

Analyysi I (sivuaineopiskelijat)

Tentti 13.6.2018 (4h)

Sallitut apuvälineet: Matematiikan laitoksen kaksipuolinen kaava-arkki ja laskin, joka ei kykene symboliseen eikä graafiseen laskentaan.

Vastaa jokaiseen tehtävään. Kurssin suorittaminen edellyttää, että saat yli 50% maksimipistemäärästä.

1. Olkoon S_n määritelty seuraavasti, kun $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Laske S_n muutamalla arvolla $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ kunnes arvaat S_n :lle yleisen lausekkeen. Todista arvauksesi oikeaksi matemaattisella induktiolla.

Vastaus: $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{3}{4}$, $S_4 = \frac{4}{5}$, mistä voidaan arvata, että $S_n = \frac{n}{n+1}$ ja väitetään, että näin on asianlaita kaikille luvuille $n \geq 1$.

Induktion lähtökohta $S_1 = \frac{1}{2}$ on jo havaittu todeksi.

Induktio-oletus: $S_n = \frac{n}{n+1}$ pitää paikkansa jollekin luvulle n .

Induktioväite: $S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ pitää paikkansa.

Induktioväitteen todistus:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \stackrel{\text{ind.ol.}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

2. a) Olkoon $a_n = \frac{5n^3 - 3n + 2}{6n^3 - 2n^2 + 3}$. Selosta miten raja-arvo $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

käytännössä määritetään, kun tiedetään että $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim c = c$ ja tunnetaan summia, tuloja, ja osamääriä koskevat raja-arvotulokset.

- b) Etsi jokin sellanen luku N_ε , että $d(a_n, A) = |a_n - A| < \varepsilon$, kun $n > N_\varepsilon$.

Vastaus:

$$\frac{5n^3 - 3n + 2}{6n^3 - 2n^2 + 3} = \frac{5 - 3\frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^3}}{6 - 2\frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{6 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0} = \frac{5}{6}.$$

Löydetty raja-arvo perustuu osamääriä, summia ja tuloja koskeviin raja-arvotuloksiin. Jälkimmäistä kysymystä varten lasketaan

$$\begin{aligned} d(a_n, \frac{5}{6}) &= \left| \frac{5n^3 - 3n + 2}{6n^3 - 2n^2 + 3} - \frac{5}{6} \right| \\ &= \left| \frac{6(5n^3 - 3n + 2)}{6(6n^3 - 2n^2 + 3)} - \frac{5(6n^3 - 2n^2 + 3)}{6(6n^3 - 2n^2 + 3)} \right| \\ &= \left| \frac{10n^2 - 18n - 3}{6(6n^3 - 2n^2 + 3)} \right| \end{aligned}$$

Kun $n \geq 2$, on helppo huomata, että

$$d(a_n, \frac{5}{6}) = \frac{10n^2 - 18n - 3}{6(6n^3 - 2n^2 + 3)} \leq \frac{10n^2}{6(6n^3 - 2n^3)} = \frac{10n^2}{6 \cdot 4n^3} = \frac{5}{12n}.$$

Näin ollen

$$d(a_n, \frac{5}{6}) \leq \frac{5}{12n} < \varepsilon,$$

kunhan $n \geq \frac{5}{12\varepsilon}$.

3. Määritä raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2}.$$

Vastaus: Soveltamalla toistuvasti l'Hospitalin sääntöä saadaan

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{2e^x - 2 - 2x - x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 \cos(2x)}{2e^x - 2 - 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x + 4 \sin(2x)}{2e^x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x + 8 \cos(2x)}{2e^x} = 3. \end{aligned}$$

4. Totea, että yhtälö $y \sin x = x^3 + \cos y$ määrittelee derivoituvan funktion $y = f(x)$ jossain pisteen $(0, \frac{\pi}{2})$ ympäristössä. Määritä jokin lauseke $\frac{dy}{dx}$ ja laske $f'(0)$.

Vastaus: Sijoittamalla $(x, y) = (0, \frac{\pi}{2})$ saadaan $0 = 0$, joten kyseinen piste kuuluu käyrälle. Merkitään $F(x, y) = y \sin x - x^3 - \cos y$ ja todetaan, että $\frac{\partial}{\partial y} F = \sin x + \sin y$, ja osittaisderivaatta ei saa arvoa nolla tarkastelupisteessä $(0, \frac{\pi}{2})$. Pyydetty toteamus perustuu implisiittifunktiolauseeseen.

Implisiittisellä derivoinnilla saadaan

$$y' \sin x + y \cos x = 3x^2 - \sin y \cdot y',$$

josta voidaan ratkaista

$$y' = \frac{3x^2 - y \cos x}{\sin x + \sin y}.$$

Kysytty arvo $f'(0)$ saadaan sijoittamalla $(x, y) = (0, \frac{\pi}{2})$:

$$f'(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - \frac{\pi}{2} \cdot \cos 0}{\sin 0 + \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}.$$

5. Totea, että parametriesitys $x(t) = \cos t + t \sin t$, $y(t) = \sin t - t \cos t$ määrittelee derivoituvan funktion $y = f(x)$ jossain pisteen $(1, 0)$ ympäristössä. Määritä jokin lauseke $\frac{dy}{dx}$ ja laske $f'(1)$.

Vastaus: Koska kyseessä on parametrimuoto, pitää selvittää millä t :n arvoilla piste $(1, 0)$ saavutetaan. Yhtälöparista

$$\begin{cases} \cos t + t \sin t &= 1 \\ \sin t - t \cos t &= 0 \end{cases}$$

saadaan ylempi yhtälö $\cos t$:llä ja alempi yhtälö $\sin t$:llä kertomalla pari

$$\begin{cases} \cos^2 t + t \sin t \cos t &= \cos t \\ \sin^2 t - t \sin t \cos t &= 0 \end{cases}$$

ja edelleen yhtälöt yhteen laskemalla $1 = \cos t$, minkä perusteella $t = n \cdot 2\pi$. Sijoittamalla tämä alkuperäisen yhtälöparin alempaan yhtälöön nähdään, että ainoa ratkaisu on $t = 0$. Koordinattifunktiot ovat derivoituvia tämän pisteen ympäristössä eikä $x'(t)$ vaihda merkkiään, jolloin funktion f derivoituvuus seuraa.

Lauseke derivaattafunktiolle voidaan määrittää seuraavasti:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t - \cos t + t \sin t}{-\sin t + \sin t + t \cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t.$$

Näin ollen kysytty derivaatan arvo voidaan laskea seuraavasti: $f'(1) = \tan 0 = 0$.