan

$$n > \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$$

3. Viisi metriä pitkät tikapuut nojaavat pystysuoraa seinää vastaan. Tikapuiden alakärki liikuu seinästä poispäin tasaisella nopeudella $0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Millä nopeudella tikapuiden yläkärki liikuu alaspäin sillä hetkellä kun alakärki on kolmen metrin etäisyydellä seinästä? Maanpinta oletetaan vaakasuoraksi.

Vihje: Mallinna tilanne siten, että seinää kuvaa positiivinen y -akseli ja maanpintaa positiivinen x -akseli. Tikapuiden yläkärkeä esittää piste $(0, y)$ ja alakärkeä piste $(x, 0)$. Sekä x että y riippuvat ajasta t .

Vastaus:

Vihjeen mukaisessa mallinnoksessa on $x^2 + y^2 = 5^2$ ja $x'(t) = 0.1$. Tästä voidaan selvittää $y'(t)$ implisiittisellä derivoinnilla:

$$2xx' + 2yy' = 0,$$

josta

$$y' = -\frac{xx'}{y} = -\frac{xx'}{\sqrt{5^2 - x^2}}.$$

Sijoittamalla tähän $x = 3$ ja $x' = 0.1$ saadaan $y' = -0.075$, yksikkönä m/s

4. a) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2(e^x - 1)}.$$

Vastaus: l'Hospitalin sääntöä toistuvasti soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2(e^x - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x(e^x - 1) + x^2e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{(2x + x^2)e^x - 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{(2 + 2x)e^x + (2x + x^2)e^x - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{(2 + 4x + x^2)e^x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{(4 + 2x)e^x + (2 + 4x + x^2)e^x} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

b) Määritellään parametrimuotoinen käyrä $(x, y) = (t^2 - 1, t^3 - t)$, missä $t \in \mathbb{R}$. Hahmottele käyrää näkyviin välillä $t \in [-\frac{6}{5}, \frac{6}{5}]$, selvitä missä pisteessä käyrä leikkaa itseään ja etsi kyseiseen pisteeseen piirrettyjen tangenttien yhtälöt.

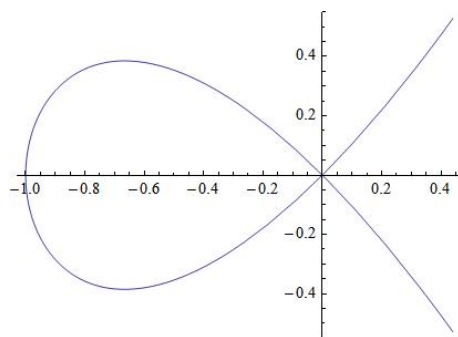
Vastaus: Käyrä leikkaa itseään sellaisessa pisteessä, jossa eri parametrin arvoilla t_1 ja t_2 saadaan sama piste, ts. $t_1^2 - 1 = t_2^2 - 1$ ja $t_1^3 - t_1 = t_2^3 - t_2$. Ensimmäisen yhtälön perusteella $t_1 = \pm t_2$ ja sijoittamalla $t_2 = -t_1$ toiseen yhtälöön saadaan joko $t_1 = 0$ tai $t_1 = \pm 1$.

Täten siis arvoilla $t = -1$ ja $t = 1$ käyrä kulkee saman pisteen (origon) kautta.

Tangentin kulmakerrointa varten on laskettava

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 1}{2t},$$

mikä saa arvon 1, kun $t = 1$ ja -1 , kun $t = -1$. Koska kysytyt tangentin kulkevat origon kautta, ovat niiden yhtälöt siis $y = x$ ja $y = x$.



5. Vaakasuoran alustan yläpuolelta valutetaan ränniä pitkin soraa kasaan tasaisella nopeudella $1 \text{ m}^3/\text{min}$. Sorakasa asettuu koko ajan sellaisen suoran ympyräkartion muotoon, jonka pohjan säde on sama kuin korkeus. Kuinka suurella nopeudella (m/min) kartion pohjan säde kasvaa sillä hetkellä kun kartion tilavuus on 1 m^3 ? Entä sillä hetkellä kun pohjan säde on 5 m ?

Ohje: Kartion tilavuus on kolmasosa pohjan alan ja kartion korkeuden tulosta.

Vastaus: Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{1}{3}\pi r^3$, missä r on pohjaympyrän säde. Kartion tilavuuden kasvunopeus on tunnettu $1 \text{ (m}^3/\text{min)}$, ja se voidaan kytkeä muihin tehtävän kannalta merkittäviin suureisiin käyttämällä ketjusääntöä:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = \pi r^2 \frac{dr}{dt},$$

josta saadaan

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi r^2}$$

Toiseen kysymykseen vastaus on siis $\frac{1}{\pi 5^2} \approx 0.0127$. Ensimmäiseen kysymykseen vastaus saadaan selvittämällä millä r :n arvolla kartion tilavuus on 1 m^3 , toisin sanoen ratkaisemalla yhtälö $1 = \frac{1}{3}\pi r^3$, josta saadaan $r = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \approx 0.984745$ ja sijoittamalla tämä ylläolevaan lausekkeeseen, saadaan arvo 0.3282 .