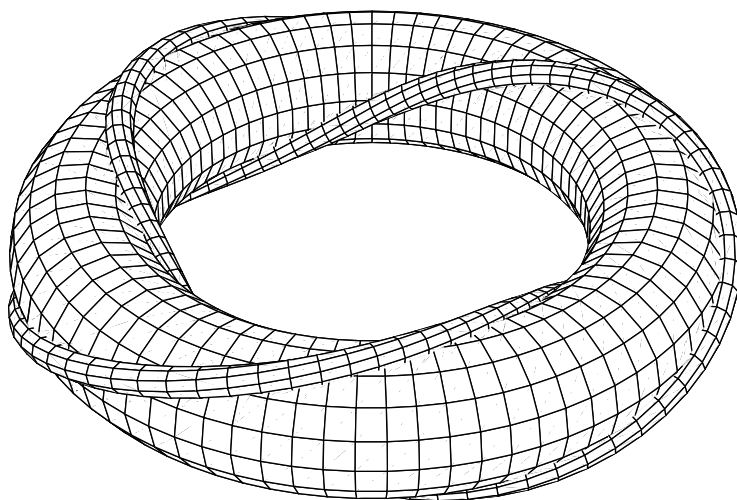


Analyysi II

Jyrki Lahtonen



Turun yliopisto, joulukuu 2012

Sisältö

1	Määäämätön integraali	3
1.1	Integroimissääntöjä	4
1.2	Osittaisintegrointi	5
1.3	Sijoitusmenetelmä	7
1.4	Rationaalifunktion integrointi	11
2	Määrätty integraali	19
2.1	Välin jako, ylä- ja alasummat, Riemann-integroituvuus	19
2.2	Integroituvuustesti ja määrätyn integraalin perusominaisuuksia	23
2.3	Jatkuvan funktion integroituvuus ja analyysin peruslause	28
2.4	Määrätyn integraalin laskemisesta	35
3	Määrätyn integraalin sovelluksia ja laajennuksia	43
3.1	Tasalueen pinta-ala	43
3.2	Tasokäyrän pituus	54
3.3	Pyöräyskappaleen tilavuus ja pinta-ala	56
3.4	Epäoleellisista integraaleista	61
3.4.1	Määrätty integraali yli rajoittamattoman välin	62
3.4.2	Rajoittamattoman funktion määrätty integraali	66
3.4.3	Usean epäoleellisuuden yhdistelmä, itseinen ja ehdollinen suppeneminen	68
4	Numeerisista sarjoista	73
4.1	Peruskäsitteet ja integraalitarkastin	73
4.2	Suppenemistarkastimia	79
4.3	Vuorottelevat sarjat ja termien järjestyksen vaihto	84
5	Potenssisarjoista	91
5.1	Funktiojonojen ja -sarjojen tasainen suppeneminen	91
5.2	EkspONENTTIFUNKTION SARJA, MÄÄRITELMÄ JA PERUSOMINAISUUKSIA	99

5.3	Potenssisarjojen perusominaisuuksia	103
5.4	Taylorin ja Maclaurinin sarjakehitelmistä ja niiden sovelluksista	108
6	Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa ja geometrisia sovelluksia	119
6.1	Avaruuden $\mathbf{R}^3$ vektoreista, suorista ja tasoista	119
6.2	Kahden muuttujan funktion differentioituvuus ja tangenttitaso	122
6.2.1	Kokonaisdifferentiaali ja funktion arvon muutoksen arviointi	127
6.3	Yhdistetyn funktion derivointi, kahden muuttujan funktion ketjusääntö	129
6.4	Implisiittisesti määritelty pinta avaruudessa $\mathbf{R}^3$	131
6.5	Käyristä avaruudessa $\mathbf{R}^3$	133
6.6	Parametrisoitu pinta avaruudessa $\mathbf{R}^3$	139
6.7	Kahden muuttujan funktion ääriarvoista	142
6.7.1	Lokaaleista ääriarvoista	142
6.7.2	Sidotuista ääriarvoista	146
7	Kahden muuttujan funktion integraaleista	152
7.1	Pintaintegraali ja sen laskeminen iteroituna integraalina	152
7.2	Sijoitus pintaintegraaliin	160
8	Differentiaaliyhtälöiden alkeita	168
8.1	Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöistä	170
8.1.1	Separoituva DY	170
8.1.2	Lineaarinen ensimmäisen kertaluvun DY	173
8.2	Toisen kertaluvun vakiokertoiminen lineaarinen DY	174
8.2.1	Toisen kertaluvun vakiokertoiminen homogeeninen DY	175
8.2.2	Yksityisratkaisun löytämisestä	178

Luku 1

Määräämätön integraali

Määritelmä 1.1. Olkoon $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ funktio, missä I on jokin reaalilukuväli. Jos on olemassa funktio F , joka toteuttaa ehdon

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I,$$

niin F :ää sanotaan f :n integraalifunktioksi eli määräämättömäksi integraaliksi välillä I ja merkitään

$$F(x) = \int f(x) dx \quad \text{tai} \quad F = \int f.$$

Funktiota f sanotaan integraalifunktion $\int f$ integrandiksi.

Joskus integraalifunktiosta käytetään myös nimityksiä *kantafunktio* tai *primitiivifunktio*. Jos F on f :n integraalifunktio, niin edellisen määritelmän mukaan F on derivoituva ja siis myös jatkuva ko. välillä.

Lause 1.2. Jos F on f :n jokin integraalifunktio välillä I , niin tarkalleen kaikki f :n integraalifunktiot tällä välillä ovat funktiot $F + C$, missä C (ns. integroimisvakio) on mikä reaaliluku tahansa.

Todistus. Ensiksikin kaikki muotoa $F + C$ olevat funktiot ovat vakion C arvosta riippumatta f :n integraalifunktioita, sillä $D(F(x) + C) = F'(x) + 0 = f(x)$. Toisaalta jos G on f :n integraalifunktio, niin $D(G(x) - F(x)) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, joten kurssista Analyysi I tutun *Integraalilaskennan peruslauseen* nojalla $G(x) - F(x)$ on vakio ko. välillä. Merkitsemällä tätä vakiota C :llä saadaan $G(x) = F(x) + C$, joten G on lauseessa esitettyä muotoa. $\square$

Integroimisvakion eri arvoja vastaavia integraalifunktioiden kuvaajia sanotaan *integraalikäyriksi*. Nämä muodostavat integraalikäyrien parven, jonka käyrät on saatu toisistaan y -akselin suuntaisilla siirroilla.

Derivaatan lineaarisuusominaisuudet ovat perusteena vastaaville integraalifunktion ominaisuuksille: Jos f :llä ja g :llä on integraalifunktio ja a on reaaliluku, niin

$$\int af = a \int f \quad \text{ja} \quad \int (f + g) = \int f + \int g.$$

Myöhemmin todistetaan (määrätyn integraalin yhteydessä), että jokaisella välillä I *jatkuvalla* funktiolla on tällä välillä integraalifunktio.

1.1 Integroimissääntöjä

Kuten määritelmästä ilmenee ovat derivoiminen ja integraalifunktion etsiminen (integroiminen) toisilleen käänteisiä toimituksia:

$$D\left(\int f(x) dx\right) = f(x) \quad \text{ja} \quad \int (Df(x)) dx = f(x) + C.$$

Täten siis aikaisemmin käsitellyt derivointikaavat ovat 'käännettävissä' integrointikaavoiksi:

$$\begin{array}{ll} \int 0 dx &= C, & \int 1 dx &= \int dx = x + C, \\ \int x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}), & \int \frac{dx}{x} &= \ln |x| + C, \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1), & \int e^x dx &= e^x + C, \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C, & \int \cos x dx &= \sin x + C, \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\cot x + C, & \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \tan x + C, \\ \int \sinh x dx &= \cosh x + C, & \int \cosh x dx &= \sinh x + C, \\ \int \frac{dx}{\sinh^2 x} &= -\coth x + C, & \int \frac{dx}{\cosh^2 x} &= \tanh x + C, \\ \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C, & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C, & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C, \\ &= \operatorname{arsinh} x + C, & &= \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{arcosh} |x| + C, \\ \int f^\alpha f' &= \frac{1}{\alpha+1} f^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}), & \int \frac{f'}{f} &= \ln |f| + C. \end{array}$$

Huomaa, että toisella ja viimeisellä rivillä oikeanpuoleinen kaava kattaa vasemmanpuoleisen kaavan poikkeustapauksen $\alpha = -1$.

Käyttämällä lineaarisuutta saadaan potenssifunktion integroimissäännön $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1), n \neq -1$ avulla integroitua muun muassa kaikki polynomifunktiot.

Esimerkki 1.3. Etsi määräämättömät integraalit

$$\int (x^3 + 3x^2 - 7) dx \quad \text{ja} \quad \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} \int (x^3 + 3x^2 - 7) dx &= \int x^3 + 3 \int x^2 - 7 \int 1 \\ &= \frac{x^4}{4} + 3 \frac{x^3}{3} - 7x + C \\ &= \frac{1}{4} x^4 + x^3 - 7x + C \end{aligned}$$

Huomaa, että lineaarisuutta käytettäessä on tarpeetonta ottaa mukaan useampia integroimisvakioita, koska ne voitaisiin kuitenkin lopussa yhdistää.

Jälkimmäinen esimerkki selviää samoin. Usein on helpompaa ‘tarkistaa’ integroimiskaava tekemällä derivointi. Tässä tapauksessa lähdemme liikkeelle derivaatasta $D(1/x) = -1/x^2$, josta näemmekin lineaarisuuden perusteella ($a = -1$), että $\int (1/x^2) dx = -1/x + C$. Siis

$$\int (x^2 + \frac{1}{x^2}) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + C.$$

Funktion potenssin derivointikaavaa $Df^n = nf'f^{n-1}$ vastaava integrointikaava tulee yllättävän usein käyttöön.

Esimerkki 1.4. Laske määräämätön integraali

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$$

Ratkaisu. Tässä pääsemme hyödyntämään sitä, että $D \cos x = -\sin x$, joten potenssin derivointikaavan nojalla

$$D(\cos x)^{-1} = -1(\cos x)^{-2}(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Tämän lisäksi on käytettävä trigonometristen funktioiden identiteettiä $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Yhdistämällä nämä havainnot lasku etenee seuraavasti:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin x \sin^2 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\sin x - \sin x \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x \right) dx \\ &= \frac{1}{\cos x} + \cos x + C. \end{aligned}$$

Monet integrointitehtävät voidaan palauttaa edellä esitettyihin tai niiden kaltaisiin ‘perusintegraaleihin’ *osittaisintegroinnilla* tai käyttämällä *sijoitusmenetelmää*. Katsomme näitä kahta menetelmää tarkemmin.

1.2 Osittaisintegrointi

Osittaisintegrointi perustuu ideaan kääntää kahden funktion tulon derivoimiskaava integroimiskaavaksi. Koska $(uv)' = u'v + uv'$, niin integroimalla saadaan $uv = \int u'v + \int uv'$ ja siis

$$\boxed{\int uv' = uv - \int u'v.}$$

Osittaisintegroinnissa kirjoitetaan integrandi f kahden tekijän tuloksi $f = uv'$, jossa u ‘yksinkertaistuu’ derivoitaessa ja v' on riittävän helppo integroida ($v = \int v'$). Tällöin jää vielä laskettavaksi integraali $\int u'v$, joka menetelmän toimiessa on muodoltaan yksinkertaisempi kuin alkuperäinen integraali.

Esimerkki 1.5. Lasketaan osittaisintegroimalla määräämätön integraali

$$\int x e^x dx.$$

Ratkaisu. Tässä on (osittaisintegroinnille tyypillisesti) tekijä x , joka ‘yksinkertaistuu derivoitaessa’, ja toinen tekijä e^x , joka ‘ei monimutkaistu integroitaessa’. Valitaan siis $u = x$ ja $v' = e^x$, jolloin $u' = 1$ ja $v = e^x$.

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= x e^x - \int 1 e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C = (x - 1)e^x + C.\end{aligned}$$

Tämänkin tuloksen voit tietenkin tarkistaa derivoimalla vastauksen tulon derivoimissääntöä käyttäen.

Esimerkki 1.6. Laske $\int \ln x dx$.

Ratkaisu. Logaritmifunktio yksinkertaistuisi derivoitaessa, joten valinta $u = \ln x$ olisi mukava tehdä. Tällöin on pakko valita $v' = 1$, joka ei kohtuuttomasti monimutkaistu integroitaessa! Siis $u' = 1/x$ ja $v = x$, jolloin osittaisintegrointi etenee seuraavasti:

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \left(\frac{1}{x}\right) dx \\ &= x \ln x - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x + C.\end{aligned}$$

Joskus ei yksi osittaisintegrointikierros riitä.

Esimerkki 1.7. Etsi määräämätön integraali

$$\int x^2 \sin x dx.$$

Ratkaisu. Valitaan $u = x^2$, $v' = \sin x$, jolloin $u' = 2x$ ja $v = -\cos x$. Osittaisintegrointi antaa tällöin

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x - \int 2x(-\cos x) dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx.$$

Tämä on osittaisintegroitava vielä toisen kerran. Valitaan tällä kertaa $u = x$ ja $v' = \cos x$, jolloin $u' = 1$ ja $v = \sin x$. Siis

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Sijoittamalla tämä ensimmäisen osittaisintegroinnin tulokseen saadaan lopputulokseksi

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Tilanteeseen, jossa osittaisintegrointia käytetään useita kertoja peräkkäin, saadaan edellisestä yleistys induktiolla:

$$\int uv^{(n)} = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v + (-1)^n \int u^{(n)}v,$$

jossa tapaus $n = 1$ antaa alkuperäisen osittaisintegroitikaavan. Annetun kaavan avulla voidaan tämä niin sanottu *yleistetty osittaisintegrointi* automatisoida.

Esimerkki 1.8. Laske Esimerkin 1.7 tulos käyttäen yleistettyä osittaisintegrointia.

Ratkaisu. Tässä $u = x^2$ on luontevaa valita tekijäksi, jota ryhdytään derivoimaan. Nyt $u' = 2x$, $u'' = 2$ ja $u^{(3)} = 0$. Yleistetyn osittaisintegroinnin kaavassa tarvittavat muut tekijät saadaan ($n = 3$) integroimalla yksinkertaisempia funktioita: $v^{(3)} = \sin x$, $v'' = -\cos x$, $v' = -\sin x$, $v = \cos x$. Sijoittamalla nämä summakaavaan tulee lopputulokseksi:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \, dx &= uv'' - u'v' + u''v - \int u^{(3)}v \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x - \int 0 \cdot \cos x \, dx \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C\end{aligned}$$

1.3 Sijoitusmenetelmä

Sijoitusmenetelmässä on ideana muuntaa ketjusääntö integroimissäännöksi. Funktioista F ja g muodostettu yhdistetty funktio $F \circ g$ derivoidaan kaavan

$$D(F(g(t))) = F'(g(t)) g'(t)$$

mukaisesti. Jos merkitään normaaliin tapaan $F' = f$ saadaan edellisestä integroitikaava:

$$\boxed{\int f(g(t))g'(t) \, dt = F(g(t)) + C.}$$

Tätä voidaan käyttää integraalin $\int f(x) \, dx$ laskemiseksi ‘suorittamalla sijoitus’ $x = g(t)$, jolloin $dx = g'(t) \, dt$ ja integrointi palautuu em. kaavaan. Tavoitteena on valita sellainen funktio g , että uusi integraali on helpommin laskettavissa kuin alkuperäinen. Lopuksi palataan takaisin alkuperäiseen muuttujaan x sijoituksella $t = g^{-1}(x)$. Jotta tarvittavat operaatiot olisi mahdollista suorittaa, tulee g :lle asettaa joitakin säännöllisyysvaatimuksia, esim. g aidosti monotoninen ja g' jatkuva. Käytännössä näihin ehtoihin ei yleensä kuitenkaan tarvitse kiinnittää huomiota, sillä lopputuloksen voi tarvittaessa tarkistaa derivoimalla.

Esimerkki 1.9. Oletetaan, että $a \neq 0$ on jokin vakio, ja että $dF/dx = f(x)$. Koska ketjusäännön nojalla $dF(ax)/dx = af(ax)$ saamme integroimissäännön

$$\int f(ax) \, dx = \frac{1}{a}F(ax) + C.$$

Erityisesti siis esimerkiksi

$$\begin{aligned}\int e^{ax} \, dx &= \frac{1}{a}e^{ax} + C, \\ \int \cos ax \, dx &= \frac{1}{a} \sin ax + C, \\ \int \sin ax \, dx &= -\frac{1}{a} \cos ax + C.\end{aligned}$$

Samaan lopputulokseen päästään sijoituksella $t = ax$, jolloin $x = t/a$, $dx = (1/a)dt$ jne.

Esimerkki 1.10. Edelleen $a \neq 0$ on jokin vakio. Johda kaava määräämättömälle integraalille

$$\int \cos^2 ax \, dx.$$

Ratkaisu. Käytetään avuksi kaksinkertaisen kulman kosinin kaavaa

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

Tästä voimme ratkaista $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$, joten

$$\begin{aligned} \int \cos^2 ax \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2ax) \, dx \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \frac{1}{2a} \sin 2ax + C \\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C = \frac{x}{2} + \frac{\sin ax \cos ax}{2a} + C. \end{aligned}$$

Esimerkki 1.11. Olkoon a jokin vakio. Käyttämällä sijoitusta $t = x + a$, jolloin siis $x = g(t) = t - a$ ja $g'(t) = 1$ eli $dx = dt$. Jos siis $dF/dx = f(x)$, niin

$$\int f(x + a) \, dx = F(x + a) + C.$$

Erityisesti siis esimerkiksi

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x + a} \, dx &= \ln |x + a| + C, \\ \int \sqrt{x + a} \, dx &= \frac{2}{3} (x + a)^{3/2} + C, \\ \int \cos(x + a) \, dx &= \sin(x + a) + C. \end{aligned}$$

Käytännössä sijoitus usein tehdään muodossa $t = h(x)$ siis ratkaisematta x :ää t :n funktiona. Tällöin $dt = h'(x) \, dx$. Jos integrandi on sopivaa muotoa, niin tekijä $h'(x)$ voi olla siellä valmiina.

Esimerkki 1.12. Etsi määräämätön integraali

$$\int x e^{-x^2} \, dx.$$

Ratkaisu. Tällä kertaa ei osittaisintegrointi auta. Huomaamme kuitenkin, että eksponenttifunktion sisäfunktion $-x^2$ derivaatta on mukana tekijänä integrandissa vakiokerrointa vaille. Aloitetaan derivoimalla

$$D e^{-x^2} = (D(-x^2)) e^{-x^2} = -2x e^{-x^2}.$$

Tästä jo saammekin lineaarisuuden perusteella

$$\int x e^{-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

Samaan lopputulokseen pääsemme käyttämällä sijoitusta $t = x^2$, josta derivoimalla saamme $dt = 2x dx$, eli $x dx = (1/2) dt$, ja

$$\int x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{-t} dt = -\frac{1}{2} e^{-t} + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

Esimerkki 1.13. Johdetaan kaava-arkin integrointikaava

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = 2 \arctan e^x + C.$$

Ratkaisu. Funktio $f(x) = 1/\cosh x$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{(e^x)^2 + 1}.$$

Tämän perusteella sijoitus $e^x = t$, $dt = e^x dx$ on luonnollinen, ja

$$\int f(x) dx = \int \frac{2dt}{t^2 + 1} = 2 \arctan t + C = 2 \arctan e^x + C.$$

Erityyppisten funktioiden integroimiseksi on olemassa omat standardisijoitukset, joita on myös taulukoitu. Seuraavassa esitetään eräitä tällaisia. Kun integrandissa esiintyy lausekkeitä $a^2 - x^2$, $a^2 + x^2$ tai $x^2 - a^2$, niin tapauskohtaiset standardisijoitukset ovat seuraavat:

$$\begin{aligned} a^2 - x^2 : \quad & \text{sijoitetaan } x = a \sin t, & \text{jolloin } \begin{cases} a^2 - x^2 = a^2 \cos^2 t, \\ dx = a \cos t dt, \end{cases} \\ a^2 + x^2 : \quad & \text{sijoitetaan } x = a \tan t, & \text{jolloin } \begin{cases} a^2 + x^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}, \\ dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}, \end{cases} \\ x^2 - a^2 : \quad & \text{sijoitetaan } x = \frac{a}{\sin t}, & \text{jolloin } \begin{cases} x^2 - a^2 = a^2 \cot^2 t, \\ dx = -\frac{a \cot t}{\sin^2 t} dt. \end{cases} \end{aligned}$$

Näissä yhteyksissä voi käyttää myös sopivia hyperbolisia ja muitakin sijoituksia.

Esimerkki 1.14. Määrää jokin funktion $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ kantafunktio.

Ratkaisu. Suositeltu sijoitus on $x = \sin t$, jolloin $1 - x^2 = \cos^2 t$ ja $dx = \cos t dt$. On suuri kiusaus kirjoittaa suoraan $f(x) = \cos t$, mutta merkki on tarkistettava! Funktio $f(x)$ on määritelty vain välillä $x \in I = [-1, 1]$, joten kantafunktionkaan ei tarvitse olla määritelty tämän välin ulkopuolella. Muuttujan x koko vaihteluväli I saadaan (vertaa arkussin kuvaajaan!) ‘peitettyä’ kun muuttuja t saa arvoja väliltä $[-\pi/2, \pi/2]$. Tällä välillä $\cos t \geq 0$, joten on luvallista kirjoittaa $f(x) = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$. Siis

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - x^2} dx &= \int \cos t \cos t dt && \text{sijoitettiin } x = \sin t \\ &= \int \cos^2 t dt && \text{käytetään Esimerkkiä 1.10} \\ &= \frac{t}{2} + \frac{\sin t \cos t}{2} + C \\ &= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x \sqrt{1 - x^2}}{2} + C. \end{aligned}$$

Huomaa, että määräämätöntä integraalia laskettaessa on lopuksi muistettava palata alkuperäiseen muuttujaan (tässä x). Tällä kertaa se oli helppoa, koska sijoituksesta $x = \sin t$ seurasi (ottaen huomioon yllä tehdyt merkkিতarkastelut), että $t = \arcsin x$ ja että $\cos t = \sqrt{1 - x^2}$.

Näitä välitarkasteluja ei yleensä tällä kurssilla edellytetä tehtäväksi, koska saatu integraalifunktio voidaan aina tarkistaa derivoimalla. On kuitenkin jatkoa (eli määrittyjen integraalien teoriaa) varten hyvä huomata, että integrandin määrittelyjoukko vastaa sijoitusfunktion arvojoukkoa kuten tässä.

Esimerkki 1.15. Laske integraali

$$\int \sqrt{x^2 - 4} \, dx.$$

Ratkaisu. Edellisessä esimerkissä hyödynnettiin identiteettiä $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Nyt hyödynnämme vastaavasti identiteettiä $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Huomaamme, että integrandi on määritelty vain, kun $|x| \geq 2$. Voimme siis sijoittaa $x = 2 \cosh t$, jolloin muuttujan t käydessä läpi välin $[0, \infty)$ saa x kaikki arvot väliltä $[2, \infty)$ (vastaavasti voimme sijoittaa $x = -2 \cosh t$ huolehtimaan välistä $x \in (-\infty, -2)$). Nyt

$$x^2 - 4 = 4(\cosh^2 t - 1) = 4 \sinh^2 t,$$

joten oletuksemme $t \geq 0$ nojalla $\sqrt{x^2 - 4} = 2 \sinh t$. Edelleen $dx = 2 \sinh t \, dt$, joten integraaliksi saadaan

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 4} \, dx &= \int 4 \sinh^2 t \, dt && \text{kaava } 2 \sinh^2 x + 1 = \cosh 2x \\ &= \int 2(\cosh 2t - 1) \, dt \\ &= \sinh 2t - 2t + C \\ &= 2 \sinh t \cosh t - 2t + C && t = \operatorname{arcosh}(x/2), \sinh t = (1/2)\sqrt{x^2 - 4} \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 4} - 2 \operatorname{arcosh}(x/2) + C \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 4} - 2 \ln \left(\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \right) + C \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 4} - 2 \left(\ln(x + \sqrt{x^2 - 4}) - \ln 2 \right) + C \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 4} - 2 \ln(x + \sqrt{x^2 - 4}) + C', \end{aligned}$$

missä termi $2 \ln 2$ on otettu osaksi integroimisvakiota.

Esimerkki 1.16. Laske integraali

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

Ratkaisu. Tässä nimittäjä voidaan kirjoittaa muodossa $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$. Jos nimittäjänä olisi $t^2 + 1$ pääsisimme käyttämään arkustangentin derivointikaavaa. Tämä onkin riittävä vihje sopivan sijoituksen

$x + 1 = 2t$ keksimiseksi. Nyt $dx = 2 dt$, joten

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} &\stackrel{\text{sij. } x+1=2t}{=} \int \frac{2 dt}{4t^2 + 4} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \arctan t + C \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

Joskus useampi sijoitus johtaa maaliin.

Esimerkki 1.17. Etsi välillä $x \in (1, \infty)$ määräämätön integraali

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Ratkaisu. Tekijän $\sqrt{x^2-1}$ läsnäolo ehdottaa sijoitusta $x = \cosh t$, koska tällöin (olettaen $t \geq 0$) $\sqrt{x^2-1} = \sinh t$, ja $dx = \sinh t dt$. Tällä kertaa tämä johtaa seuraavaan laskuun

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sinh t dt}{\cosh t \sinh t},$$

mikä Esimerkin 1.13 nojalla on $= 2 \arctan e^t + C$. Yhtälöstä

$$e^t + (e^t)^{-1} = 2x$$

ratkeaa (vrt. hyperbelifunktioiden käänteisfunktioiden lausekkeiden johto kurssilla Analyysi I) $e^t = x + \sqrt{x^2-1}$. Siis funktio

$$F_1(x) = 2 \arctan \left(x + \sqrt{x^2-1} \right)$$

on eräs kantafunktio hyperbelikosinin arvojoukossa $x \in [1, \infty)$.

Vaihtoehtoinen sijoitus on $x = 1/u$, $u \in (0, 1)$. Tällöin $dx = -du/u^2$, ja $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{1-u^2}/u$. Siis

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-du}{u^2(1/u)\sqrt{1-u^2}/u} = - \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin u + C.$$

Tästä saadaan toinen kantafunktio

$$F_2(x) = -\arcsin \frac{1}{x}.$$

Jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että kaikilla $x \in (1, \infty)$ toteutuu yhtälö $F_1(x) = F_2(x) + \pi$, joten tämä ei ole ristiriidassa integraalilaskennan peruslauseen kanssa.

1.4 Rationaalifunktion integrointi

Tarkastellaan seuraavaksi rationaalifunktion

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (\text{P ja Q polynomeja})$$

integroimista. Oletetaan, että f on todellinen murtofunktio, ts. Q :n aste on vähintään 1, sillä muuten f on polynomi ja integrointi helposti suoritettavissa. Seuraavassa käsitellään murtofunktion integrointia neljässä vaiheessa.

I. Jos osoittaja P on vähintään yhtä korkeaa astetta oleva polynomi kuin nimittäjä Q , suoritetaan jakolasku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Tässä A ja R ovat polynomeja: A on ‘vaillinainen’ osamäärä ja R on jakojäännös, joten sen aste on Q :n astetta alhaisempi. Polynomin A integrointi on selvä ja siis jatkossa tarkastellaan murtofunktion $R(x)/Q(x)$ integrointia.

II. Jaetaan seuraavaksi polynomi Q reaalisiin alkutekijöihin. Jokaista yhtälön $Q(x) = 0$ reaalijuurta $x = a$ vastaa ensimmäisen asteen tekijä $x - a$. Jos tällä yhtälöllä on imaginaarinen juuri $x = \alpha + \beta i$, voidaan todistaa, että myös liittoluku $\bar{x} = \alpha - \beta i$ on ko. yhtälön juurena. Näitä juuria yhdessä vastaa toisen asteen reaalinen tekijä $x^2 + px + q$, missä $p^2 - 4q < 0$. Useammankertaista juurta vastaa useammankertainen tekijä. Täten Q :n alkutekijäesitys reaalikertoimisten polynomien renkaassa (=käsite, joka selitetään algebran peruskurssilla II — tällä kurssilla selviää ilmankin) on muotoa

$$Q(x) = d(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s},$$

missä jokainen $k_i, m_i \in \mathbf{Z}_+$ ja $p_i^2 - 4q_i < 0$.

III. Suoritetaan nyt funktion $R(x)/Q(x)$ jako *osamurtoihin*. Voidaan todistaa, että $R(x)/Q(x)$ jakautuu summaksi, jossa kukin Q :n tekijä aiheuttaa summaan tietynlaisia termejä. Näiden muoto riippuu tekijän luonteesta.

Jos muotoa $(x - a_i)^{k_i}$ oleva polynomi jakaa nimittäjän $Q(x)$, niin se aiheuttaa osamurtokehitykseen termit

$$\frac{A_{1i}}{x - a_i} + \frac{A_{2i}}{(x - a_i)^2} + \cdots + \frac{A_{k_i i}}{(x - a_i)^{k_i}},$$

missä luvut $A_{ji}, 1 \leq j \leq k_i$ ovat joitakin vakioita. Huomaa, että näitä tuntemattomia vakioita on k_i kappaletta. Ne kaikki tarvitaan, koska jaettaessa polynomilla $Q(x) = (x - a_i)^{k_i}$ voi jakojäännöksenä $R(x)$ jäädä mikä tahansa enintään astetta $k_i - 1$ oleva polynomi. Siis polynomilla $R(x)$ on siltäkin k_i tuntematonta kerrointa, jolloin meillä on ‘toiveita’ siitä, että vapausasteita on riittävästi.

Muotoa $(x^2 + p_ix + q_i)^{m_i}$ oleva tekijä tuottaa enemmän mutkikkautta, sillä muotoa

$$\frac{B_{ji}}{(x^2 + p_ix + q_i)^j}, \quad 1 \leq j \leq m_i,$$

olevien termien lisäksi tarvitaan termit

$$\frac{C_{ji}x}{(x^2 + p_ix + q_i)^j}, \quad 1 \leq j \leq m_i.$$

Nämä jo pelkästään sen takia, että jaettaessa polynomilla $(x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}$, joka on astetta $2m_i$, on jakojäännöksessä $2m_i$ vapaasti valittavaa kerrointa, joten meidänkin tulee tarjota tarpeellinen määrä tuntemattomia. Sivuutamme sen tosiasian perustelemisen, että juuri nämä termit riittävät. Todistus voidaan tehdä kätevimmin polynomien algebran avulla, tai vaihtoehtoisesti kompleksianalyysin menetelmin.

Osamurtokehityksessä esiintyvät kertoimet (A_{ji}, B_{ji}, C_{ji}) voidaan määrittää eri keinoilla. Melkein aina aloitetaan poistamalla etsitystä identiteetistä nimittäjissä esiintyvä polynomi kertomalla se puolittain polynomilla $Q(x)$. Sen jälkeen tiedot eroavat jonkin verran. ‘Määräämättömien kertoimien menetelmässä’ vertaillaan yhtälön eri puolilla olevien samankorkuisten potenssien kertoimia, jolloin päädytään yhtälöryhmään, josta tuntemattomat kertoimet voidaan ratkaista. ‘Sijoitusmenetelmässä’ sijoitetaan erilaisia sopivia arvoja muuttujan x paikalle, jolloin taas saadaan yhtälöryhmä tuntemattomien kertoimien ratkaisemiseksi. Joskus etsittävien kertoimien arvot ‘nähdään suoraan’ tai voidaan ‘helposti arvata’.

IV. Kun osamurtokehitys on saatu, siirrytään integroimaan ko. kehityksen termit. Q :n ensiasteisista tekijöistä aiheutuneet termit integroituvat helposti:

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln |x-a| + \text{vakio} ,$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^k} dx = -\frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + \text{vakio} , \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Tutkitaan seuraavaa muotoa olevaa integraalia

$$I = \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} dx ,$$

missä $p^2 - 4q = -4a^2 < 0$. Tekemällä siihen sijoitus $t = x + (p/2)$ se muuntuu tyyppejä

$$I_1 = \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^k} dt \quad \text{ja} \quad I_2 = \int \frac{2t}{(t^2 + a^2)^k} dx$$

olevien integraalien lineaarikombinaatioksi.

Integraaliin I_1 sovelletaan palautuskaavaa (todistus harjoitustehtävänä)

$$\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2(k-1)a^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}} ,$$

jolloin lopulta päädytään integraaliin

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + \text{vakio} .$$

Integraalit I_2 ovat helpompia, koska siellä osoittajana esiintyy lausekkeen $t^2 + a^2$ derivaatta. Niiden kantafunktiot ovat selvästi

$$\int \frac{2t dt}{t^2 + a^2} = \ln(t^2 + a^2) + C \quad \text{kun } k = 1, \text{ ja}$$

$$\int \frac{2t dt}{(t^2 + a^2)^k} = -\frac{1}{k-1} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{k-1}} + C \quad \text{kun } k > 1.$$

Eri tyyppien tilanteita on syytä valaista muutamalla esimerkillä.

Esimerkki 1.18. Lasketaan

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx.$$

Ratkaisu. Tällä kertaa nimittäjä jakautuu ensimmäisen asteen tekijöihin $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, joten osamurtokehitelmä on muotoa

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1}.$$

Tämän yhtälön tulee olla voimassa kaikille määrittelyjoukon $S = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ alkioilla x . Kertomalla edellinen yhtälö puolittain polynomilla $x^2 - 1$ saadaan polynomi yhtälö

$$1 = A_1(x + 1) + A_2(x - 1) = (A_1 + A_2)x + (A_1 - A_2).$$

Jotta tällä voisi olla ratkaisuna kaikki joukon S alkiot on x :n potenssien vastinkertoimien yhdyttävä (esitämme tälle päätelmälle myöhemmin toisen perustelun potenssisarjojen yhteydessä). Tällöin tuntemattomien A_1 ja A_2 on oltava yhtälöparin

$$\begin{cases} A_1 + A_2 &= 0, \\ A_1 - A_2 &= 1 \end{cases}$$

ratkaisu. Esimerkiksi eliminoimalla muuttujat vuorotellen näemme, että tämän yhtälöparin ainoa ratkaisu on $A_1 = 1/2$, $A_2 = -1/2$. Siis

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) dx.$$

Tästä saamme, että etsitty primitiivifunktio $F(x)$ on

$$F(x) = \frac{1}{2} (\ln |x - 1| - \ln |x + 1|) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right|.$$

Esimerkki 1.19. Lasketaan määräämätön integraali

$$\int \frac{3x - 5}{x(x - 1)(x - 2)} dx.$$

Ratkaisu. Tällä kertaa osamurtokehitelmä on muotoa

$$\frac{3x - 5}{x(x - 1)(x - 2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x - 1} + \frac{A_3}{x - 2}.$$

Kertomalla tämä yhtälö puolittain polynomilla $x(x - 1)(x - 2)$ saadaan yhtälö

$$3x - 5 = A_1(x - 1)(x - 2) + A_2x(x - 2) + A_3x(x - 1), \quad (*)$$

jonka on oltava voimassa kaikille joukon $S = \mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ alkioille x . Koska tässä molemmat puolet ovat muuttujan x jatkuvia funktioita, voimme päätellä (muodostamalla puolittain raja-arvot, kun x lähestyy jotakin luvuista 0, 1, 2, että tämä viimeinen yhtälö on voimassa myös silloin kun x on jokin näistä määrittelyjoukon ulkopuolisista luvuista! Sijoittamalla $x = 0$ yhtälöön $(*)$ saamme yhtälön $-5 = 2A_1$, mistä voimme

heti ratkaista $A_1 = -5/2$. Sijoittamalla $x = 1$ saadaan $3 - 5 = -2 = -A_2$, eli $A_2 = 2$. Lopulta sijoittamalla $x = 2$ saadaan $3 \cdot 2 - 5 = A_3 \cdot 2 \cdot 1$, mistä saamme $A_3 = 1/2$. Määäämättömäksi integraaliksi tulee siten

$$\int \frac{3x - 5}{x(x-1)(x-2)} dx = -\frac{5}{2} \ln |x| + 2 \ln |x-1| + \frac{1}{2} \ln |x-2| + C.$$

Esimerkki 1.20. Määää funktion $f(x) = (x^2 + 2)/(x^3 - 2x^2 + x)$ jokin kantafunktio.

Ratkaisu. Nyt nimittäjällä on useampikertainen nollakohta, koska se jakaantuu tekijöihin $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$. On siis etsittävä muotoa

$$f(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$$

olevaa osamurtokehitemää. Kertomalla tämä puolittain polynomilla $x(x-1)^2$ saadaan identiteetti

$$x^2 + 2 = A_1(x-1)^2 + A_2x(x-1) + A_3x.$$

Sijoittamalla tähän $x = 0$ saadaan $2 = A_1$ ja sijoittamalla $x = 1$ saadaan $3 = A_3$. Toisen asteen termin kerroin on vasemmalla puolella $= 1$ ja oikealla puolella $A_1 + A_2$. Yhtälöstä $A_1 + A_2 = 1$ ratkeaa lopuksi $A_2 = -1$. Siis

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2},$$

mistä saadaan

$$\int f(x) dx = 2 \ln |x| - \ln |x-1| - \frac{3}{x-1}.$$

Esimerkki 1.21. Integroi funktio $f(x) = (2x + 7)/(x^2 + 2x + 4)$.

Ratkaisu. Nyt ei nimittäjällä ole lainkaan reaalisia nollakohtia. Sijoitetaan $t = x + 1$, jolloin $x = t - 1$ ja

$$f(x) = \frac{2t + 5}{t^2 + 3} = \frac{2t}{t^2 + 3} + \frac{5}{t^2 + 3}.$$

Tästä nähdäänkin heti esitettyjen kaavojen avulla, että

$$\int f(x) dx = \ln(t^2 + 3) + \frac{5}{\sqrt{3}} \arctan(t/\sqrt{3}) + C,$$

joten vastaukseksi saadaan

$$\ln(x^2 + 2x + 4) + \frac{5}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Esimerkki 1.22. Etsitään primitiivi funktiolle

$$f(x) = \frac{x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 1}{x(1 + 2x^2 + x^4)}.$$

Ratkaisu. Nyt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 1}{x(1 + 2x^2 + x^4)} = \frac{(x^5 + x^4) + (x^4 + 2x^2 + 1)}{x(1 + 2x^2 + x^4)} \\ &= \frac{x^4 + x^3}{1 + 2x^2 + x^4} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{(x^4 + 2x^2 + 1) + (x^3 - 2x^2 - 1)}{x^4 + 2x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{x} + 1 + \frac{(x^3 - 2x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Tässä kaksi ensimmäistä termiä eivät aiheuta ongelmia. Jaetaan viimeinen termi osamurtoihin. Koska jaoton polynomi $x^2 + 1$ on kaksinkertainen tekijä, osamurtokehitelemään tulee termit

$$\frac{(x^3 - 2x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{B_1 + C_1x}{x^2 + 1} + \frac{B_2 + C_2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Kertomalla tämä puolittain polynomilla $(x^2 + 1)^2$ saadaan identiteetti

$$x^3 - 2x^2 - 1 = (B_1 + B_2) + (C_1 + C_2)x + B_1x^2 + C_1x^3,$$

mistä ratkeaa vastinkertoimia vertailemalla $C_1 = 1$, $B_1 = -2$, $C_2 = -1$ ja $B_2 = 1$. Tässä

$$\int \frac{-2 + x}{1 + x^2} dx = -2 \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$$

ja

$$\int \frac{-x}{(1 + x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{2x}{(1 + x^2)^2} dx = \frac{1}{2} (1 + x^2)^{-1}.$$

Vielä selvittämättömän B_2 -termin integroimista varten tehdään havainto

$$D \frac{x}{1 + x^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 - (1 + x^2)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2}{(1 + x^2)^2} - \frac{1}{1 + x^2},$$

mikä kääntyy integroimiskaavaksi

$$\int \frac{2}{(1 + x^2)^2} dx = \frac{x}{1 + x^2} + \int \frac{1}{1 + x^2} dx.$$

Tästä saadaan lopulta

$$\int \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1 + x^2} + \arctan x \right) + C.$$

Yhdistämällä kaikki saadaan lopullinen vastaus

$$\int f(x) dx = x + \ln x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - \frac{3}{2} \arctan x + \frac{x + 1}{2(1 + x^2)} + C.$$

Esitellään vielä pari integrointitilannetta, jotka voidaan palauttaa rationaalifunktion integrointiin.

Jos integroitavana on $\sin x$:n ja $\cos x$:n rationaalifunktio, niin sijoituksella $t = \tan(x/2)$ päädytään rationaalifunktion integrointiin, sillä tällöin (vrt. kaava-arkki ja trigonometriset identiteetit kurssilta Analyysi I)

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{ja} \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dt.$$

Usein em. sijoitus johtaa hankaliin laskuihin, joten kannattaa yleensä tutkia myös muita mahdollisuuksia, ts. sopivien trigonometristen kaavojen avulla yksinkertaistaa integrandia ja/tai käyttää muita sijoituksia.

Esimerkki 1.23. Haetaan kantafunktio integrandille $f(x) = 1/(\cos x + \sin x)$.

Ratkaisu. Kokeillaan suositeltua sijoitusta $t = \tan(x/2)$. Tällöin

$$\cos x + \sin x = \frac{1 + 2t - t^2}{1 + t^2},$$

joten ottaen huomioon $dx = 2dt/(1 + t^2)$ saadaan tällä sijoituksella

$$\int \frac{dx}{\cos x + \sin x} = - \int \frac{2 dt}{t^2 - 2t - 1}.$$

Tässä nimittäjä jakautuu tekijöihin $t^2 - 2t - 1 = (t - 1)^2 - 2 = (t - 1 - \sqrt{2})(t - 1 + \sqrt{2})$. Vakiomenetelmällä saamme osamurtokehityksen

$$\frac{-2}{t^2 - 2t - 1} = \frac{-1/\sqrt{2}}{t - 1 - \sqrt{2}} + \frac{1/\sqrt{2}}{t - 1 + \sqrt{2}}.$$

Tästä saadaankin jo määräämätön integraali t :n funktiona

$$- \int \frac{2 dt}{t^2 - 2t - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - 1 + \sqrt{2}}{t - 1 - \sqrt{2}} \right|.$$

Tästä saamme lopulta etsityksi kantafunktioksi

$$\int \frac{dx}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan(x/2) - 1 + \sqrt{2}}{\tan(x/2) - 1 - \sqrt{2}} \right| + C.$$

Muotoa

$$\int Q \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$$

oleva integraali, missä Q on rationaalifunktio, palautuu rationaalifunktion integroinniksi sijoituksella

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

Esimerkki 1.24. Laske määräämätön integraali

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}} dx.$$

Ratkaisu. Suositeltu sijoitus on $x = t^3$, jolloin $dx = 3t^2 dt$. Saadaan

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{3t^2}{1 + t} dt.$$

Tässä $3t^2 = 3(t^2 - 1) + 3 = 3(t - 1)(t + 1) + 3$, joten integraaliksi tulee

$$\int \left(3t - 3 + \frac{3}{t+1} \right) dt = \frac{3}{2}t^2 - 3t + 3 \ln(t+1) = \frac{3}{2}x^{2/3} - 3x^{1/3} + 3 \ln(x^{1/3} + 1) + C.$$

Huomautus 1.25. Tarkkaavainen lukija on ehkä huomannut, että emme ole esittäneet tyhjentävää metodia hakea kantafunktio kaikille alkeisfunktioille. Tämä johtuu siitä, ettei tällaista menetelmää (päinvastoin kuin derivoitaessa) ole olemassa. Tiedetään useita alkeisfunktioita, joiden määräämätön integraali ei ole alkeisfunktio. Esimerkkejä tällaisista ovat

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{e^x - 1}{x} dx.$$

Tällaisia integraaleja voidaan käsitellä muunlaisin menetelmin. Myöhemmin tällä kurssilla käsittelemme lyhyesti potenssisarjoihin perustuvaa menetelmää.

Luku 2

Määrätty integraali

Seuraavaksi siirrymme tutkimaan *määrättyä integraalia* ja siihen liittyviä käsitteitä. Oletamme tässä luvussa, että tutkittava reaalifunktio f on *määritelty ja rajoitettu* tarkasteluvälillä $I = [a, b]$, $a < b$. Siinä tapauksessa, missä funktion arvot ovat positiivisia, määrättyllä integraalilla on geometrisena mielikuvana funktion f kuvaajan, x -akselin, ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaaman alueen pinta-ala. Voidaksemme todistaa useat luonnollisen tuntuiset laskusäännöt meidän on kuitenkin oltava hyvin huolellisia. Erityisesti silloin, kun f ei ole jatkuva, kyseinen alue voi olla hyvin repalainen, ja osoittautuukin, ettei kaikille tällaisille alueille pinta-alaa voida lainkaan määritellä! Tällä kurssilla emme perehdy pinta-alan määriteltävyyden ongelmaan erityisen tarkasti, sillä se on syventävien kurssien *mitta- ja integrointiteoria* ja/tai *modernin analyysin perusteet* tasoista materiaalia. Otamme kuitenkin lähtökohdaksi approksimoida tällaista aluetta sisä- ja ulkopuolelta sellaisilla alueilla, joiden pinta-alan osaamme määritellä ongelmitta, nimittäin äärellisen monen suorakaiteen unioneilla. Ideana on päästä aikaisemmin kohtaamistamme raja-arvoprosesseista tutun sandwich-lauseen tapaiseen tilanteeseen, jossa tutkittavan alueen sisälle piirrettyjen äärellisen monen suorakaiteen yhteenlaskettu pinta-ala saadaan alle ε :n päähän vastaavasta sellaisten suorakaiteiden unionin pinta-alasta, joka peittää koko alueen. Jos tässä onnistutaan, oli $\varepsilon > 0$ kuinka pieni tahansa, niin pääsemme eteenpäin.

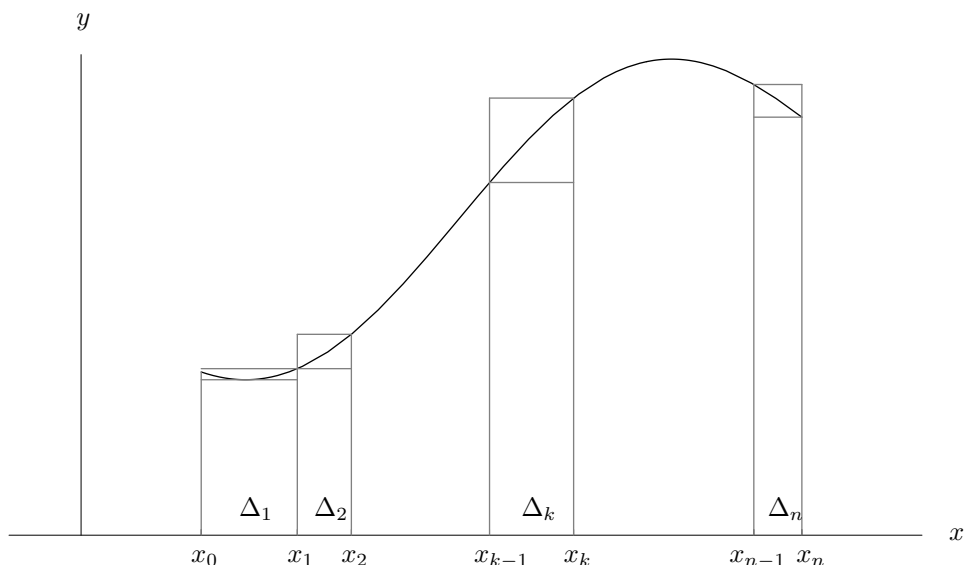
2.1 Välin jako, ylä- ja alasummat, Riemann-integroituvuus

Määritelmä 2.1. Kutsumme äärellistä lukujoukkoa

$$D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$$

välin $[a, b]$ *jaoksi*, jos $a = x_0$, $b = x_n$ ja kaikilla indeksin $k = 1, 2, 3, \dots, n$ arvoilla on voimassa $x_{k-1} < x_k$. Lukuja x_k kutsutaan jaon D jakopisteiksi, ja käytämme jaon D osavälistä numero k merkintää $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ sekä sen pituudesta merkintää $\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$.

Määritelmä 2.2. Olkoon $I = [a, b]$ väli ja $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ kyseisen välin jokin jako. Oletetaan, että funktio f on määritelty ja rajoitettu välillä I . Tällöin f on rajoitettu myös kullakin osavälillä Δ_k ,



Kuva 2.1: Erään jaon ylä- ja alasummaa vastaavat pylväät osaväleillä 1, 2, k ja n

ja voidaan määritellä

$$M_k = \sup\{f(x) \mid x \in \Delta_k\} \quad \text{ja} \quad m_k = \inf\{f(x) \mid x \in \Delta_k\}.$$

Näiden avulla määritellään funktion f jakoon D liittyvät (Darboux'n) yläsumma

$$S_D = \sum_{k=1}^n M_k \Delta_k x,$$

ja alasumma

$$s_D = \sum_{k=1}^n m_k \Delta_k x.$$

Jos sekaannuksen vaara on olemassa, käytetään näistä merkintöjä $S_D(f)$ ja $s_D(f)$ osoittamaan, minkä funktion ylä- tai alasummasta on kysymys.

Yläsummia ja alasummaa havainnollistetaan suorakaiteiden unionina. Kutakin osaväliä vastaa pylvään muotoinen suorakaide, jonka kantana on osaväli Δ_k ja korkeutena yläsumman tapauksessa M_k ja alasumman tapauksessa m_k . Tällöin funktion kuvaajan ja x -akselin välinen alue (olettaen, että $f(x) > 0$ välillä I) jää kokonaan yläpylväiden sisään, ja toisaalta sisältää kokonaan alapylväät. Yläpylväiden yhteenlaskettu pinta-ala on tällöin $S_D(f)$ ja alapylväiden vastaavasti $s_D(f)$. Kuvassa 2.1 on tyypillinen näkymä jatkuvan funktion erääseen jakoon liittyvästä ylä- ja alapylväiköstä.

Esimerkki 2.3. Lasketaan välillä $I = [a, b] = [0, 1]$ rajoitettuun funktioon $f(x) = x^2$ liittyvät ylä- ja alasumat, kun $D = D_n$ on ns. tasavälinen jako, jolloin jokainen osaväleistä on pituudeltaan $(b - a)/n$, ja siten jakopisteet $x_k, k = 0, 1, \dots, n$, saadaan kaavasta $x_k = a + k(b - a)/n = k/n$.

Ratkaisu. Kyseinen funktio on aidosti kasvava välillä I , joten jokaisella osavälillä $\Delta_k = [(k-1)/n, k/n]$ infimum saavutetaan välin alkupisteessä $(k-1)/n$ ja supremum päätepisteessä k/n . Siis $m_k = f((k-1)/n) = (k-1)^2/n^2$ ja $M_k = f(k/n) = k^2/n^2$. Tasavälisellä jaolla on jokaisen pylvään leveys $\Delta_k x = 1/n$. Kurssilta Analyysi I tuttuja peräkkäisten kokonaislukujen neliöiden summan kaavaa käyttämällä saadaan alasummalle lauseke

$$\begin{aligned} s_{D_n} &= \sum_{k=1}^n f((k-1)/n) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^2}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{t=0}^{n-1} t^2 \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}. \end{aligned}$$

Vastaavasti yläsummalle saadaan lauseke

$$\begin{aligned} S_{D_n} &= \sum_{k=1}^n f(k/n) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}. \end{aligned}$$

Huomataan, että sekä yläsummat että alasummat lähestyvät raja-arvoon lukua $1/3$, kun $n \rightarrow \infty$.

Sanotaan, että jako D' on jaon D *tihennys*, jos $D \subset D'$. Tuntuu ilmeiseltä, että jaon tihentäminen tuo ylä- ja alasummia lähemmäksi toisiaan. Seuraava tulos sanoo juuri tämän.

Lemma 2.4. *Jos D' on jaon D tihennys, niin*

$$s_D \leq s_{D'} \leq S_{D'} \leq S_D.$$

Todistus. Tässä keskimäinen kolmesta epäyhtälöstä on ilmeinen supremumin ja infimumin määrittelyn perusteella. Todistetaan vain yläsummia koskeva väite (alasummia koskeva väite nähdään analogisesti). Riittää tarkastella tapausta, missä jaossa D' on vain yksi jakopiste enemmän, koska soveltamalla tätä erikoistapausta tarvittavan monta kertaa saadaan yleinen tulos perusteltua. Oletetaan siis, että $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, ja että $D' = D \cup \{x'\}$. Olkoon k se indeksi, jolle $x' \in \Delta_k$, eli $x_{k-1} < x' < x_k$. Siis osaväli Δ_k on se, joka jakautuu kahteen osaan jaossa D' . Merkitään

$$M'_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x']\}, \quad \text{ja} \quad M''_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x', x_k]\}.$$

Selvästi $M_k \geq M'_k$ ja $M_k \geq M''_k$, koska pilkulliset suureet ovat joukon $f(\Delta_k)$ osajoukkojen supremumeja. Siis summassa $S_{D'}$ näiden kahden välin kontribuutio on

$$M'_k(x' - x_{k-1}) + M''_k(x_k - x') \leq M_k(x' - x_{k-1}) + M_k(x_k - x') = M_k(x_k - x_{k-1}) = M_k \Delta_k x.$$

Koska muilta osin yläsummat $S_{D'}$ ja S_D ovat samat, on väite todistettu. $\square$

Lemma 2.5. Olkoot D_1 ja D_2 mielivaltaisia välin $[a, b]$ jakoja. Tällöin

$$s_{D_1} \leq s_{D_2},$$

eli mikä tahansa yläsumma on vähintään yhtä suuri kuin mikä tahansa alasumma.

Todistus. Muodostetaan jakojen D_1 ja D_2 yhteinen tihennys D ottamalla mukaan molempien kaikki jakopisteet: $D = D_1 \cup D_2$. Lemman 2.4 nojalla tällöin

$$s_{D_1} \leq s_D \leq S_D \leq S_{D_2}.$$

□

Lemman 2.5 nojalla kaikkien alasummien joukko on ylhäältä rajoitettu ja vastaavasti kaikkien yläsummien joukko on alhaalta rajoitettu. Koska nämä joukot ovat epätyhjiä, voidaan reaalilukujen täydellisyysaksiooman nojalla määritellä funktion f (Darboux'n) ylä- ja alaintegraalit välillä $I = [a, b]$ kaavoilla

$$\begin{aligned} \text{alaintegraali välillä } I &= \underline{\int_a^b} f = \sup\{s_D \mid D \text{ jokin jako}\}, \\ \text{yläintegraali välillä } I &= \overline{\int_a^b} f = \inf\{S_D \mid D \text{ jokin jako}\}. \end{aligned}$$

Lemman 2.5 seurauksena näemme heti, että yläintegraali on aina vähintään yhtä suuri kuin alaintegraali.

Määritelmä 2.6. Välillä $[a, b]$, $a < b$, rajoitettua funktiota f sanotaan (Riemann-)integroituvaksi tällä välillä, jos

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Tällöin ala- ja yläintegraalien yhteistä arvoa sanotaan funktion f *Riemann-integraaliksi* tai lyhyesti *integraaliksi* välillä $[a, b]$, merkitään

$$\int_a^b f \quad \text{tai} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Lukua a kutsutaan integraalin *alarajaksi* ja lukua b *ylärajaksi*. Käytämme merkintää $R([a, b])$ kaikkien välillä $[a, b]$ integroituvien funktioiden joukosta, eli merkintä $f \in R([a, b])$ tarkoittaa sekin, että funktio f on integroituva välillä $[a, b]$.

Esimerkki 2.7. Osoitetaan, että vakiofunktio $f(x) = c$ on Riemann-integroituva kaikilla väleillä $[a, b]$, $a < b$, ja että

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

Todistus. Käytetään triviaalia jakoa $D = \{x_0 = a, x_1 = b\}$. Välillä $\Delta_1 = [a, b]$ on funktion $\sup f = \inf f = c$. Näin ollen $s_D = S_D = c(b - a)$. Koska S_D on yläraja alaintegraalille, ja alaintegraali on vastaavasti yläraja kaikille alasummille, on oltava $c(b - a) = S_D \geq \underline{\int} \geq s_D = c(b - a)$, mikä on mahdollista vain, jos $\underline{\int} = c(b - a)$. Toisaalta s_D on alaraja yläintegraalille, ja yläintegraali on vastaavasti alaraja kaikille yläsummille, on myös

oltava $c(b-a) = s_D \leq \overline{f} \leq S_D = c(b-a)$, mikä on mahdollista vain, jos $\overline{f} = c(b-a)$. Siis ylä- ja alaintegraaleilla on yhteinen arvo $c(b-a)$. $\square$

Kaikki funktiot eivät suinkaan ole integroituvia. Esimerkit näistä ovat hivenen eksoottisia.

Esimerkki 2.8. Määritellään välillä $I = [0, 1]$ funktio f asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \text{ on irrationaaliluku} \\ 1, & \text{jos } x \text{ on rationaaliluku.} \end{cases}$$

Osoita, että $f \notin R(I)$.

Todistus. Olkoon D mikä tahansa välin I jako. Jokaisella osavälillä Δ_k on sekä rationaalilukuja että irrationaalilukuja. Näin ollen $m_k = 0$ ja $M_k = 1$ kaikille indeksin k arvoille. Koska välien Δ_k pituuksien summa on yksi, saadaan, että $s_D = 0$ ja $S_D = 1$. Nämä ovat siten myös ala- ja yläintegraalien arvot. Koska $\overline{\int}_0^1 f \neq \underline{\int}_0^1 f$, ei f ole integroitava välillä I . $\square$

2.2 Integroituvuustesti ja määrätyn integraalin perusominaisuuksia

Riemann-integroituvuuden teorian kehityksessä seuraavan lauseen tarjoama integroituvuustesti on käyttökelpoinen välivaihe. Se kertoo, että riittää löytää kutakin lukua $\varepsilon > 0$ kohti sellainen jako $D = D(\varepsilon)$, että sitä jakoa käytettäessä ylä- ja alasummien erotus on $< \varepsilon$. Tämän avulla voimme testata integroituvuutta suoraan ala- ja yläsummia tutkimalla, ja vältämme mutkan ala- ja yläintegraalien kautta.

Lause 2.9. *Olkoon f rajoitettu välillä $I = [a, b]$. Silloin*

$$f \in R(I) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists D)(S_D - s_D < \varepsilon).$$

Todistus. Oletetaan ensin, että f on Riemann-integroitava välillä I . Olkoon sitten $\varepsilon > 0$ mielivaltainen luku. Merkitään S :llä ylä- ja alaintegraalien yhteistä arvoa. Koska S on yläsummien infimum, on olemassa sellainen jako D_1 , että $S_{D_1} < S + \varepsilon/2$. Vastaavasti, koska S on alasummien supremum, on olemassa sellainen jako D_2 , että $s_{D_2} > S - \varepsilon/2$. Valitaan jälleen $D = D_1 \cup D_2$. Lemman 2.4 nojalla saadaan tällöin

$$S_D - s_D \leq S_{D_1} - s_{D_2} < (S + \varepsilon/2) - (S - \varepsilon/2) = \varepsilon.$$

Implikaatio “ $\Rightarrow$ ” on siis todistettu.

Oletetaan sitten, että valitsemalla jako D sopivasti saadaan ylä- ja alasummien erotus mielivaltaisen positiivisen luvun ε alapuolelle. Jokaiselle jaolle D on voimassa epäyhtälöt

$$s_D \leq \underline{\int}_a^b f \quad \text{ja} \quad S_D \geq \overline{\int}_a^b f.$$

Yhdistämällä nämä (ja Lemman 2.5 seuraus, jonka mukaan yläintegraali aina on vähintään yhtä suuri kuin alaintegraali) saadaan kaikille jaoille D arvio

$$0 \leq \overline{\int}_a^b f - \underline{\int}_a^b f \leq S_D - s_D.$$

Koska tässä erotus $S_D - s_D$ saadaan oletuksen mukaan niin pieneksi kuin halutaan, on pakko olla $\overline{\int}_a^b f - \underline{\int}_a^b f = 0$. Käänteinen implikaatio “ $\Leftarrow$ ” on sekin siis todistettu. $\square$

Esimerkki 2.10. Osoitetaan, että funktio $f(x) = x^2$ on integroituva välillä $[0, 1]$ ja että

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Ratkaisu. Esimerkissä 2.3 näimme, että valitsemalla n -osainen tasavälinen jako $D = D_n$ saadaan $s_{D_n} = n(n-1)(2n-1)/(6n^3)$ ja $S_{D_n} = n(n+1)(2n+1)/(6n^3)$. Tässä $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{D_n} = 1/3 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{D_n}$, joten valitsemalla n riittävän suureksi saadaan erotus $S_{D_n} - s_{D_n}$ mielivaltaisen lähelle nollaa. Lauseen 2.9 nojalla $f \in R([0, 1])$. Kyseisen yhteisen raja-arvon $1/3$ on pakko olla myös integraalin arvo S , koska kaikilla n on voimassa epäyhtälöt

$$s_{D_n} \leq \int_0^1 f \leq S_{D_n},$$

jolloin sandwich-periaatteen seurauksena $\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{D_n} = 1/3$.

Esimerkki 2.11. Osoitetaan, että välillä $[a, b]$ monotoninen funktio on aina integroituva tällä välillä.

Todistus. Riittää tutkia kasvava tapaus. Koska kaikille $x \in [a, b]$ on tällöin voimassa $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ on funktio f rajoitettu tällä välillä. Tapaus, missä f on vakio, on jo käsitelty, joten rajoituksetta voimme olettaa, että $f(b) > f(a)$.

Käytetään tasavälistä jakoa D_n , missä jokaisen osavälin pituus on $h = (b-a)/n$, ja $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \dots, n$. Kasvavuuden perusteella tällöin $M_k = f(x_k)$ ja $m_k = f(x_{k-1})$. Tällöin

$$\begin{aligned} S_{D_n} - s_{D_n} &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot h - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})h \\ &= h(f(x_n) - f(x_0)) = h(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Tämä erotus on $< \varepsilon$ aina, kun $h < \varepsilon/(f(b) - f(a))$. Näin on aina, kun n on tarpeeksi suuri. $\square$

Huomaa, ettei edellisen esimerkin tuloksessa edellytetä funktiolta f jatkuvuutta. Monotonisella funktiolla epäjatkuvuuskohdat ovat ‘hyppyjä’, ja näitä voi välillä $[a, b]$ olla vaikka äärettömän monessa kohdassa.

Esimerkki 2.12. Tutkitaan funktiota f , joka saa välillä $[a, b]$ arvon nolla yhtä pistettä $c \in (a, b)$ lukuun ottamatta, jossa se saa arvon 1. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$, ja valitaan jako D siten, että $[c - \varepsilon/2, c + \varepsilon/2]$ on yksi osaväleistä. Nähdään, että $s_D = 0$ ja $S_D = \varepsilon$. Tämä funktio on siis integroituva, ja $\int_a^b f = 0$. Selvästi sama päättely voidaan tehdä, jos c on jompikumpi välin päätepisteistä.

Lause 2.13. Oletetaan, että $a < b$, c on vakio ja $f, g \in R([a, b])$. Tällöin myös funktiot cf ja $f + g$ ovat integroituvia välillä $[a, b]$. Lisäksi integraalien arvoja sitovat toisiinsa luonnolliset yhtälöt

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f,$$

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Todistus. Käsitellään ensin funktio cf . Jos $c = 0$, ei ole mitään todistamista, joten voimme olettaa, että $c \neq 0$. Olkoon siis D jokin välin $[a, b]$ jako, ja M_k, m_k funktion f supremum ja infimum osavälillä Δ_k . Jos $c > 0$, niin funktion cf supremum välillä $\Delta_k = cM_k$ ja infimum $= cm_k$. Jos taas $c < 0$, niin funktion arvojen suuruusjärjestys kääntyy ja saamme funktion cf supremumiksi cm_k ja infimumiksi cM_k . Kummassakin tapauksessa

$$S_D(cf) - s_D(cf) = |c| (S_D(f) - s_D(f)).$$

Koska oletimme funktion f integroituvaksi, Lauseen 2.9 nojalla erotus $S_D(f) - s_D(f)$ saadaan mielivaltaisen pieneksi. Samoin siis erotus $S_D(cf) - s_D(cf)$, joten Lauseen 2.9 perusteella $cf \in R([a, b])$. Edelleen vakion c etumerkistä riippuen joko $S_D(cf) = cS_D(f)$ tai $S_D(cf) = cs_D(f)$. Koska jako D sopivasti valitsemalla saadaan kaikki esiintyvät ala- tai yläsummat mielivaltaisen lähelle vastaavien integraalien arvoja, on yhtälön $\int_a^b cf = c \int_a^b f$ oltava tosi.

Tutkitaan sitten summafunktiota $f + g$. Olkoon D jokin jako, ja $M_k(f)$ ja $M_k(g)$ funktioiden f ja g supremumit sen osavälillä Δ_k . Epäyhtälöt $f(x) \leq M_k(f)$ ja $g(x) \leq M_k(g)$ ovat voimassa aina, kun $x \in \Delta_k$, joten myös epäyhtälö $f(x) + g(x) \leq M_k(f) + M_k(g)$ pitää paikkansa. Näin ollen funktion $f + g$ supremumille tällä osavälillä saadaan arvio

$$M_k = \sup\{(f + g)(x) \mid x \in \Delta_k\} \leq M_k(f) + M_k(g).$$

Ottamalla huomioon tämä arvio kaikilla osaväleillä saadaan epäyhtälö

$$S_D(f + g) = \sum_k M_k \Delta_k x \leq \sum_k (M_k(f) + M_k(g)) \Delta_k x = S_D(f) + S_D(g).$$

Tutkimalla alarajoja saadaan vastaavalla tavalla epäyhtälö

$$s_D(f + g) \geq s_D(f) + s_D(g).$$

Olkoon sitten $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Lauseen 2.9 ja oletustemme perusteella on olemassa sellaiset jaot D_1 ja D_2 , että

$$S_{D_1}(f) - s_{D_1}(f) < \varepsilon/2 \quad \text{ja} \quad S_{D_2}(g) - s_{D_2}(g) < \varepsilon/2.$$

Asetetaan jälleen $D = D_1 \cup D_2$, jolloin Lemman 2.4 nojalla vastaavat epäyhtälöt ovat samanaikaisesti voimassa jaolle D . Ottamalla huomioon kaikki kootut epäyhtälöt saamme

$$\begin{aligned} S_D(f + g) - s_D(f + g) &\leq S_D(f) + S_D(g) - s_D(f) - s_D(g) \\ &= (S_D(f) - s_D(f)) + (S_D(g) - s_D(g)) \\ &\leq (S_{D_1}(f) - s_{D_1}(f)) + (S_{D_2}(g) - s_{D_2}(g)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Funktion $f + g$ integroituvuus seuraa siten Lauseesta 2.9. Olkoot integraalien arvot $S(f)$, $S(g)$ ja $S(f + g)$. Yllä tehdyllä jaon D valinnalla

$$\begin{aligned}(S(f) - \varepsilon/2) + (S(g) - \varepsilon/2) &< s_D(f) + s_D(g) \leq s_D(f + g) \leq S(f + g) \leq \\ &\leq S_D(f + g) \leq S_D(f) + S_D(g) < (S(f) + \varepsilon/2) + (S(g) + \varepsilon/2),\end{aligned}$$

joten

$$|S(f + g) - (S(f) + S(g))| < \varepsilon.$$

Tämä epäyhtälö on siis voimassa kaikilla luvun $\varepsilon > 0$ arvoilla, joten tässäkin on pakko olla väitetty yhtäsuuruus $S(f + g) = S(f) + S(g)$. $\square$

Lauseen 2.13 ilmeisenä seurauksena saadaan myös, että kaikille välillä $[a, b]$ integroituville funktioilla $f_1, f_2, \dots, f_n$ ja vakioille $c_1, c_2, \dots, c_n$ on voimassa sääntö

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n c_i f_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i,$$

erityisesti siis yhtälön vasemmalla puolella esiintyvä funktio on sekin integroituva.

Yhdistämällä tämä tulos ja Esimerkin 2.12 havainto saadaan:

Seuraus 2.14. *Funktion integroituvuus ja määrätyn integraalin arvo eivät muutu, jos funktion arvoa muutetaan äärellisen monessa välin $[a, b]$ pisteessä.*

Todistus. Funktion arvon muuttaminen äärellisen monessa pisteessä on ekvivalenttia sen kanssa, että funktioon lisätään äärellisen monen Esimerkissä 2.12 käsitellyn funktion lineaarikombinaatio. $\square$

Jos f on jokin välillä $[a, b]$ määritelty funktio, niin määritellään sen *positiivinen osa* f^+ ja negatiivinen osa f^- asettamalla

$$\begin{aligned}f^+(x) &= \begin{cases} f(x), & \text{jos } f(x) \geq 0, \text{ ja} \\ 0, & \text{jos } f(x) < 0. \end{cases} \\ f^-(x) &= \begin{cases} -f(x), & \text{jos } f(x) < 0, \text{ ja} \\ 0, & \text{jos } f(x) \geq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Tällöin selvästi $f = f^+ - f^-$ ja $|f| = f^+ + f^-$.

Lause 2.15. *Jos $f \in R([a, b])$, niin tällöin myös $f^+, f^-, |f| \in R([a, b])$.*

Todistus. Käydään läpi funktion f^+ integroituvuus. Negatiivinen osa voidaan käsitellä analogisesti. Olkoon sitten D jokin välin jako, M_k funktion f supremum osavälillä Δ_k ja vastaavasti m_k infimum. Merkitään funktion f^+ vastaavia suureita M_k^+ ja m_k^+ . Jos funktio f ei saa välillä Δ_k negatiivisia arvoja, niin $M_k^+ = M_k$ ja $m_k^+ = m_k$. Jos funktio f ei saa välillä Δ_k positiivisia arvoja, niin $M_k^+ = m_k^+ = 0$. Jos funktio f saa välillä Δ_k sekä positiivisia että negatiivisia arvoja, niin $M_k^+ = M_k$ ja $m_k^+ = 0 > m_k$. Kaikissa tapauksissa on voimassa epäyhtälö

$$M_k^+ - m_k^+ \leq M_k - m_k.$$

Näistä epäyhtälöistä seuraa heti, että $S_D(f^+) - s_D(f^+) \leq S_D(f) - s_D(f)$. Koska oletuksen mukaan valitsemalla jako D sopivasti saadaan funktion f ylä- ja alasummien erotus halutun pieneksi, sama pätee myös funktion f^+ ylä- ja alasummien erotukselle, joten funktion f^+ integroituvuus seuraa Lauseesta 2.9.

Funktion $|f|$ integroituvuus seuraa sitten positiivisen ja negatiivisen osan integroituvuudesta ja Lauseesta 2.13. □

Lause 2.16. (*Integraalin additiivisuus välin suhteen*). Jos $a < c < b$, niin

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

edellyttäen, että yhtälössä ainakin toinen puoli on määritelty. Erityisesti siis, jos $f \in R([a, b])$ niin tällöin myös $f \in R([a, c])$, $f \in R([c, b])$ ja kääntäen, jos f on integroitava molemmilla väleillä $[a, c]$ ja $[c, b]$, niin se on integroitava myös koko välillä $[a, b]$.

Todistus. Jos D_1 on mikä tahansa välin $[a, c]$ jako ja D_2 mikä tahansa välin $[c, b]$ jako, niin niiden unioni $D = D_1 \cup D_2$ on välin $[a, b]$ jako, ja selvästi

$$s_D = s_{D_1} + s_{D_2} \quad \text{ja} \quad S_D = S_{D_1} + S_{D_2}. \quad (*)$$

Käytämme alla tätä yhteyttä toistuvasti.

Oletetaan ensin, että f on integroitava välillä $I = [a, b]$ ja että $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa välin I sellainen jako D , että $S_D - s_D < \varepsilon$. Merkitään $D' = D \cup \{c\}$, jolloin joko $D = D'$ tai D' on jaon D tihennys. Kummassakin tapauksessa myös $S_{D'} - s_{D'} < \varepsilon$. Voidaan kirjoittaa $D' = D_1 \cup D_2$, missä D_1 on välin $I_1 = [a, c]$ jako ja D_2 välin $I_2 = [c, b]$ jako. Yhtälön (*) nojalla

$$(S_{D_1} - s_{D_1}) + (S_{D_2} - s_{D_2}) = S_{D'} - s_{D'} < \varepsilon.$$

Koska ylä- ja alasumman erotus on aina ei-negatiivinen ovat tässä vasemman puolen sulkulausekkeet molemmat ei-negatiivisia, ja siis myös $< \varepsilon$. Funktion f integroituvuus väleillä I_1 ja I_2 seuraa siten Lauseesta 2.9.

Oletetaan sitten, että f on integroitava molemmilla väleistä I_1 ja I_2 ja että $\varepsilon > 0$. Tällöin löydämme välin I_1 sellaisen jaon D_1 , ja välin I_2 sellaisen jaon D_2 , että $S_{D_1} - s_{D_1} < \varepsilon/2$ ja $S_{D_2} - s_{D_2} < \varepsilon/2$. Kaavan (*) nojalla väliin I jaolle $D = D_1 \cup D_2$ on voimassa $S_D - s_D < 2\varepsilon/2 = \varepsilon$, joten funktio f on integroitava välillä I Lauseen 2.9 nojalla.

Tässä on aina $s_{D_1} \leq \int_a^c f \leq S_{D_1}$, $s_{D_2} \leq \int_c^b f \leq S_{D_2}$ ja $s_D \leq \int_a^b f \leq S_D$, joten luvut $\int_a^b f$ ja $\int_a^c f + \int_c^b f$ ovat molemmat yhtälön (*) nojalla välillä $[s_D, S_D]$. Integroituvuuden nojalla tämä väli saadaan mielivaltaisen lyhyeksi sopivalla jaon D valinnalla, joten näiden kahden luvun on pakko olla samat. □

Määrätyn integraalin $\int_a^b f$ määritelmää voidaan laajentaa tapauksiin $a \geq b$ seuraavalla tavalla. Jos f on integroitava välillä $[a, b]$, missä $a < b$, niin määritellään

$$\int_b^a f = - \int_a^b f.$$

Kunhan f on määritelty pisteessä a , määritellään myös

$$\int_a^a f = 0.$$

Ideana tässä on, että määrätty integraali on tavallaan ajateltava yli *suunnatun välin*, jossa välin ‘kulkeminen’ tai ‘pyyhkäiseminen’ luonnolliseen kasvavaan suuntaan antaa pinta-alan plusmerkkisenä ja ‘vääriin suuntaan’ kulkeminen vastaavasti miinusmerkkisenä. Tätä pohditaan tarkemmin kurssilla *Usean muuttujan funktiot* käyräintegraalien yhteydessä. Samantapaista ajattelua tulee vastaan myös myöhemmin tällä kurssilla.

Tämän lisämääritelmän jälkeen Lauseen 2.16 tulos on voimassa olivatpa luvut a, b, c missä järjestyksessä tahansa. Jos esimerkiksi $b < a < c$, niin Lauseen nojalla saadaan

$$\int_b^c f = \int_b^a f + \int_a^c f,$$

ja tämän ja määritelmien seurauksena

$$\int_a^b f = - \int_b^a f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

2.3 Jatkuvan funktion integroituvuus ja analyysin peruslause

Kurssilla Analyysi I jo näimme, että suljetulla välillä jatkuva funktio on välttämättä tällä välillä rajoitettu. Pylväsdiagrammin avulla muodostuu ehdottomasti mielikuva, että tällaisen jatkuvan funktion tapauksessa ylä- ja alasummien erotus saadaan mielivaltaisen pieneksi. Todistamme tämän seuraavaksi. Tässä esiintyy hieman vaativampi täydellisyysaksiooman käyttö, joten tämä ei ehkä heti avaudu sellaiselle lukijalle, joka ei vielä ole erittäin hyvin sisäistänyt supremumien tekniikkaa. Todistuksen ideaan on nimittäin piilotettu niin sanottu *kompaktin joukon* käsite, joka esitellään tarkasti vasta kurssilla *Usean muuttujan funktiot*. Voit siis palata tähän todistukseen kerratessasi aikaisemmin oppimaasi aloittaessasi kyseisen kurssin (suositeltu ajankohta tähän on seuraavan lukuvuoden syksyllä).

Huomaa, että jokaisen esiintyvän jaon jokainen osaväli on suljettu, joten kyseisellä välillä jatkuva funktio saavuttaa siellä suurimman ja pienimmän arvonsa. Kun tutkimme jatkuvan funktion integroituvuutta, voimme siis korvata sen osaväleillä saamien arvojen supremumit (vast. infimumit) maksimeilla (vast. minimeilla).

Lemma 2.17. *Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $I = [a, b]$ ja että $\varepsilon > 0$ on jokin luku. On olemassa sellainen välin I jako D , että kullakin osavälillä $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ suurin ($= M_k$) ja pienin ($= m_k$) funktion f saavuttamista arvoista toteuttavat epäyhtälön $M_k - m_k \leq \varepsilon$. Erityisesti siis.*

$$S_D(f) - s_D(f) \leq \varepsilon(b - a).$$

Todistus. Ideana on, että pyrimme todistamaan tämän väitteen aina pidemmille ja pidemmille väleille. Olkoon sitä varten x jokin välin I piste, ja tutkikaamme vastaavaa ehtoa välillä $I_x = [a, x]$. Määritellään siis

joukko

$$S = \{x \in I \mid \exists \text{ sellainen välin } I_x \text{ jako } D_x, \text{ että sen kaikilla osaväleillä } M_k - m_k \leq \varepsilon\}.$$

Tässä siis jaon D_x jokaisen yläpylvään korkeus on $\leq$ alapylvään korkeus $+\varepsilon$. Koska kyseisen portaikon leveys on $x - a$, yläpylväikön ja alapylväikön pinta-alojen erotukselle on voimassa arvio

$$S_{D_x} - s_{D_x} \leq \varepsilon(x - a).$$

Joukko S on epätyhjä, sillä kun $x = a$, 0-välinen jako $D_a = \{a\}$ toteuttaa vaaditun ehdon. Joukko S on tietenkin myös ylhäältä rajoitettu, koska mikään sen alkio ei ole suurempi kuin välin päätepiste b . Joukolla S on siis olemassa supremum $c = \sup S$, ja $c \in I$.

Todistamme seuraavat kaksi seikkaa. Ensinnä todistamme, että c on itse mukana joukossa S . Sitten todistamme, että jos $c < b$, niin joukossa S on myös lukua c suurempia alkioita. Tämä jälkimmäinen ehto on ristiriidassa supremum-ominaisuuksien kanssa, joten on siis oltava $c = b$. Yhdessä ensin todistamamme seikan kanssa saadaankin sitten, että $b \in S$, jolloin Lemman väite onkin todistettu.

Funktio f on joka tapauksessa jatkuva pisteessä c (jatkuvuus on vain toispuoleista, jos c on jompikumpi välin I päätepisteistä, mutta tämä otetaan huomioon rajaamalla tarkastelu tarvittaessa pisteen c ympäristön ja välin I leikkaukseen). On siis olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$x \in Y(c; \delta) \cap I \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon/2.$$

Siis välillä $\Delta = [c - \delta, c + \delta] \cap I$ funktio f saa arvoja ainoastaan väliltä $(f(c) - \varepsilon/2, f(c) + \varepsilon/2)$. Merkitään tällä välillä funktion f saamien arvojen maksimia ja minimiä

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in \Delta\}, \quad m = \inf\{f(x) \mid x \in \Delta\},$$

jolloin $f(c) - \varepsilon/2 \leq m \leq f(c) \leq M \leq f(c) + \varepsilon/2$. Erityisesti siis

$$M - m \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Todistetaan sitten ensimmäinen mainittu väite, jonka mukaan $c \in S$. Koska c on joukon S pienin yläraja, ei luku $c - \delta < c$ voi olla joukon S yläraja. Näin ollen joukossa S on jokin luku $x > c - \delta$. Koska lisäksi c on joukon S yläraja, saamme $x \leq c$. Olkoon D_x jokin välin $[a, x]$ sellainen jako, että $S_{D_x} - s_{D_x} \leq \varepsilon(x - a)$. Asetetaan $D_c = D_x \cup \{c\}$, jolloin saadaan välin $[a, c]$ jako. Viimeisellä välillä $[x, c]$ on epäyhtälön $(*)$ nojalla maksimin ja minimin välinen erotus enintään $M - m < \varepsilon$. Jaon D_c olemassaolo osoittaa sitten, että $c \in S$.

Jos tässä $c < b$, niin on olemassa luku $d \in (c, c + \delta) \cap I$, jolloin $d > c$. Välillä $[c, d]$ on niin ikään suurin funktion f saamista arvoista $\leq M$ ja pienin $\geq m$. Määritellään siis $D_d = D_c \cup \{d\}$, jolloin D_d on välin I_d sellainen jako, jonka jokaisella osavälillä funktion f maksimi ja minimi eroavat toisistaan $\leq \varepsilon$. Siis $d \in S$. Koska $d > c$, tämä on ristiriidassa sen kanssa, että luvun c piti olla joukon S yläraja. Näin ollen on oltava $c = b$, ja väite on todistettu. $\square$

Lause 2.18. Suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio f on tällä välillä myös Riemann-integroituva.

Todistus. Koska kerroin $b - a$ on vakio, sopivalla jaon D valinnalla ylä- ja alasumman välinen erotus $S_D(f) - s_D(f)$ saadaan pienemmäksi kuin mikä tahansa luku $\varepsilon' > 0$ valitsemalla Lemmassa 2.17 $\varepsilon = \varepsilon'/(b-a)$. Väite seuraa Lauseesta 2.9. $\square$

Esimerkki 2.11 jo osoitti, ettei funktion jatkuvuus ole välttämätön edellytys sen integroituvuudelle. Seuraavan esimerkin tulos on hengeltään samanlainen.

Esimerkki 2.19. Oletetaan, että funktio f on rajoitettu välillä $I = [a, b]$, ja että se on jatkuva tällä välillä pistettä c lukuun ottamatta. Osoita, että f on integroituva yli välin I .

Todistus. Käsittelemme tapauksen $c \in (a, b)$. Jos c on jompikumpi välin päätepisteistä, päättely voidaan tehdä samaan tapaan.

Tavoitteenamme on soveltaa Lausetta 2.9, joten valitaan mielivaltainen $\varepsilon > 0$. Koska f on rajoitettu, on olemassa sellainen luku $M > 0$, että $|f(x)| < M$ kaikille $x \in I$. Valitaan sitten sellainen luku $\delta > 0$, että $\delta < \varepsilon/12M$ ja että väli $I_c = [c - \delta, c + \delta]$ sisältyy väliin (a, b) . Välillä I_c funktion f supremum $M_c \leq M$ ja infimum $m_c \geq -M$.

Funktio f on jatkuva välillä $[a, c - \delta]$, joten se on sillä välillä integroituva. Lauseen 2.9 nojalla on olemassa välin $[a, c - \delta]$ sellainen jako D_1 , että $S_{D_1} - s_{D_1} < \varepsilon/3$. Funktio f on jatkuva myös välillä $[c + \delta, b]$, joten on olemassa sellainen välin $[c + \delta, b]$ jako D_2 , että $S_{D_2} - s_{D_2} < \varepsilon/3$.

Olkoon sitten $D = D_1 \cup D_2$. Tämän jaon osaväleinä esiintyvät jaon D_1 osavälit, väli I_c sekä jaon D_2 osavälit. Näin ollen

$$S_D = S_{D_1} + M_c((c + \delta) - (c - \delta)) + S_{D_2} = S_{D_1} + 2M_c\delta + S_{D_2}.$$

Vastaavasti

$$s_D = s_{D_1} + m_c((c + \delta) - (c - \delta)) + s_{D_2} = s_{D_1} + 2m_c\delta + s_{D_2}.$$

Vähentämällä nämä puolittain toisistaan saadaan

$$S_D - s_D = (S_{D_1} - s_{D_1}) + 2(M_c - m_c)\delta + (S_{D_2} - s_{D_2}) < \frac{\varepsilon}{3} + 4M \cdot \frac{\varepsilon}{12M} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Koska ε oli mielivaltainen positiivinen luku, niin väite seuraa nyt Lauseesta 2.9. $\square$

Seuraavaan lauseeseen on koottu useita sangen ilmeisiä epäyhtälöitä.

Lause 2.20. Oletetaan, että $a < b$ ja että $f, g \in R([a, b])$. Tällöin

(i) Jos $\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M$, niin

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a).$$

(ii) Jos $\forall x \in [a, b] : f(x) \geq 0$, niin $\int_a^b f \geq 0$.

(iii) Jos $\forall x \in [a, b] : f(x) \geq g(x)$, niin $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

(iv) (Kolmioepäyhtälö) $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Lisäksi kolmioepäyhtälö on voimassa muodossa $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ myös siinä tapauksessa, jossa $a > b$.

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa siitä, että triviaalille jaolle $D = \{a, b\}$ $s_D \geq m(b - a)$ ja $S_D \leq M(b - a)$. Toinen väite seuraa tästä erikoistapauksena, kun valitaan $m = 0$. Kolmas väite seuraa integraalin lineaarisuudesta soveltamalla toista väitettä integroituvaan funktioon $f(x) - g(x)$. Viimeinen väite seuraa Lauseesta 2.15 ja kaikissa välin $[a, b]$ pisteissä voimassa olevista epäyhtälöistä $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Sen laajennus tapaukseen $a > b$ on määritelmien ilmeinen seuraus. $\square$

Huomautus 2.21. Esimerkki 2.12 osoittaa, että on mahdollista, että $\int_a^b f = 0$, vaikka olisi $f(x) \geq 0$ koko välillä ja $f(c) > 0$ ainakin yhdessä tarkasteluvälin $[a, b]$ pisteessä c . Voit harjoitustehtävänä osoittaa, että jos ehtojen $f(c) > 0$ ja $\forall x \in [a, b] : f(x) \geq 0$ lisäksi oletetaan, että f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin tällöin välttämättä myös $\int_a^b f > 0$.

Seuraus 2.22. (Integraalilaskennan väliarvolause.) Oletetaan, että $a < b$ ja että funktio f on jatkuva välillä $I = [a, b]$. Tällöin on olemassa sellainen luku $\xi \in [a, b]$, että

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Jos $a \geq b$, niin sama tulos on voimassa jollekin luvulle $\xi \in [b, a]$.

Todistus. Suljetulla välillä jatkuvan funktion perusominaisuuksien nojalla se saavuttaa suurimman ja pienimmän arvon kyseisellä välillä, eli on olemassa sellaiset välin I pisteet x_1 ja x_2 , että kaikille $x \in I$

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M.$$

Jos tässä $M = m$, niin f on vakiofunktio (ainakin välillä I) ja mikä tahansa välin I piste kelpaa luvuksi ξ . Muussa tapauksessa jakamalla Lauseen 2.20 kohdan (i) epäyhtälöt luvulla $b - a > 0$ saadaan

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f \leq M.$$

Luku $K = (\int_a^b f)/(b - a)$ on siis välillä (m, M) . Jatkuvan funktion väliarvolauseeseen perusteella tällöin lukujen x_1 ja x_2 välissä on sellainen luku ξ , että $f(\xi) = K$. Koska x_1 ja x_2 ovat välillä I , niin myös $\xi \in I$.

Tapaus $a > b$ seuraa integraalin $\int_a^b f$ määritelmästä soveltamalla jo todistettua versiota välillä $[b, a]$. Tapauksessa $a = b$ väite on ilmeinen. $\square$

Oletetaan sitten, että $I = [a, b]$, $a < b$, ja että funktio $f \in R(I)$, eli erityisesti f on rajoitettu tällä välillä. Lauseen 2.16 nojalla tiedämme funktion f olevan integroituva tällöin myös kaikilla väleillä $I_x = [a, x]$, $x \in I$. Voimme siis määritellä funktion

$$g(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t) dt.$$

Tätä funktiota $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ kutsutaan funktion f *integraalifunktioksi*. Tulemme pian näkemään, että tämä on edellisessä luvussa esiintyneen integraalifunktion määritelmän laajennus. Huomaa, että koska x tässä esiintyy integroimisvälin ylärajana, sitä ei enää voida käyttää integrointimuuttujana, ja siksi tässä vaihdettiin integraalin sisällä muuttujaksi t .

Edelleen Lauseen 2.16 nojalla aina, kun $x, x + h \in I$ on voimassa yhtälö

$$g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^x f = \left(\int_a^x f + \int_x^{x+h} f \right) - \int_a^x f = \int_x^{x+h} f. \quad (*)$$

Lause 2.23. *Välillä $I = [a, b]$ integroituvan (ja rajoitetun) funktion f integraalifunktio on jatkuva välillä I .*

Todistus. Oletuksistamme seuraa, että on olemassa sellainen luku $M > 0$, että $\forall x \in I : |f(x)| \leq M$. Olkoot $x \in I$ ja $\varepsilon > 0$ mielivaltaisia. Yhtälön (*) ja Lauseen 2.20 epäyhtälöiden nojalla

$$|g(x + h) - g(x)| = \left| \int_x^{x+h} f \right| \leq \left| \int_x^{x+h} |f| \right| \leq M|x + h - x| = M|h| < \varepsilon$$

aina, kun $|h| < \varepsilon/M$. Funktio g on siis jatkuva pisteessä x . □

Huomaa erityisesti, että Lause 2.23 *ei* edellytä funktion f jatkuvuutta, ainoastaan integroituvuutta. Tähän liittyvä yleinen sääntö on, että integraalifunktio on aina ‘paremmin käyttäytyvä’ funktio kuin integrandi.

Lause 2.24. *(Analyysin peruslause, koko välillä jatkuvan funktion tapaus.) Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $I = [a, b]$, $a < b$. Tällöin sen integraalifunktio*

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

on derivoituva kaikissa välin (a, b) pisteissä, oikealta derivoituva pisteessä a ja vasemmalta derivoituva pisteessä b , ja sen derivaatta

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f = f(x).$$

Todistus. Yhtälön (*) nojalla funktion $g(x)$ erotusosamääräksi saadaan

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Integraalilaskennan väliarvolauseen (Lause 2.22) nojalla lukujen x ja $x + h$ välissä on sellainen luku $\xi = \xi_h$, että

$$\int_x^{x+h} f = hf(\xi_h).$$

Yhdistämällä nämä havainnot saadaan yhtälö

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(\xi_h).$$

Kun tässä $h \rightarrow 0$, niin välttämättä $\xi_h \rightarrow x$. Koska f on jatkuva pisteessä x , tällöin myös $f(\xi_h) \rightarrow f(x)$. Jos $x = a$ tai $x = b$, niin vastaava päättely menee läpi ilmeisin muutoksin. □

Seuraus 2.25. Jos funktio f on jatkuva välillä $I = [a, b]$, sillä on olemassa kantafunktio eli määräämätön integraali tällä välillä.

Tätä tulosta voidaan yleistää hieman kattamaan sellaiset tapaukset, joissa tiedämme integrandin jatkuvaksi vain yhdessä pisteessä.

Lause 2.26. (Analyysin peruslause.) Oletetaan, että funktio f on integroitava välillä $I = [a, b]$, $a < b$ ja jatkuva pisteessä $c \in I$. Tällöin integraalifunktio

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

on derivoituva pisteessä c , ja $g'(c) = f(c)$. Jos c on jompikumpi välin I päätepisteistä jatkuvuus ja derivoituvuus tulkitaan toispuoleisina.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Oletetaan, että h on jokin sellainen luku, että $c + h \in I$. Koska (vakiofunktion määrätyn integraalin perusteella)

$$f(c) = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(c) dt,$$

saamme yhtälön (*) nojalla

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(c+h) - g(c)}{h} - f(c) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} (f(t) - f(c)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_c^{c+h} |f(t) - f(c)| dt \right|. \end{aligned}$$

Koska f on jatkuva pisteessä c , on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$t \in Y(c; \delta) \cap I \Rightarrow |f(t) - f(c)| < \varepsilon.$$

Oletetaan sitten, että lisäksi $|h| < \delta$. Tällöin koko integroimisvälillä $[c, c+h]$ tai $[c+h, c]$ luvun h etumerkistä riippuen) on voimassa arvio $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$, joten Lauseen 2.20 nojalla

$$\left| \int_c^{c+h} |f(t) - f(c)| dt \right| < |h|\varepsilon.$$

Ottamalla huomioon ylempi epäyhtälö saadaan

$$\left| \frac{g(c+h) - g(c)}{h} - f(c) \right| < \varepsilon.$$

Koska tässä $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, väite seuraa derivoituvuuden määritelmän nojalla. $\square$

Tarkastellaan nyt välillä $[a, b]$ jatkuvaa funktiota f . Lauseen 2.26 nojalla sillä on olemassa kantafunktio. Jos F on jokin (toinen) kantafunktio, niin integraalilaskennan peruslauseen mukaan kaikille $x \in [a, b]$ on voimassa yhtälö

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C,$$

missä C on jokin vakio. Asettamalla $x = a$ saa määrätty integraali arvon nolla, joten $F(a) + C = 0$, mistä ratkeaa $C = -F(a)$. Tästä saadaan seuraava tulos.

Lause 2.27. (*Newton–Leibniz*) Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja että F on sen jokin kantafunktio.

Tällöin

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \left(= \left|_a^b F(x) \right. \right)$$

Viimeisenä esitetty merkintä $\left|_a^b F(x) \right.$ luetaan yleensä “sijoitus a :sta b :hen F ”. Jos funktiossa F esiintyy useita muuttujia ja väärinkäsityksen mahdollisuus on olemassa, voidaan selventää sitä, minkä muuttujan paikalle sijoitukset tehdään. Käyttämällä esimerkiksi merkintää $\left|_{x=a}^b F(x, y) \right. = F(b, y) - F(a, y)$ osoitetaan, että sijoitukset tehdään juuri muuttujan x paikalle.

Esimerkki 2.28.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1} = \left|_0^1 \arctan x \right. = \arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4 - 0 = \pi/4.$$

Esimerkki 2.29. Osoita, että funktio $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$g(x) = \int_0^{x^2+1} \frac{\sin t}{t} dt$$

on kaikkialla määritelty, jatkuva ja derivoituva, ja määrää sen derivaatta.

Ratkaisu. Huomaa, että emme pysty ilmaisemaan funktion $f(t) = (\sin t)/t$ primitiiviä alkeisfunktioiden avulla. Kun täydennämme sen määritelmää asettamalla $f(0) = 1$ saamme kuitenkin tunnetun raja-arvotuloksen $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$ perusteella kaikkialla jatkuvan funktion. Näin ollen se on integroitava välillä $[0, x^2 + 1]$ olipa x mikä reaaliluku tahansa. Merkitään $u = u(x) = x^2 + 1$. Tällöin funktio

$$h(u) = \int_0^u f(t) dt$$

on Lauseen 2.24 nojalla kaikkialla derivoituva, ja sen derivaatta on

$$\frac{dh}{du} = f(u) = \frac{\sin u}{u}.$$

Tehtävän funktio $g(x)$ saadaan yhdistettynä funktiona $g(x) = h(u(x))$. Yhdistettyjen funktioiden jatkuvuutta ja derivoituvuutta koskevien tulosten nojalla funktio g on sitten jatkuva ja derivoituva. Ketjusäännön nojalla

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dh}{du}(u(x)) \cdot u'(x) = \frac{2x \sin(x^2 + 1)}{x^2 + 1}.$$

Esimerkki 2.30. Määritellään funktio f välillä $[0, 2]$ asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 \leq x < 1, \text{ ja} \\ 3x^2, & \text{kun } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Osoita, että $f \in R([0, 2])$ ja laske $\int_0^2 f$.

Ratkaisu. Lauseen 2.16 nojalla riittää näyttää, että f on integroitava osaväleillä $[0, 1]$ ja $[1, 2]$, sekä laskea yhteen määrättyt integraalit näiden osavälien yli. Olkoon g välillä $[0, 1]$ määritelty funktio, joka saa arvon 1 pisteessä $x = 1$, ja arvon nolla muulloin. Esimerkin 2.12 nojalla funktio g on integroitava, ja $\int_0^1 g = 0$. Koska kaikilla välin $[0, 1]$ pisteillä x on voimassa

$$f(x) = x + 2g(x),$$

$(f(1) = 3 \cdot 1^2 = 3)$ saadaan

$$\int_0^1 f = \int_0^1 x \, dx + 2 \int_0^1 g = \left| \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$

missä käytimme hyväksi sitä, että välillä $[0, 1]$ jatkuvalla funktiolla $h(x) = x$ on tällä välillä kantafunktio $x^2/2$.

Välillä $[1, 2]$ on itse funktiolla f primitiivi x^3 , joten

$$\int_1^2 f = \left| x^3 \right|_1^2 = 8 - 1 = 7.$$

Etsityn määrätyn integraalin arvoksi saadaan siis $1/2 + 7 = 15/2$.

Funktion f integroituvuus seuraisi suoraan myös Esimerkin 2.19 tuloksesta.

Huomautus 2.31. On ilmeistä, että edellisen esimerkin tekniikkaa voidaan yleistää kaikkiin niihin tilanteisiin, joissa lasketaan sellaisen paloittain määritellyn funktion määrätty integraali, joka kaikilla osaväleillä saadaan jatkuvaksi muuttamalla sen määrittelyä tarvittaessa osavälin päätepisteessä. Näin ollen kikkailu Esimerkissä 2.12 käsiteltyjen ‘apufunktioiden’ avulla (yllä g) voidaan sivuuttaa, ja suoraan käyttää kullakin osavälillä tunnettua kantafunktiota.

2.4 Määrätyn integraalin laskemisesta

Kaikkia tekniikoita, jotka opimme ensimmäisessä luvussa määräämättömän integraalin löytämiseksi voidaan tietenkin soveltaa määrättyjen integraalien laskemiseen. Tässä pykälässä tarkastelemme näitä esimerkkien valossa, ja esitämme muutamia yksinkertaistavia huomioita.

Lause 2.32. (*Määrätty osittaisintegrointi.*) Jos funktiot u ja v ovat derivaattoineen jatkuvia välillä $[a, b]$, $a < b$, niin

$$\int_a^b uv' = \left| (uv) \right|_a^b - \int_a^b u'v.$$

Todistus. Seuraa suoraan (määräämättömästä) osittaisintegroinnista ja Lauseesta 2.27. □

Esimerkki 2.33.

$$\int_{-1}^1 xe^x \, dx = \left| xe^x \right|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x \, dx = \left| (e^x(x-1)) \right|_{-1}^1 = 2e^{-1}.$$

Seuraava integraali esiintyy sängen usein, sillä monet integraalit palautuvat tätä tyyppiä olevaan integraaliin trigonometrisen sijoituksen jälkeen.

Esimerkki 2.34. Olkoon $n \in \mathbf{N}$ luonnollinen luku. Johda kaava määrätyle integraalille

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

Ratkaisu. Sovelletaan osittaisintegrointia. Oletetaan ensin, että $n \geq 2$, ja valitaan $u = \sin^{n-1} x$ ja $v' = \sin x$. Tällöin $u' = (n-1) \cos x \sin^{n-2} x$ ja $v = -\cos x$, joten osittaisintegrointi antaa yhtälön

$$I_n = \left[-\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \right].$$

Selvästi ensimmäinen termi (sijoitus) on nolla. Käytetään jälkimmäisessä integraalissa identiteettiä $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Äskeinen yhtälö saa silloin muodon

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

jonka ratkaisuna saamme *palautuskaavan*

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Toisaalta saamme helposti, että $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 = \pi/2$ ja $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$. Palautuskaavan avulla näistä saadaan yleiset tulokset (todistus harjoitustehtävänä induktiolla)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{\pi}{2}$$

parillisille potensseille ($k \in \mathbf{N}$), ja parittomille vastaavasti (edelleen kaikille $k \in \mathbf{N}$)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x \, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2k}{2k+1}.$$

Esimerkki 2.35. Määritellään lukujono $a_k, k \in \mathbf{N}$, kaavalla

$$a_k = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2k-2}{2k-3} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k-1}.$$

Todistetaan ns. Wallisin kaava, joka sanoo, että tämä jono suppenee, ja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \frac{\pi}{2}.$$

Ratkaisu. Esimerkin 2.34 tulokset voidaan kirjoittaa muodossa ($k > 0$)

$$\frac{I_{2k-1}}{I_{2k}} = \frac{2a_k}{\pi}.$$

Toisaalta kaikille $x \in [0, \pi/2]$ on voimassa $\sin x \in [0, 1]$ ja sen seurauksena

$$0 \leq \sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x.$$

Lauseen 2.20 seurauksena saadaan epäyhtälöketju $0 < I_{2k+1} \leq I_{2k} \leq I_{2k-1}$. Jakamalla tämä puolittain luvulla I_{2k-1} saadaan palautuskaava huomioon ottaen

$$\frac{2k}{2k+1} \leq \frac{I_{2k-1}}{I_{2k}} \leq 1$$

kaikille kokonaisluvuille $k > 0$. Tässä vasemmanpuoleisimpien lukujen muodostama jono lähestyy raja-arvonaan lukua 1, joten sandwich-lauseen nojalla $\lim_{k \rightarrow \infty} (I_{2k-1}/I_{2k}) = 1 = (2/\pi) \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$. Väite seuraa.

Sopiva sijoitus on erittäin käyttökelpoinen menetelmä määrätyn integraalin laskemiseksi. Ensimmäisenä mieleen tuleva tapa on käyttää sijoitusta kantafunktion löytämiseksi, kuten ensimmäisessä luvussa tehtiin, ja sitten laskea määrätty integraali Lauseen 2.27 tulosta käyttäen. Toinen tapa eroaa tästä siinä suhteessa, ettei siinä sijoituksen jälkeen tarvitse palata takaisin alkuperäiseen muuttujaan, mikä *määräämätöntä* integraalia laskettaessa oli ehdottoman välttämätöntä! Tällöin on oltava tarkkana sen suhteen, että tehtävä sijoitus muuttaa integroimisvälin joksikin toiseksi. Tämän ottaminen huomioon on käytännössä yleensä varsin helppoa. Seuraava lause antaa meille tarvittavan teorian.

Lause 2.36. (*Sijoitus määrättyyn integraaliin.*) Olkoon funktio f on jatkuva välillä I ja $[a, b] \subseteq I$. Olkoon edelleen g sellainen välillä $[\alpha, \beta]$ (tai välillä $[\beta, \alpha]$, jos $\beta < \alpha$) derivaattoineen jatkuva funktio, että

(i) $g([\alpha, \beta]) \subseteq I$ (tapauksessa $\beta < \alpha$ oletamme tietenkin, että $g([\beta, \alpha]) \subseteq I$),

(ii) $g(\alpha) = a$, ja $g(\beta) = b$.

Tällöin

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t) dt.$$

Todistus. Tutkitaan integraalifunktiota $h(x) = \int_a^x f$. Analyysin peruslauseen ja oletusten mukaan funktio $h(x)$ on muuttujan x derivoituva funktio koko välillä I , ja $dh/dx = h'(x) = f(x)$. Ketjusäännön perusteella yhdistetty funktio $F(t) = h(g(t))$ on tällöin derivoituva välillä $[\alpha, \beta]$ (tai välillä $[\beta, \alpha]$) ja

$$\frac{dF}{dt} = F'(t) = h'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Analyysin peruslauseen nojalla sitten

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t) dt = \left|_{t=\alpha}^\beta F(t) = h(g(\beta)) - h(g(\alpha)) = h(b) - h(a) = \int_a^b f.$$

□

Esitämme tälle tulokselle vielä tulkinnan pylväikköjen pinta-alojen avulla siinä yksinkertaisessa tilanteessa, jossa funktio g on monotonisesti kasvava, ja funktio f saa välillä I ainoastaan ei-negatiivisia arvoja,

jolloin määrätyn integraalin pinta-alatulkinta on luonnollisimmin käytettävissä. Yleisemmät tapaukset palautuvat tähän, kun tulkitaan monotonisesti vähenevä g ‘väärrään suuntaan’ pyyhkäistynä välinä, x -akselin alapuolella oleva pinta-ala miinusmerkkinen, ja jaetaan tarkastelu muuttujan t sellaisiin osaväleihin, joilla funktiot $g'(t)$ ja $f(g(t))$ eivät vaihda merkkiään.

Jos tässä $D_t = \{\alpha = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = \beta\}$ on jokin välin $[\alpha, \beta]$ jako, niin sitä vastaa välin $[a, b]$ jako $D_x = \{a = x_0 = g(t_0), x_1 = g(t_1), x_2 = g(t_2), \dots, b = x_n = g(t_n)\}$. Koska g kuvaa välin $\Delta_{k,t} = [t_{k-1}, t_k]$ bijektiivisesti väliksi $\Delta_{k,x} = [x_{k-1}, x_k]$, saa funktio $f(g(t))$ välillä $\Delta_{k,t}$ samat arvot kuin funktio $f(x)$ välillä $\Delta_{k,x}$. Erityisesti näiden funktioiden supremumit ja infimumit vastinväleillä ovat samat. Lisäksi differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla kultakin jaon D_t osaväliltä löytyy sellainen luku $\tau_k \in \Delta_{k,t}$, että

$$\Delta_{k,x}x = x_k - x_{k-1} = g'(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) = g'(\tau_k)\Delta_{t,k}t,$$

eli vastinvälien pituudet (=pylväiden leveydet) saadaan toisistaan kertomalla ne luvuilla $g'(\tau_k)$ (vastaten differentiaalien välistä yhteyttä $dx = g'(t) dt$). Jos siis määritellään funktio $h(t)$ välillä $\Delta_{t,k}$ kaavalla $h(t) = f(g(t)) \cdot g'(\tau_k)$, niin meillä on ylä- ja alasummien väliset yhtälöt

$$S_{D_x}(f(x)) = S_{D_t}(h(t)) \quad \text{ja} \quad s_{D_x}(f(x)) = s_{D_t}(h(t)).$$

Koska funktion $g'(t)$ oletettiin olevan jatkuva, nähdään helposti, että jos tässä korvataan funktio $h(t)$ funktiolla $f(g(t))g'(t)$, niin tapahtuva virhe saadaan itseisarvoltaan halutun rajan $\varepsilon > 0$ alapuolella valitsemalla jako D_t tarpeeksi tiheäksi.

Differentiaalien avulla sama voidaan sanoa lyhyesti, että kumpikin esitetyistä määrätyistä integraaleista laskee käyrän $y = f(x)$ ja x -akselin välissä olevan suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaaman pinta-alan. Toinen laskee sen jakamalla kyseisen alan kapeisiin pylväisiin, joiden korkeus on $f(x)$ ja leveys dx , kun taas toinen laskee sen jakamalla alan kapeisiin pylväisiin, joiden korkeus on $f(g(t))$ ja leveys $g'(t) dt$.

Esimerkki 2.37. Lasketaan määrätty integraali

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

sijoitusta $x = \sin t$ käyttäen eri tavoilla.

Ratkaisu. Aikaisemmin laskimme Esimerkissä 1.14 sijoituksen $x = \sin t$ avulla, että funktiolla $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ on eräänä kantafunktiona

$$F(x) = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

Lauseen 2.27 nojalla saamme määrätyn integraalin arvoksi näin

$$\int_0^1 f(x) dx = \left|_0^1 F(x) = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} (\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Lauseen 2.36 hengessä ilman aiemman esimerkin tukea lasku etenisi hieman toisin. Nyt $x = g(t) = \sin t$, joten valinnoilla $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$ vaatimukset $a = 0 = \sin 0 = g(\alpha)$ ja $b = 1 = \sin(\pi/2) = g(\pi/2)$ toteutuvat. Kun $t \in [\alpha, \beta]$ on $f(g(t)) = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t$, $g'(t) dt = \cos t dt$, ja saamme

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \stackrel{\text{sij. } x \equiv \sin t}{=} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt.$$

Esimerkin 1.10 tuloksen perusteella tämä määrätty integraali on

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \left[\frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Vielä yksi tapa hyödyntää sijoitusta $x = \sin t$ on todeta, että Lauseen 2.36 ehdot toteutuvat myös valinnoilla $\alpha = \pi$, $\beta = \pi/2$. Erona edelliseen ratkaisuun on tällöin huomattava, että välillä $[\beta, \alpha]$ onkin $f(g(t)) = \sqrt{1 - \sin^2 t} = -\cos t$. Tällä kertaa saadaan siis

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx &\stackrel{\text{sij. } x \equiv \sin t}{=} \int_{\pi}^{\pi/2} (-\cos^2 t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} (t + \sin t \cos t) \right]_{\pi}^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \pi \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.38. Osoita, että kaikilla eksponentin $n \in \mathbf{N}$ arvoilla on voimassa

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

Siis Esimerkin 2.34 tulokset ovat voimassa myös kosinin potenssien määrätyleille integraaleille.

Ratkaisu. Käytetään sijoitusta $x = g(t) = \pi/2 - t$. Tällöin $\cos g(t) = \sin t$, $g'(t) = -1$, $g(\pi/2) = 0$, ja $g(0) = \pi/2$, joten $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx \stackrel{\text{sij. } x \equiv \pi/2 - t}{=} \int_{\pi/2}^0 (-1) \sin^n t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt.$$

Esimerkki 2.39. Laske määrätty integraali

$$I = \int_0^2 x^2 (4 - x^2)^{5/2} dx.$$

Ratkaisu. Käytetään sijoitusta $x = g(t) = 2 \sin t$, jolloin $g(0) = 0$, $g(\pi/2) = 2$, $\sqrt{4 - x^2} = 2 \cos t$ ja $dx = 2 \cos t dt$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} 2^8 \sin^2 t \cos^6 t dt && \sin^2 t = 1 - \cos^2 t \\ &= 256 \int_0^{\pi/2} (\cos^6 t - \cos^8 t) dt && \text{Esimerkki 2.38} \\ &= 256 \int_0^{\pi/2} (\sin^6 t - \sin^8 t) dt && \text{Esimerkki 2.34: } I_8 = (7/8)I_6 \\ &= 256 \left(1 - \frac{7}{8} \right) \int_0^{\pi/2} \sin^6 t dt && \text{Esimerkki 2.34} \\ &= 32 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi. \end{aligned}$$

Esimerkki 2.40.

$$\int_{-2}^2 \sqrt{x^2 + 4x + 8} dx.$$

Ratkaisu. Tässä $x^2 + 4x + 8 = (x + 2)^2 + 4 = (x + 2)^2 + 2^2$, joten mahdollisena sijoituksena tulee mieleen $x + 2 = 2 \sinh t$, sillä tällöin $dx = 2 \cosh t dt$ ja $\sqrt{(x + 2)^2 + 4} = \sqrt{4(\sinh^2 t + 1)} = 2 \cosh t$. Kun $x = -2$, niin $2 \sinh t = (-2) + 2 = 0$, joten integroimisvälin alarajaksi saadaan $t = \alpha = 0$. Kun $x = 2$, niin $2 \sinh t = 2 + 2$, mistä ylärajaksi saadaan $t = \beta = \operatorname{arsinh} 2 = \ln(2 + \sqrt{5})$. Täten

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \sqrt{x^2 + 4x + 8} dx &= \int_0^\beta 4 \cosh^2 t dt \\ &= \int_0^\beta 4 \cdot \frac{1}{4} (e^{2t} + 2 + e^{-2t}) dt \\ &= \left| \frac{e^{2t} + 4t - e^{-2t}}{2} \right|_0^\beta. \end{aligned}$$

Tässä $e^{2\beta} = (e^\beta)^2 = (2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ ja $e^{-2\beta} = 9 - 4\sqrt{5}$, joten

$$\int_{-2}^2 \sqrt{x^2 + 4x + 8} dx = 4\sqrt{5} + 2\beta = 4\sqrt{5} + 2\ln(2 + \sqrt{5}).$$

Tarkastellaan seuraavaksi integroitavaan funktioon liittyvien symmetrioiden käyttöä määrättyjen integraalien laskemisessa. Palautetaan mieleen, että koko reaalisuoralla määriteltä funktiota f sanotaan parilliseksi, jos $f(-x) = f(x)$ kaikilla muuttujan x arvoilla. Vastaavasti sanotaan, että funktio f on pariton, jos $f(-x) = -f(x)$ kaikilla muuttujan x arvoilla. Useimmat funktiot eivät ole parillisia eivätkä parittomia. Tosin jokainen funktio voidaan esittää parillisen ja parittoman funktion summana seuraavasti:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

missä selvästi ensimmäinen yhteenlaskettava on parillinen ja jälkimmäinen pariton. Kahden parillisen funktion tulo on niin ikään parillinen, samoin kahden parittoman funktion. Parillisen ja parittoman funktion tulo sen sijaan on pariton, sillä jos $f(-x) = -f(x)$ ja $g(-x) = g(x)$, niin $(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -(fg)(x)$. Näitä merkkisääntöjä yleistäen nähdään heti, että parittoman funktion f potenssi f^n on parillinen tai pariton sen mukaan, onko eksponentti $n \in \mathbf{N}$ parillinen vai pariton.

Jos integrandi on parillinen tai pariton, ja integroimisväli on symmetrinen origon suhteen, eli muotoa $[-a, a]$, niin integroimista voidaan tällöin yksinkertaistaa seuraavasti.

Lause 2.41. Oletetaan, että funktio f on integroitava välillä $[-a, a]$, $a > 0$. Jos f on parillinen, niin

$$\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f.$$

Jos taas f on pariton, niin

$$\int_{-a}^a f = 0.$$

Todistus. Verrataan integraaleja yli osavälien $[-a, 0]$ ja $[0, a]$. Tekemällä sijoitus $t = -x$ saadaan

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 (-1)f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt.$$

Näin ollen

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a (f(x) + f(-x)) dx.$$

Väite seuraa tästä, sillä viimeisessä muodossa integrandina on $2f(x)$ tai 0 riippuen siitä, oliko kyseessä parillinen vai pariton tapaus. $\square$

Esimerkki 2.42.

$$\int_{-1}^1 (x^4 + x^3 + 7x + 1) dx = 2 \int_0^1 (x^4 + 1) dx = 2 \left| \frac{x^5}{5} + x \right|_0^1 = 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5},$$

sillä funktio $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ on pariton, kun n on pariton, ja parillinen, kun n on parillinen.

Esimerkki 2.43.

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x dx = 0,$$

sillä integrandi on selvästi pariton.

Esimerkki 2.44. Kaikilla luonnollisen luvun $k \in \mathbf{N}$ arvoilla

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2k+1} x dx = 0 \quad \text{ja} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2k} x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x dx.$$

Toinen integrandin symmetriaominaisuus, joka usein helpottaa integraalien laskemista on sen jaksollisuus. Sanotaan, että reaalifunktiolla f on jakso ω , tai että se on ω -jaksollinen, jos kaikilla muuttujan $x \in \mathbf{R}$ arvoilla

$$f(x) = f(x + \omega).$$

Nähdään helposti induktiolla muuttujan $|k|$ suhteen, että aina, kun $k \in \mathbf{Z}$, ja f on ω -jaksollinen, on voimassa $f(x + k\omega) = f(x)$.

Lause 2.45. Jos f on ω -jaksollinen integroituva funktio, niin $\forall k \in \mathbf{Z}$ ja kaikille $a, b \in \mathbf{R}$ on voimassa

$$\int_a^b f = \int_{a+k\omega}^{b+k\omega} f.$$

Todistus. Sijoitus $x = t - k\omega$ muuttaa vasemmanpuoleisen integraalin oikeanpuoleiseksi. $\square$

Trigonometriset funktiot ovat tietenkin tutuin esimerkki jaksollisista funktioista. Sinillä ja kosinilla on jakso 2π , ja niiden parillisilla potensseilla on jaksona π . Yleisemmin funktioilla $\sin ax$ ja $\cos ax$ on jaksona $2\pi/a$. Tässä $a > 0$ on jokin vakio.

Esimerkki 2.46.

$$\int_{3\pi/2}^{5\pi/2} \sin^3 x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x dx = 0,$$

missä viimeinen yhtälö seuraa integroimisvälin symmetrisyydestä ja integrandin parittomuudesta.

Seuraavassa esimerkissä tavallaan kombinoidaan parittomuus ja jaksollisuusargumentit.

Esimerkki 2.47. Jos $n = 2k + 1$ on pariton, niin osoita, että

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x \, dx = 0.$$

Ratkaisu. Sini- ja kosinifunktio molemmat toteuttavat yhtälön $f(x + \pi) = -f(x)$, ja näin ollen sama relaatio on voimassa myös silloin, kun funktiona f on jommankumman pariton potenssi. Tämän relaation toteuttavan funktion integraali jakson yli häviää, sillä

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx &= \int_0^{\pi} f(x) \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \, dx && \text{sijoitetaan jälkimmäiseen } x = t + \pi, \, dx = dt \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \, dx + \int_0^{\pi} f(t + \pi) \, dt && \text{vaihdetaan muuttuja takaisin } x\text{:ksi} \\ &= \int_0^{\pi} f(x) \, dx + \int_0^{\pi} f(x + \pi) \, dx \\ &= \int_0^{\pi} (f(x) + f(x + \pi)) \, dx = 0, \end{aligned}$$

koska viimeisen integraalin integrandi häviää koko integroimisvälillä relaation $f(x + \pi) = -f(x)$ seurauksena.

Sinin ja kosinin parillisen potenssin tapauksessa voidaan puolestaan todeta, että väli $[0, \pi/2]$ on jo ‘edustava’ siinä mielessä että integraalit yli välin, jonka pituus on luvun $\pi/2$ kokonaislukumonikerta palautuvat tunnettuihin Esimerkkien 2.34 ja 2.38 tuloksiin.

Esimerkki 2.48. Olkoon $f(x)$ joko $\sin^{2k} x$ tai $\cos^{2k} x$, $k \in \mathbf{N}$. Selitä, miksi tällöin

$$\int_0^{\pi} f = 2 \int_0^{\pi/2} f \quad \text{ja} \quad \int_0^{2\pi} f = 4 \int_0^{\pi/2} f.$$

Ratkaisu. Koska funktiolla f on jaksona π , niin $\int_{\pi/2}^{\pi} f = \int_{-\pi/2}^0 f$. Näin ollen ensimmäinen yhtälö seuraa siitä, että kyseinen funktio on parillinen.

Jälkimmäinen yhtälö seuraa ensimmäisestä ja π -jaksollisuudesta, sillä $\int_{\pi}^{2\pi} f = \int_0^{\pi} f$.

Esimerkki 2.49. Laske määrätty integraali

$$\int_0^{2\pi} (1 + \cos x)^4 \, dx.$$

Ratkaisu. Binomikaavan ja kahden edellisen esimerkin ja Esimerkin 2.34 nojalla

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (1 + \cos x)^4 \, dx &= \int_0^{2\pi} (1 + 4 \cos x + 6 \cos^2 x + 4 \cos^3 x + \cos^4 x) \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + 6 \cos^2 x + \cos^4 x) \, dx \\ &= 4 \left(\int_0^{\pi/2} (1 + 6 \cos^2 x + \cos^4 x) \, dx \right) \\ &= 4 \left(\frac{\pi}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = 35\pi/4. \end{aligned}$$

Luku 3

Määrätyn integraalin sovelluksia ja laajennuksia

Tässä luvussa esitellään useita määrätyn integraalin geometrisia sovelluksia. Ne perustellaan osin geometriseen havaintoon vedoten. Perusteluilla on runsaasti yhteisiä piirteitä. Tarkasteltavalle suurelle annetaan ensin karkea likiarvo, joka perustuu sen jakamiseen äärellisen moneksi sellaiseksi palaksi, että kukin palanen voidaan arvioida erikseen, jolloin palat yhteenlaskemalla saatava summa on kohtuullisen hyvä arvio etsittäville suurelle. Jako paloihin vastaa integroimisvälin jakoa D osaväleihin. Yksittäiselle palaselle tehty arvio tulee aina olemaan sellainen, että niiden summa S toteuttaa epäyhtälöt $s_D(f) \leq S \leq S_D(f)$ erälle sopivalle funktiolle f . Oletamme (mutta emme kaikissa tapauksissa sitovasti todista), että jaon tihentäminen parantaa approksimaatiota, jolloin raja-arvona saatava määrätty integraali onkin tarkka tulos. Todistusten puuttuminen johtuu osin siitä, ettei ole lainkaan selvää, mitä esimerkiksi tasokäyrältä tulee vaatia, jotta sille voitaisiin määritellä pituus. Sama koskee myös tasoalueen pinta-alaa.

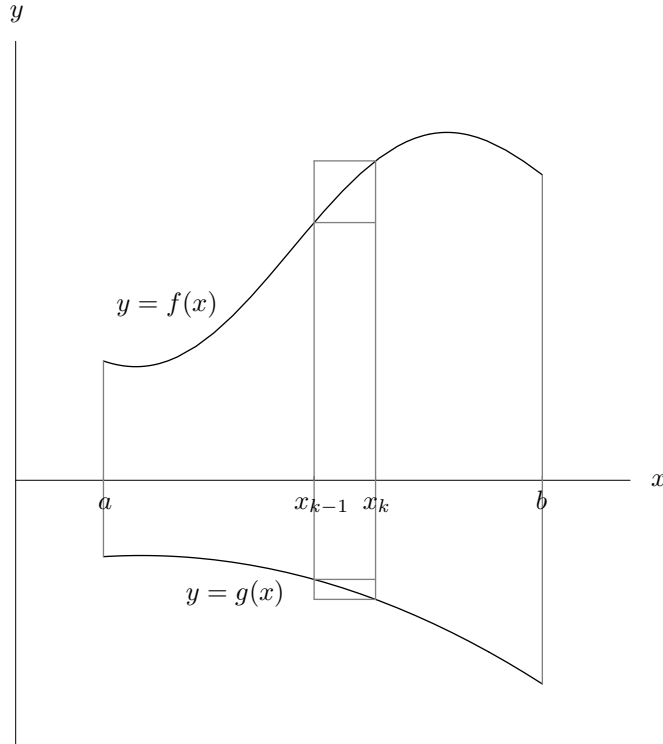
3.1 Tasoalueen pinta-ala

Koska funktion kuvaajan rajaaman alueen pinta-ala on Riemann-integraalia tutkittaessa mielessämme ollut geometrinen malli, määrätyn integraalin käytön oikeutus tässä yhteydessä on helppo uskoa. Tässä kappaleessa tarkastelemme tutun perustapauksen lisäksi, miten pinta-ala tulkitaan määrättyä integraalina niissä tapauksissa, kun sitä rajaava tasokäyrä annetaankin parametrimuodossa tai napakoordinaateissa. Ensin kuitenkin perustapaus.

Lause 3.1. *Olkoot f ja g välillä $I = [a, b]$, $a < b$ määriteltyjä, rajoitettuja ja integroituvia funktioita. Oletetaan, että kaikille $x \in I$ on voimassa $f(x) \geq g(x)$. Tällöin kuvaajien $y = f(x)$, $y = g(x)$ sekä suorien $x = a$ ja $x = b$ rajaaman alueen $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in I, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ pinta-ala $A = A(S)$ on*

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Todistus. Olkoon $D = \{a = x_0, x_1, \dots, b = x_n\}$ jokin välin I jako. Tarkastellaan tilannetta osavälillä $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$. Olkoot $m(f)_k$ ja $m(g)_k$ funktioiden f ja $-g$ infimumit tällä välillä. Kuvan 3.1 tilanteessa nämä



Kuva 3.1: Kahden funktion kuvaajan rajaama alue

infimumit saavutetaan molemmat samassa pisteessä ($= x_{k-1}$), mutta näin ei yleisesti tarvitse olla. Tällöin kyseisellä välillä on pylväs, jonka yläreuna on suoralla $y = m(f)_k$, alareuna suoralla $y = -m(g)_k$, korkeus siten $m(f)_k + m(g)_k$, ja joka jää kokonaan kuvaajien väliin. Vastaavasti, jos $M(f)_k$ ja $M(g)_k$ funktioiden f ja $-g$ supremumit tällä välillä, niin kuvaajat ovat jäävät välillä Δ_k välille $[-M(g)_k, M(f)_k]$. Laskemalla yhteen eri osavälien osuudet saadaan epäyhtälöt

$$\sum_k (m(f)_k + m(g)_k) \Delta_k \leq A \leq \sum_k (M(f)_k + M(g)_k) \Delta_k.$$

Tässä alaraja on kahden alasumman summa $= s_D(f) + s_D(-g)$, ja yläraja vastaavasti $= S_D(f) + S_D(-g)$. Koska oletimme, että f ja $-g$ ovat integroituvia, niin ylä- ja alasumat molemmat lähestyvät yhteistä raja-arvoa

$$A = \int_a^b f + \int_a^b (-g) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

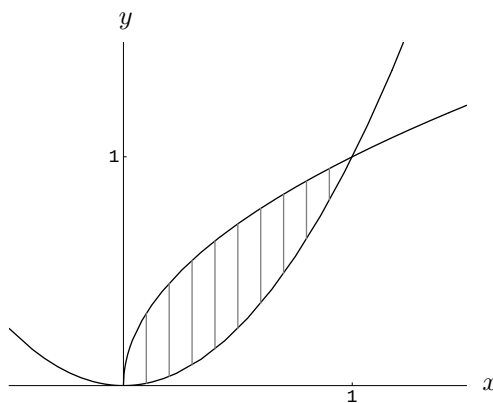
jaon D tihentyessä. □

Esimerkki 3.2. Lasketaan yksikköympyrän $x^2 + y^2 = 1$ sisään jäävän alueen (=yksikköympyrä) pinta-ala.

Ratkaisu. Kyseinen alue on välillä $x \in [-1, 1]$ funktioiden $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ja $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$ välissä. Näin ollen etsitty ala on

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) \, dx = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} \, dx && \text{integrandi parillinen} \\ &= 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx && \text{Esimerkki 2.37} \\ &= 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.3. Lasketaan käyrien $y = f(x) = x^2$ ja $y = g(x) = \sqrt{x}$ rajaaman (rajoitetun) alueen pinta-ala.



Kuva 3.2: Funktioiden $f(x) = x^2$ ja $g(x) = \sqrt{x}$ kuvaajien rajaama alue

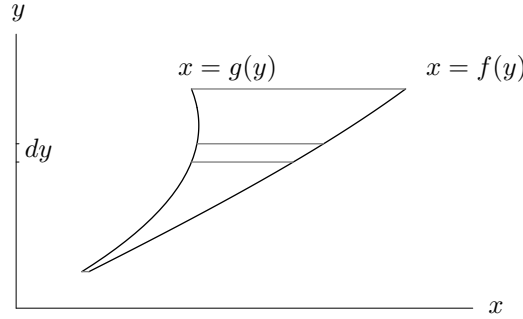
Ratkaisu. Kuvaajat leikkaavat pisteissä, joiden x -koordinaatit toteuttavat yhtälön $x^2 = \sqrt{x}$. Neliöimällä puolittain saadaan $0 = x^4 - x = x(x^3 - 1)$, mistä (reaalisen) kuutiojuuren yksikäsitteisyyden nojalla ratkaisuiksi tulee $x = 0$ ja $x = 1$. Välillä $x \in [0, 1]$ on $f(x) \leq g(x)$. Tutkittava alue on siis (vrt. Kuva 3.2)

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Tämän pinta-ala A saadaan integraalista

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx = \left| \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Joskus on mukavampaa käyttääkin muuttujana y -koordinaattia. Kun ‘normaalisti’ ajatellaan alueen muodostuvan monesta kapeasta ‘pylvästä’, joiden leveydet ovat dx ja korkeudet $f(x) - g(x)$, voidaankin yhtä hyvin ajatella alueen muodostuvan monesta vaakaraidasta, joiden leveydet ovat $f(y) - g(y)$ ja korkeudet dy .



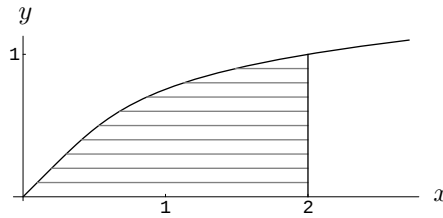
Kuva 3.3: Käyrien $x = f(y)$, $x = g(y)$ väliin jäävä alue muodostuu raidoista

Tilanne on silloin Kuvan 3.3 mukainen. Tekemällä aiemmasta päättelystä sellainen versio, missä muuttujien x ja y roolit ovat vaihtuneet, nähdään, että pinta-ala saadaan määrätystä integraalista

$$A = \int_{y=a}^b (f(y) - g(y)) dy.$$

Esimerkki 3.4. Funktio $P(y) = y^5 + y$ on kaikkialla jatkuva. Sen derivaatta $P'(y) = 5y^4 + 1 > 0$ kaikilla $y \in \mathbf{R}$, joten se on myös aidosti kasvava. Lisäksi se saa raja-arvoikseen $\pm\infty$, kun $y \rightarrow \pm\infty$. Näin ollen kutakin reaaliluvun x arvoa kohti löytyy yksikäsitteinen sellainen luku $y = f(x)$, että $P(f(x)) = x$. Laske määrätty integraali

$$I = \int_0^2 f(x) dx.$$



Kuva 3.4: Käyrän $x = y^5 + y$ rajaama alue

Ratkaisu. Selvästi $P(y)$ ja $f(x)$ ovat toistensa käänteisfunktioita. Koska $P(0) = 0$ ja $P(1) = 2$, niin $f(0) = 0$ ja $f(2) = 1$. Edelleen $y = f(x) \Leftrightarrow x = P(y) = y^5 + y$, joten tutkittava määrätty integraali on Kuvan 3.4 raidoitettun alueen pinta-ala. Vaihtamalla katselukulma y -suuntaiseksi näemme, että kyseinen alue on funktioiden $Q(y) = 2$ ja $P(y) = y^5 + y$ kuvaajien välillä $y \in [0, 1]$ rajaama alue. Sen pinta-ala on siis

$$I = \int_{y=0}^1 (Q(y) - P(y)) dy = \int_0^1 (2 - y - y^5) dy = \left| 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^6}{6} \right|_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}.$$

Tarkistuksena voidaan todeta, että kyseinen alue sisältyy suorakaiteeseen $[0, 2] \times [0, 1]$, jonka pinta-ala on 2. Lisäksi $P''(y) \geq 0$ välillä $y \in [0, 1]$, joten kuperaussuuntaa miettimällä nähdään, että kolmio, jonka kärkinä ovat pisteet $(0, 0)$, $(2, 0)$ ja $(2, 1)$ sisältyy mitattavaan alueeseen (ilmeistä myös kuvasta), joten sen ala on > 1 .

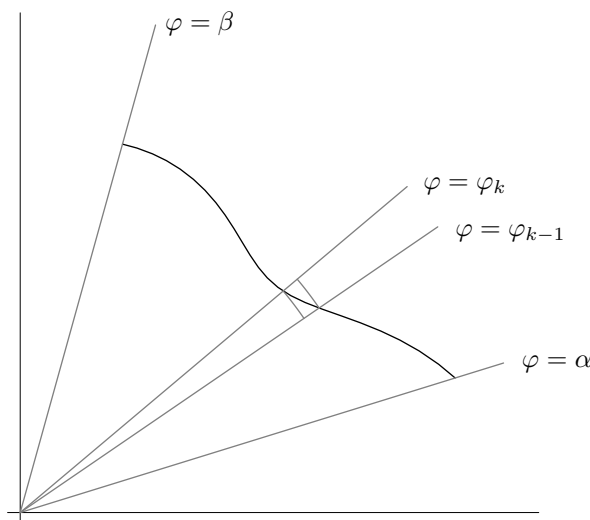
Käytettäessä napakoordinaatteja on helppoa kuvata alueita, jotka ovat hieman erilaista muotoa kuin xy -koordinaatteja käytettäessä. Oletetaan, että meillä on funktio $r = r(\varphi)$, joka saa ei-negatiivisia arvoja kulmamuuttujan φ vaihdellessa välillä $I = [\alpha, \beta]$. Tällöin ne pisteet, joiden suuntakulma φ on välillä I ja etäisyys origosta välillä $[0, r(\varphi)]$ muodostavat säteittäin rakentuvan alueen. Tällainen alue ei luontevasti kuvaudu pystypylväiden eikä vaakaraitojen avulla vaan muodostuu pikemminkin kapeista vaihtelevasäteisistä ympyräsektoreista. Jos r -säteisestä ympyrästä leikataan sektori, jonka keskuskulma on γ , niin tällaisen sektorin pinta-ala on osa $\gamma/(2\pi)$ koko ympyrän alasta eli $= \gamma r^2/2$. Siirtyminen raja-arvotilanteeseen johtaa silloin seuraavan lauseen määrättyyn integraaliin.

Lause 3.5. Oletetaan, että $I = [\alpha, \beta]$ ja $r : I \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ on sellainen funktio, että r^2 on integroituva välillä $[\alpha, \beta]$. Olkoon S tason osajoukko

$$S = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbf{R}^2 \mid \varphi \in I, 0 \leq r \leq r(\varphi)\}.$$

Tällöin joukon S pinta-ala A on

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2 d\varphi.$$



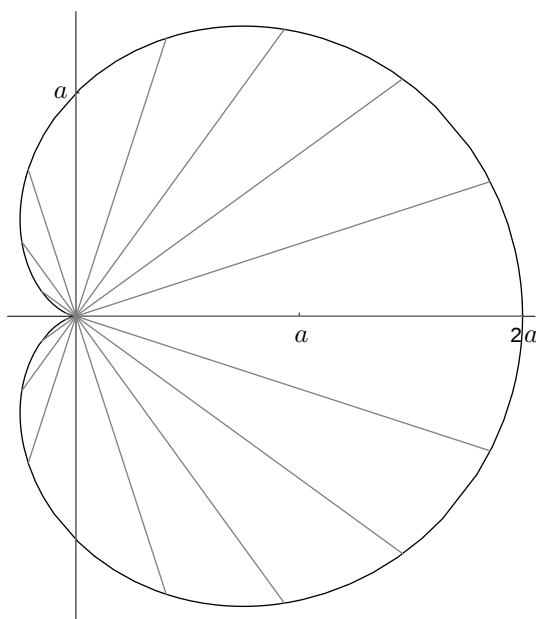
Kuva 3.5: Napakoordinaateissa määritelty alue S

Todistus. Olkoon $D = \{\alpha = \varphi_0, \varphi_1, \dots, \beta = \varphi_n\}$ jokin välin I jako. Olkoon m_k funktion arvojen $r(\varphi)$ infimum välillä $\varphi \in \Delta_k = [\varphi_{k-1}, \varphi_k]$, ja vastaavasti olkoon M_k sen arvojen supremum tällä välillä. Tällöin (vrt. Kuva 3.5) näemme, että m_k -säteisen ympyrän sektori kulmavälillä Δ_k sisältyy kokonaan joukkoon S . Tämän sektorin pinta-ala on $m_k^2(\varphi_k - \varphi_{k-1})/2$. Vastaavasti M_k -säteisen ympyrän sektorissa ovat kaikki joukon S ne pisteet, joiden suuntakulma on välillä Δ_k . Olkoon $f = r^2/2$. Laskemalla sektorien osuudet yhteen saadaan epäyhtälöt

$$s_D(f) \leq A \leq S_D(f).$$

Oletuksemme mukaan tässä ylä- ja alasummat ovat mielivaltaisen lähellä väitettyä integraalia, kunhan jako D valitaan tarpeeksi tiheäksi. Väite seuraa. $\square$

Esimerkki 3.6. Olkoon $a > 0$ vakio. Napakoordinaattiyhtälö $r = a(1 + \cos \varphi)$ määrittää sulkeutuvan käyrän, ns. *kardioidin*, kun φ käy läpi välin $I = [-\pi, \pi]$. Laske sen sisään jäävän alueen ala.



Kuva 3.6: Kardioidin sisäosa sektoreihin jaettuna

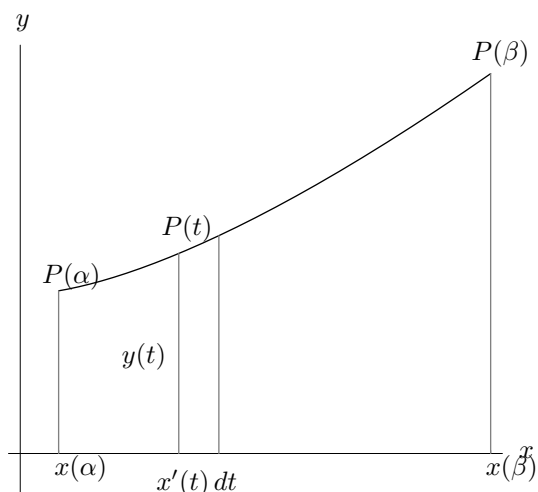
Ratkaisu. Tässä säde r saa arvon nolla välin I päätepisteissä ja on välillä $(-\pi, \pi)$ positiivinen. Selvästi se saa suurimman arvonsa $r = 2a$, kun $\varphi = 0$. Kuvassa 3.6 esitetään kardioidikäyrä sekä sen sisäosa jaettuna 20 sektoriin (tasavälinen jako, joten jokaisessa neljänneksessä on 5 osaväliä). Pinta-alaksi saadaan

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{a^2}{2} (2\pi + 0 + \pi) = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Jos mitattavan alueen reunakäyrä on annettu parametrimuodossa $P = P(t) = (x = x(t), y = y(t))$, missä parametri t käy läpi jonkin välin $I = [\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$ luvut, meillä on kolme tapaa edetä. Jotta ne toimisivat, meidän on oletettava, että väli I voidaan jakaa sellaisiin osaväleihin, että kullakin niistä derivaatat $x'(t) = dx/dt$ ja $y'(t) = dy/dt$ ovat olemassa ja jatkuvia. Käytännössä tämä rajoitus ei juuri haittaa.

Katsotaan ensin, miten parametriesitystä käytetään silloin, kun tutkittava alue jää käyrän ja x -akselin väliin. Tällöin se jaetaan pystysuoriin pylväisiin. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi (yleinen tapaus palautuu tähän esimerkeissä nähtävällä tavalla), että funktio $x(t)$ on monotoninen välillä I . Tällöin funktio $x(t)$ on myös bijektio, ja tilanne vastaa yksinkertaisesti sitä, että teemme integraaliin $\int_a^b y(x) dx$ sijoituksen $x = x(t)$.

On huomattava, että pinta-ala voi tällöin tulla väärään merkkisenä. Tavalliseen tapaan alan merkki vaihtuu, jos tarkasteluvälillä alue onkin x -akselin alapuolella. Lisäksi merkki tulee väärin, jos tarkasteluvälillä funktio $x(t)$ onkin vähenevä, koska tällöin sijoitus $x = x(t)$ tuottaa rajat väärinpäin, kun seuraavan tuloksen mukaisesti integroimme α :sta β :aan. Nämä tulee tutkia erikseen tapauskohtaisesti.



Kuva 3.7: Parametrimuodossa annetun käyrän muodostama ‘pylväikkö’

Kuvassa 3.7 perustilanteen mukaisesti alue muodostuu x -akselin yläpuolelle, ja funktio $x(t)$ on kasvava välillä I . Pylvään kanta on tällöin $dx = x'(t) dt$ ja korkeus $y(t)$, joten sen ala on $x'(t)y(t) dt$. Tyydymme tälle kertaa tähän hieman epätarkkaan perusteluun ja toteamme, että käyrän välillä I , x -akselin sekä suorien $x = x(\alpha)$ ja $x = x(\beta)$ rajaaman alueen pinta-ala on (merkkiä vaille)

$$A = \pm \int_{t=\alpha}^{\beta} x'(t)y(t) dt.$$

Tärkeä erikoistapaus on ns. *sulkeutuva yksinkertainen käyrä*, jolle $P(\alpha) = P(\beta)$, mutta joka ei muutoin leikkaa itseään. Tällöin funktion $x(t)$ kasvusuunnan aiheuttamat merkinvaihtelut osaväleillä menevät aina ‘oikein’. Perustelu tälle kuuluu kurssille *Usean Muuttujan Funktiot*. Seuraava esimerkki valottaa tätä hieman.

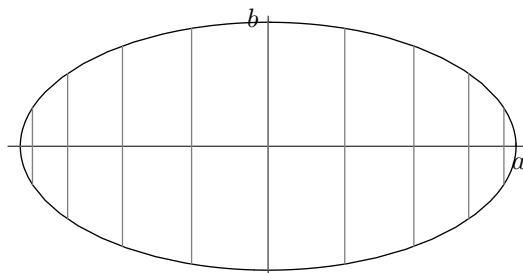
Esimerkki 3.7. Olkoot a ja b positiivisia vakioita. Ellipsillä

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

on parametrisointi $x = x(t) = a \cos t$, $y = y(t) = b \sin t$, missä parametri t käy läpi välin $[0, 2\pi]$. Laske tämän käyrän sisään jäävän ellipsin pinta-ala.

Ratkaisu. Nyt $P(0) = P(2\pi)$ ja $x'(t) = -a \sin t$. Ellipsin x -akselin yläpuoleinen osa piirtyy, kun $t \in [0, \pi]$. Koska tällä välillä $x(t)$ on vähenevä funktio, integraali

$$\int_0^{\pi} x'(t)y(t) dt = \int_0^{\pi} (-ab \sin^2 t) dt$$



Kuva 3.8: Ellipsi

laskee tämän ylemmän puolikkaan alan miinusmerkkisenä.

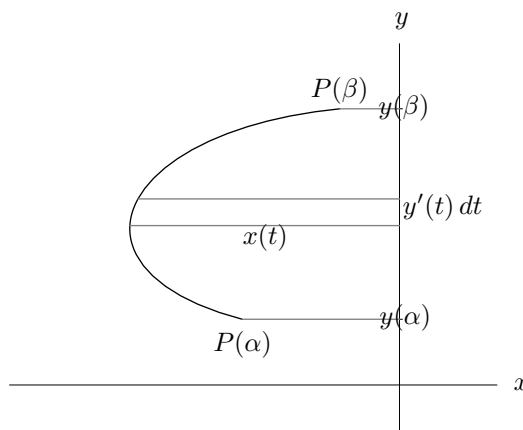
Välillä $t \in [\pi, 2\pi]$ puolestaan piirtyy ellipsin x -akselin alapuoleinen osa. Koska tällä välillä funktio $x(t)$ on kasvava (mutta käyrä siis miinusmerkkisellä puolella x -akselia) laskee integraali

$$\int_{\pi}^{2\pi} x'(t)y(t) dt = \int_{\pi}^{2\pi} (-ab \sin^2 t) dt$$

puolestaan alemman puolikkaan alan miinusmerkkisenä. Yhdistämällä nämä kaksi integraalia saadaan siten koko ellipsin ala miinusmerkkisenä, joten

$$A = - \int_0^{2\pi} x'(t)y(t) dt = \int_0^{2\pi} ab \sin^2 t dt = \pi ab.$$

Kuvassa 3.8 on sekä ylä- että alapuoli esitetty 10 ‘pylvään’ avulla. Käytetty jako on tasavälinen muuttujan t suhteen, mutta ei tietenkään x -koordinaatin suhteen.



Kuva 3.9: Parametrimuodossa annetun käyrän rajaaman alueen ‘vaakaraidoitus’

Kun lasketaan parametrimuodossa annetun käyrän $P(t) = (x(t), y(t)), t \in I = [\alpha, \beta]$ ja y -akselin väliin jäävän alueen pinta-alaa, niin välin I jako tuottaa vaakasuoria raitoja, joiden korkeus on $dy = y'(t) dt$ ja leveys $x(t)$ (mahdollisesti vääränmerkkisenä). Tällä kertaa syntyvän alueen pinta-alan A antaa siis integraali

$$A = \pm \int_{t=\alpha}^{\beta} y'(t)x(t) dt.$$

Kuten x -suuntaankin integroitaessa etumerkkiin vaikuttaa kaksi seikkaa: se onko syntyvä alue y -akselin oikealla puolella, ja se onko funktio $y(t)$ tarkasteluvälillä kasvava vai vähenevä. Kuvan 3.9 tilanteessa pinta-ala tulee miinusmerkkisenä, koska $y(t)$ on kasvava, mutta alue syntyy y -akselin negatiiviselle puolelle. Kuten edellisessäkin tapauksessa, jos $y'(t)$ vaihtaa merkkiään välillä I , niin lopuksi tästä aiheutuva vaihtelu johtaa järkevään lopputulokseen.

Esimerkki 3.8. Syklodi on käyrä, jonka R -säteisen ympyrän kehän kiinteä piste piirtää ympyrän vieressä pitkin x -akselia. Sillä on parametrisointi (Analyysi I)

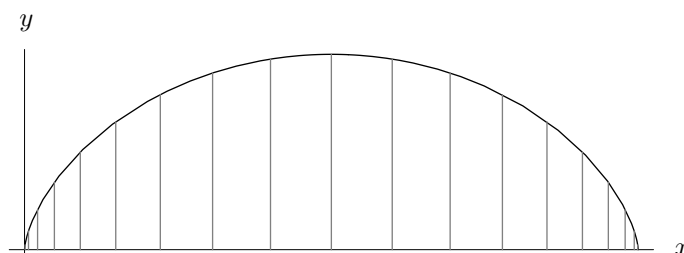
$$\begin{cases} x(t) &= R(t - \sin t), \\ y(t) &= R(1 - \cos t). \end{cases}$$

Välillä $t \in I = [0, 2\pi]$ syklodi koskettaa x -akselia vain päätepisteissä, kun $t = 0$ tai $t = 2\pi$, ja muuten $y(t) > 0$, joten tällä välillä piirtyvä syklodin kaari rajaa yhdessä x -akselin kanssa erään alueen. Laske sen pinta-ala sekä x -suuntaan että y -suuntaan etenevänä integraalina.

Ratkaisu. Koska $x'(t) = R(1 - \cos t) \geq 0$ koko välillä, ja syntyvä alue on x -akselin yläpuolella, niin etsitty ala A saadaan plusmerkkisenä integraalista

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} y(t)x'(t) dt = R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t) dt \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt \\ &= R^2 \left(2\pi - 0 + 4 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 3\pi R^2. \end{aligned}$$

Kuvassa 3.10 on esitetty tämä alue jaettuna 20 pylvääseen. Jako on tasavälinen muuttujan t eli vierivän ympyrän kääntymiskulman suhteen.

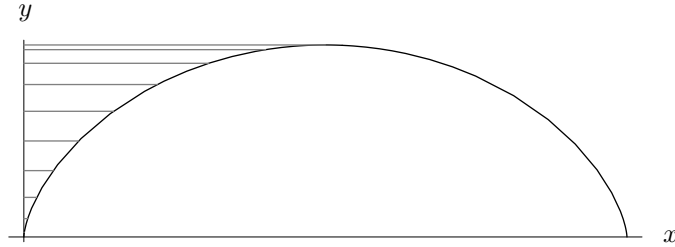


Kuva 3.10: Syklodin kaaren alapuolelle jäävä alue A

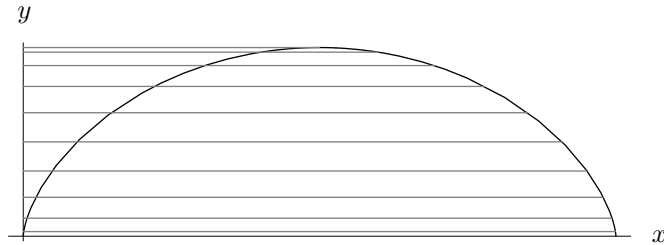
Kun integroidaan y -suuntaan, tilanne on hieman mutkikkaampi, koska funktio $y(t)$ on kasvava osavälillä $t \in [0, \pi]$, mutta vähenevä osavälillä $t \in [\pi, 2\pi]$. Niinpä integraali

$$\int_0^\pi x(t)y'(t) dt$$

laskee Kuvan 3.11 vaakaraidoitettun alueen alan A_1 plusmerkkisenä. Tämä aluehan ei meitä varsinaisesti kiinnostanut, mutta jatkossa sen tietäminen auttaa! Nimittäin integraali



Kuva 3.11: Sykloidin nousevan kaaren vasemmalle puolelle jäävä alue A_1



Kuva 3.12: Sykloidin laskevan kaaren vasemmalle puolelle jäävä alue A_2

$$\int_{\pi}^{2\pi} x(t)y'(t) dt$$

laskee Kuvan 3.12 vaakaraidotetun alueen alan A_2 miinusmerkkisenä (alue y -akselin oikealla puolella, mutta $y' \leq 0$). Sykloidin kaaren alle jäävä ala on tällöin $A_2 - A_1$, ja se saadaan (miinusmerkkisenä) integroimalla koko välin yli

$$\begin{aligned} A = A_2 - A_1 &= - \int_0^{2\pi} x(t)y'(t) dt = -R^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin t dt \\ &= -R^2 \left[\int_0^{2\pi} t \sin t dt - \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt \right] \\ &= -R^2 \left[\left[-t \cos t + \sin t \right]_0^{2\pi} - \pi \right] \\ &= -R^2 [-2\pi - 0 - \pi] = 3\pi R^2. \end{aligned}$$

Tarkistuksena toteamme, että sykloidin kaaren päätepisteinä ovat origo sekä piste $(2\pi R, 0)$. Koska kaaren keskikohta on korkeudella $2R$, jää sykloidi sellaisen suorakaiteen sisään, jonka ala on $(2R) \cdot (2\pi R) = 4\pi R^2$. Sykloidin kaaren alapuolinen osa on tästä kolme neljäsosaa, mikä sopii hyvin yhteen kuvista saamamme mielikuvan kanssa.

Parametrimuodossa annetun käyrän rajaaman alueen pinta-ala voidaan laskea myös pienten säteittäisten sektorien alojen summana samaan tyyliin kuin napakoordinaatteja käytettäessä. Tätä varten on esitettävä vaihekulma φ parametrin t funktiona $\varphi(t)$. Lähtökohtana on yhtälö $\tan \varphi(t) = y(t)/x(t)$, jolla on ratkaisuihin välillä $[-\pi/2, 3\pi/2]$ kaksi vaihtoehtoa: $\varphi(t) = \arctan(y(t)/x(t))$ ja $\varphi(t) = \pi + \arctan(y(t)/x(t))$. Kummassakin

tapauksessa saamme osamäärän derivointikaavan ja ketjusäännön avulla

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{d}{dt} \arctan \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{d}{dt} \frac{y(t)}{x(t)} \\ &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x(t)^2} \\ &= \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

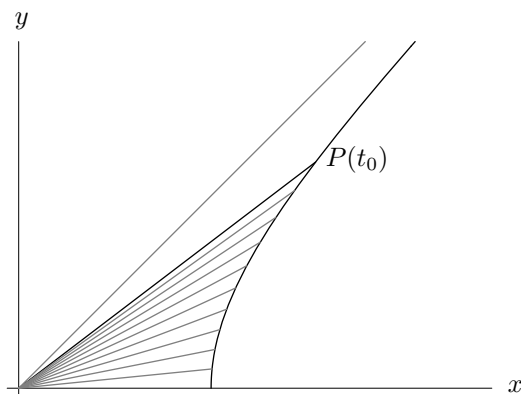
Koska käyrän jokaisessa pisteessä on $r^2 = x(t)^2 + y(t)^2$ ja $d\varphi = \varphi'(t) dt$, tulee pienen sektorin pinta-alaksi

$$\frac{1}{2} r(\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt.$$

Kun parametri t käy läpi välin $I = [\alpha, \beta]$, käyrän ‘säteittäisesti’ pyyhkimän alueen pinta-ala saadaan siten integraalista

$$\frac{1}{2} \int_{t=\alpha}^{\beta} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt.$$

Tässäkin on mahdollisuus väärrään merkkiin, sillä voi olla, että funktio $\varphi'(t) < 0$, jolloin pienten sektorien aloista tulee miinusmerkkisiä. Edelleen on mahdollista, että $\varphi'(t)$ vaihtaa merkkiään välillä I . Tässä jälkimmäisessä tapauksessa käy, kuten aikaisemmissakin esimerkeissä, että lopputulokseen nämä erimerkkiset osavälien osuudet tulevat oikein yhteenlasketuiksi (mahdollisesti lopputuloksen etumerkkiä vaille)!



Kuva 3.13: Hyperbeli $x^2 - y^2 = 1$, sen asymptoottisuora $x = y$, ja pisteen $P(t_0)$ määräämä viuhkamainen alue

Esimerkki 3.9. Hyperbelillä $x^2 - y^2 = 1$ on parametrisointi $P(t) = (x(t), y(t)) = (\cosh t, \sinh t)$. Kun $t = t_0 > 0$, on piste $P(t_0)$ ensimmäisessä neljänneksessä. Laske hyperbelin kaaren välillä $t \in [0, t_0]$ säteittäisesti raajaman viuhkamaisen alueen (Kuva 3.13) pinta-ala.

Ratkaisu. Nyt $x(t) = \cosh t$, $x'(t) = \sinh t$, $y(t) = \sinh t$ ja $y'(t) = \cosh t$, joten

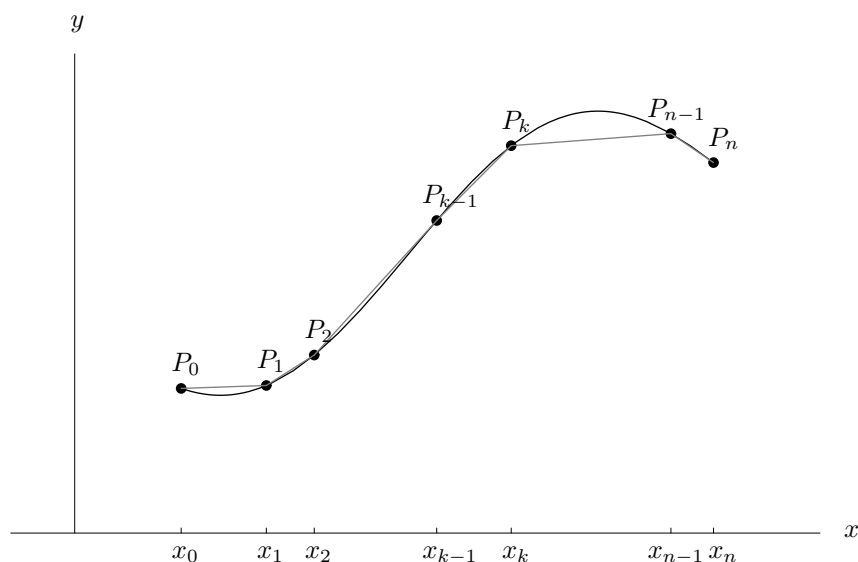
$$x(t)y'(t) - x'(t)y(t) = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Koska kuvasta päätellen suuntakulma $\varphi(t)$ kasvaa tarkasteluvälillä, tulee kysytyksi pinta-alaksi

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} 1 dt = \frac{t_0}{2}.$$

3.2 Tasokäyrän pituus

Jotta voisimme soveltaa teoriaamme tasokäyrän $y = f(x)$, $x \in I = [a, b]$ pituuden määrittämiseen teemme tällä kurssilla yksinkertaistavan oletuksen, että funktio f on derivoituva välillä I , ja että lisäksi derivaatta $f'(x)$ (päätepisteissä tarvittaessa toispuoleinen) on tällä välillä jatkuva (ja erityisesti se on siis tällä välillä rajoitettu). Yleisempi tapaus sekä tarkemmat perustelut esitetään myöhemmillä kursseilla. Olkoon sitten $D = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ jokin välin I jako, ja määritellään $P_i = (x_i, f(x_i))$, $0 \leq i \leq n$.



Kuva 3.14: Erästä jakoa vastaava murtoviiva (harmaa)

Tutkimme murtoviivaa $P_0P_1 \dots P_n$ (Kuva 3.14). Sen pituus on selvästi janojen $P_{k-1}P_k$ pituuksien summa ($k = 1, 2, \dots, n$). Differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen piste $\xi_k \in \Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, että $f'(\xi_k)$ on yhtä suuri kuin janan $P_{k-1}P_k$ kulmakerroin, eli

$$\Delta_k y = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f'(\xi_k)\Delta_k x.$$

Näin ollen janan $P_{k-1}P_k$ pituus on Pythagoraan lauseen nojalla

$$|P_{k-1}P_k| = \sqrt{\Delta_k x^2 + \Delta_k y^2} = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} \Delta_k x,$$

ja murtoviivan kokonaispituudeksi L_D tulee tällöin

$$L_D = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} \Delta_k x.$$

Oletuksistamme seuraa, että funktio $g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ on integroituva välillä I . Jos merkitsemme tavalliseen tapaan sen infimumeja ja supremumeja $m_k = \inf\{g(x) \mid x \in \Delta_k\}$ ja $M_k = \sup\{g(x) \mid x \in \Delta_k\}$,

niin kaikilla indeksin k arvoilla on voimassa epäyhtälöt $m_k \leq \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} \leq M_k$. Laskemalla yhteen eri osavälien osuudet saadaan arviot

$$s_D(g) \leq L_D \leq S_D(g).$$

Tässä ylä- ja alasummat lähestyvät yhteistä raja-arvoa, kun jako D tiheennetään, joten on mielekästä määrittellä käyrän $y = f(x)$, $x \in I$, *pituus* L integraalikaavalla

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Esimerkki 3.10. Laske paraabelin $y = x^2$ pituus välillä $x \in [-1, 1]$.

Ratkaisu. Nyt $f'(x) = Dx^2 = 2x$, joten

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx.$$

Sijoitetaan tässä $2x = \sinh t$, jolloin $t = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x = 1 \Leftrightarrow t = \operatorname{arsinh} 2 = \ln(2 + \sqrt{5})$, $2dx = \cosh t dt$ ja $4x^2 + 1 = \sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$. Käyttämällä alla kaavoja $\cosh 2t = 2 \cosh^2 t - 1$ ja $\sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t$ saadaan vastaukseksi

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \frac{1}{2} \cosh^2 t dt \\ &= \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \frac{1}{2} (1 + \cosh 2t) dt \\ &= \left|_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sinh 2t \right) \right. \\ &= \left|_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \frac{1}{2} (t + \sinh t \cosh t) \right. \\ &= \frac{1}{2} (\ln(2 + \sqrt{5}) + 2\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Voimme tilanteen sitä edellyttäessä sallia käyrälle joissakin pisteissä (tai jopa jollakin käyrän osalla) pystysuoran tangentin (vastaten tilannetta, jossa $f'(x)$ ei ole rajoitettu) jakamalla käyrän osiin siten, että kullakin osalla joko $y = f(x)$ ja df/dx rajoitettu, tai vaihtoehtoisesti $x = g(y)$ ja dg/dy on rajoitettu. Nämä vaikeudet voidaan usein kokonaan sivuuttaa käyttämällä käyrälle parametriesitystä $P = P(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I = [\alpha, \beta]$. Kun valitaan välin I jako D , niin vastaavan murtoviivan pituutta laskettaessa $\Delta_k x = x'(\xi_{k,1}) \Delta_k t$ ja $\Delta_k y = y'(\xi_{k,2}) \Delta_k t$ joillekin luvuille $\xi_{k,1}, \xi_{k,2} \in [t_{k-1}, t_k]$. Emme voi siis käyttää vain yhtä välin $[t_{k-1}, t_k]$ pistettä, mistä seuraa tiettyjä hankaluuksia. Sivuumme ne tällä kurssilla, ja toteamme lopputuloksena, että mikäli väli I voidaan jakaa äärellisen moneen osaan siten, että kullakin osavälillä funktiot $x'(t)$ ja $y'(t)$ ovat molemmat jatkuvia (ja siis rajoitettuja), välillä I saadaan käyrän $P(t)$, $t \in I$ pituus integraalista

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Lyhyempi perustelu tälle saadaan siitä, että nyt $dx = x'(t) dt$ ja $dy = y'(t) dt$, jolloin ‘hyvin lyhyen’ murtoviivan osan (=ns. *kaarialkion*) pituus on $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$.

Esimerkki 3.11. Lasketaan syklodin kaaren pituus (vrt. Esimerkki 3.8).

Ratkaisu. Nyt $x(t) = R(t - \sin t)$ ja $y(t) = R(1 - \cos t)$, joten $x'(t) = R(1 - \cos t)$ ja $y'(t) = R \sin t$. Näin ollen

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = R^2 (1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = R^2 (2 - 2 \cos t).$$

Sijoittamalla kaksinkertaisen kulman kosinin kaavaan

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$\alpha = t/2$ nähdään, että $2 - 2 \cos t = 4 \sin^2(t/2)$. Etsitty kaaren pituus on siis

$$\begin{aligned} L &= \int_{t=0}^{2\pi} R \sqrt{2 - 2 \cos t} dt \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} 2R \sin \frac{t}{2} dt \\ &= \left[-4R \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = -4R(-1 - 1) = 8R. \end{aligned}$$

Tarkistuksena toteamme, että tämä luku on suurempi kuin kaaren päätepisteiden välinen etäisyys ($= 2\pi R$).

Käyrän napakoordinaattiesitystä voidaan pitää erikoistapauksena parametriesityksestä, koska voimme pitää kulmamuuttujaa φ parametrina. Harjoitustehtävänä voit johtaa tuloksen, jonka mukaan jatkuvasti derivoituvan funktion $r = r(\varphi)$ välillä $\varphi \in [\alpha, \beta]$ antaman napakoordinaattikäyrän pituus saadaan integraalista

$$L = \int_{\varphi=\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

Yritys laskea käyrän pituus johtaa usein ikäviin integraaleihin.

Esimerkki 3.12. Ellipsillä

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

on parametriesitys $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Oletetaan, että $a > b$. Tällöin $x'(t)^2 + y'(t)^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t = a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t$. Merkitään tässä $a^2 - b^2 = k^2 a^2$, jolloin $k \in (0, 1)$. Ellipsin reunakäyrän pituuden antaa siis määrätty integraali

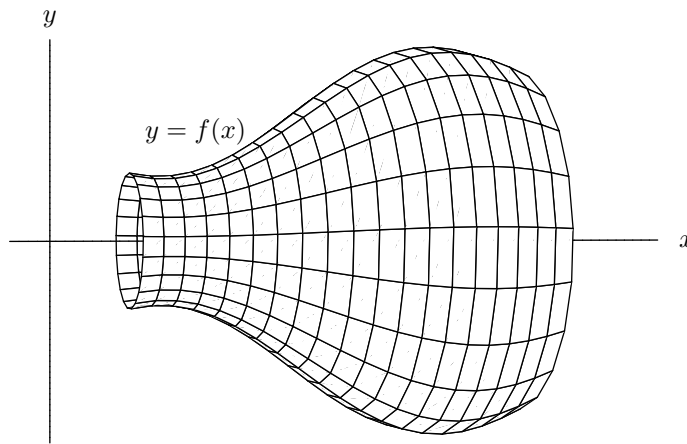
$$L = \int_0^{2\pi} a \sqrt{1 - k^2 \cos^2 t} dt.$$

Tämä on esimerkki ns. elliptisestä integraalista, jota ei voida lausua alkeisfunktioiden avulla.

3.3 Pyöräyskappaleen tilavuus ja pinta-ala

Yleisempien 3-ulotteisten kappaleiden tilavuuden (tai pinta-alan) määrittäminen edellyttää kahden muuttujan funktioiden integroinnin teoriaa. Muutamia erikoistapauksia voidaan käsitellä yhden muuttujan funktion

teorian avulla. Näistä yleisimmin esiintyvä tilanne on ns. *pyöräyskappaleen* tapaus. Pyöräyskappale muodostuu siten, että tarkasteluvälillä $[a, b]$ positiivisia arvoja saavan funktion $f(x)$ kuvaajan $y = f(x)$ ajatellaan pyörähtävän 3-ulotteisessa avaruudessa x -akselin ympäri. Tällaiset kappaleet esiintyvät käytännössä usein, ja tämänmuotoisia esineitä on helppo valmistaa käyttäen apuna sorvia tai savenvalajan dreijaa. Esimerkki tällaisesta pyöräyskappaleesta on Kuvassa 3.15. Kuvassa on mukana kappaleen pinnasta vain käyrän $y = f(x)$ pyörähtäessään pyyhkimä *pyöräyspinta*. Kappaleen päädyissä olevat ympyrälevyt (kansi ja pohja) on kuvassa jätetty pois.



Kuva 3.15: Käyrän $y = f(x)$ määräämä pyöräyskappale

Pyöräyskappaleen analyysi perustuu siihen, että voimme ajatella kappaleen muodostuvan useista ohuista siivuista (vastaten välin $[a, b]$ jotakin jakoa D). Yksi tällainen siivu on Kuvassa 3.16. Se on osa edellisen kuvan kappaletta.

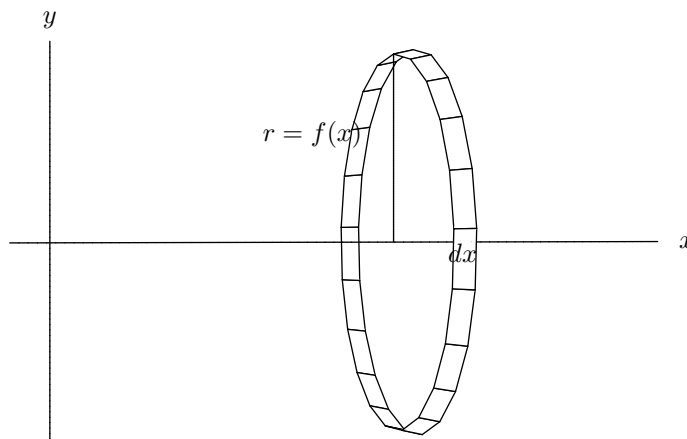
Kun laskemme pyöräyskappaleen tilavuutta, ajattelempa siivun olevan suoran ympyrälieriön muotoinen. Tämän lieriön pohjaympyrän säde on tällöin $r = f(x)$ ja korkeus dx , joten sen tilavuudeksi saadaan $dV = \pi f(x)^2 dx$. Tässä valossa seuraava tulos on odotettu.

Lause 3.13. *Oletetaan, että funktio $f(x)$ on jatkuva välillä $I = [a, b]$. Käyrän $y = f(x), x \in I$ x -akselin ympäri pyörähtäessä rajatun kappaleen tilavuus on*

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Todistus. Olkoon D jokin välin I jako, ja olkoot m_k (vast. M_k) funktion $|f|$ infimum (vast. supremum) osavälillä Δ_k . Tällöin osaväliä Δ_k vastaavan siivun tilavuus $\Delta_k V$ toteuttaa epäyhtälöt $\pi m_k^2 \Delta_k x \leq \Delta_k V \leq \pi M_k^2 \Delta_k x$. Laskemalla nämä yhteen saadaan epäyhtälöt

$$s_D(\pi f^2) \leq V \leq S_D(\pi f^2).$$



Kuva 3.16: Pyöräyskappaleen ympyrälieriömainen siivu, pohjaympyrän säde $r = f(x)$, korkeus $h = dx$

Koska funktio f^2 on integroitava välillä I , tässä jakoa D tihentämällä saadaan ylä- ja alasummat mielivaltaisen lähelle toisiaan. Väite seuraa. $\square$

Esimerkki 3.14. Origokeskinen R -säteinen pallo muodostuu, kun funktion $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ kuvaaja välillä $I = [-R, R]$ pyörähtää x -akselin ympäri. Tästä saadaan pallon tilavuudelle tuttu lauseke

$$V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left| R^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Pyöräyspinnan alan määrittämiseen ei lieriömalli riitä, sillä käyrän $y = f(x)$ kaltevuus pisteen x lähistöllä on otettava huomioon (vrt. käyrän pituuden kaavan johto). Oikeaan lopputulokseen päädytään, kun ajatellaan lyhyen jananpätkän, jonka pituus on $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ pyörähtävän matkan $2\pi f(x)$ ja matkallaan ‘pyyhkäisevän’ rengasmaisen pinnan, jonka ala on $2\pi |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$. Jos pyörähtävä käyrä olisi suora, tämä rengasmaisen pinta olisi osa erään kartion vaippaa. Näin ollen, kunhan oletamme, että $f(x)$ on tarkasteluvälillä I derivoituva, voimme ajatella pyöräyspinnan muodostuvan välin I jakoa D vastaavista kartioiden vaippojen osista. Sivuutamme tällä kertaa yksityiskohdat, ja toteamme vain lopputuloksen, jonka mukaan välillä $[a, b]$ määritellyn, jatkuvasti derivoituvan funktion $f(x)$ kuvaajan antaman pyöräyspinnan ala A saadaan integraalista

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Tarkistuksena kaavan oikeellisuudesta vertaamme sen avulla saatua tulosta koulukurssista tunnettuun kartion vaipan alan kaavaan.

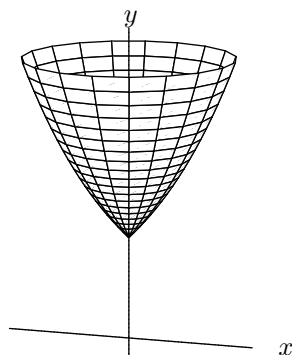
Esimerkki 3.15. Suora ympyräkartio (korkeus h , pohjaympyrän säde r) muodostuu, kun funktion $y = f(x) = rx/h$ kuvaaja välillä $x \in [0, h]$ pyörähtää x -akselin ympäri. Nyt $f'(x) = r/h$ on vakio, joten kaavamme

mukaan kartion vaipan alaksi saadaan

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^h \frac{rx}{h} \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} dx \\ &= 2\pi \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \left| \frac{rx^2}{2h} \right|_0^h \\ &= 2\pi \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \frac{rh}{2} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Koska tässä $\sqrt{r^2 + h^2}$ on Pythagoraan lauseen nojalla kartion sivujan pituus s saadaan tästä koulukurssin tuttu kaava $A = \pi rs$.

Näille kaavoille on luonnolliset vastineensa, jotka käsittelevät tapauksia, joissa käyrä pyörähtääkin y -akselin ympäri, tai käyrä onkin annettu parametrimuodossa.



Kuva 3.17: Käyrän $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$ y -akselin ympäri pyörähtäessään muodostama pyöräyspinta

Esimerkki 3.16. Pyörähtäessään y -akselin ympäri käyrän $y = e^x$, $x \in [0, 1]$ muodostama pyöräyspinta rajaa yhdessä xyz -avaruuden tason $y = e$ kanssa erään kappaleen (Kuva 3.17). Laske sen tilavuus.

Ratkaisu. Tällä kertaa pyöräyskappale jakautuu siivuihin, jotka ovat kohtisuorassa y -akselia vastaan. Tällaisen ympyrälieriömäisen siivun korkeus on nyt dy , ja säde saadaan käänteisfunktioista $x = x(y) = \ln y$. Kun $x = 0$, niin $y = y(x) = e^0 = 1$ ja kun $x = 1$, niin $y = e^1 = e$, joten taso $y = e$ luo Kuvan 3.17 astialle kannen. Kappaleen tilavuus on siten

$$V = \pi \int_{y=1}^e \ln^2 y \, dy.$$

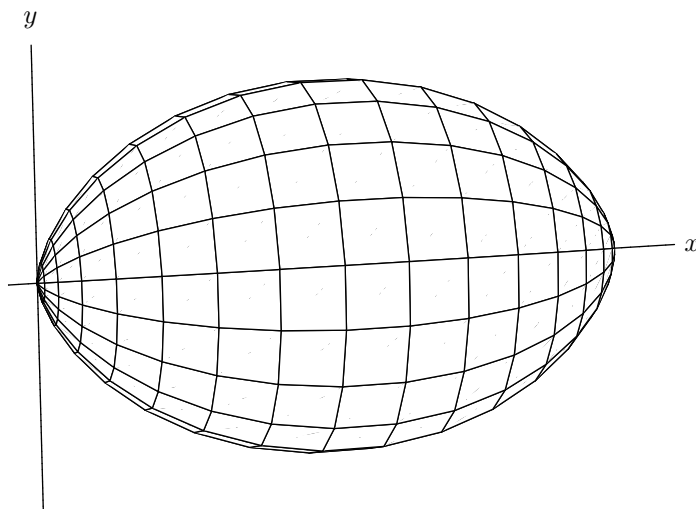
Funktion $u = \ln^2 y$ derivaatta $du/dy = 2(\ln y)/y$, joten kun valitaan osittaisintegroitaessa $v' = 1$, niin $v = y$,

ja saadaan

$$\begin{aligned} V &= \pi \left|_{y=1}^e (y \ln^2 y) - \pi \int_1^e 2 \ln y \, dy \right. \\ &= \pi(e - 0) - 2\pi \left|_{y=1}^e (y \ln y - y) \right. \\ &= e\pi - 2\pi(e - e - 0 + 1) = (e - 2)\pi. \end{aligned}$$

Tarkistuksena toteamme, että kyseinen kappale mahtuu sellaisen suoran ympyrälieriön sisään, jonka pohjan säde $r = 1$ ja korkeus $h = (e - 1)$. Tällaisen lieriön tilavuus on $\pi(e - 1)$, mikä on odotusten mukaisesti $> V$.

Esimerkki 3.17. Esimerkin 3.8 sykloidin kaari pyörähtää x -akselin ympäri. Laske muodostuvan kappaleen tilavuus.



Kuva 3.18: Sykloidin kaaren pyörähtäessä muodostuva soikimainen kappale

Ratkaisu. Kun käyrä on annettu parametrimuodossa $x = x(t)$, $y = y(t)$, niin pyöräyskappaleen ympyrälieriömäisen siivun paksuus on $h = dx = x'(t) dt$, ja sen pohjan säde on $r = y(t)$, joten tilavuus saadaan integraalista (mahdollisesti vääränmerkkisenä, jos integroimisvälillä $x'(t) \leq 0$)

$$V = \pi \int_{t=\alpha}^{\beta} x'(t) y(t)^2 \, dt.$$

Sykloidin kaaren tapauksessa $x(t) = R(t - \sin t)$, $y(t) = R(1 - \cos t)$, ja kaari muodostuu, kun parametri t käy läpi välin $[\alpha, \beta] = [0, 2\pi]$. Siis $x'(t) = R(1 - \cos t)$, ja etsitty tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{t=0}^{2\pi} R^3 (1 - \cos t)^3 \, dt = \pi R^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) \, dt \\ &= \pi R^3 \int_0^{2\pi} (1 + 3 \cos^2 t) \, dt = \pi R^3 2\pi \left(1 + \frac{3}{2}\right) = 5\pi^2 R^3. \end{aligned}$$

3.4 Epäoleellisista integraaleista

Luvun lopuksi tarkastelemme kahta tapaa laajentaa määrätyn integraalin käsitettä ns. *epäoleelliseksi integraaliksi*. Ensimmäinen laajennus käsittelee tilannetta, jossa integroimisväli ei enää olekaan rajoitettu, vaan jatkuu ainakin toisesta päästään äärettömän kauas. Tällaisia integraaleja tarvitaan yllättävän usein! Niitä tulee vastaan esimerkiksi todennäköisyyslaskennassa ja integraalimuunnosten teoriassa (mikä on virtapiirien ja signaalinkäsittelyn teorian jokapäiväinen työkalu). Toinen laajennus käsittelee sellaisia tapauksia, joissa integroitava funktio ei olekaan välin jonkin pisteen ympäristössä (eikä näin ollen koko välillä) rajoitettu. Niitä ei näe sovelluksissa yhtä usein.

Miksi näissä tilanteissa tarvitaan toisenlainen käsittelytapa? Perustapauksessa, jossa integroitava funktio saa integroimisvälillä vain ei-negatiivisia arvoja, voitaisiin monessa tilanteessa muodostaa alasummat kaikille jaoille D , sillä kullakin osavälillä infimum on äärellinen, ja (kuten tulemme esimerkeissä näkemään) äärettömän pitkällä osavälillä infimum on usein nolla, joten alasummaan tulisi nollan korkuinen pylväs (toisin äärettömän leveä, mutta sen pinta-ala olisi kuitenkin miellettäviissä nollaksi). Ongelmaksi tulee kuitenkin se, että emme voi lainkaan muodosta yläsummia, jos jollakin äärettömän pitkällä osavälillä supremum on positiivinen, tai jos jollakin äärellisellä osavälillä supremumia ei ole olemassa, koska funktio ei ko. välillä ole ylhäältä rajoitettu. Näin ollen emme saa takeita edes alaintegraalin olemassaololle, koska voi olla, että alasummien joukko ei ole ylhäältä rajoitettu. Sellaisissa tapauksissa, joissa alasummat saataisiin rajoitettua (ja näin alaintegraali määriteltyä) pääsisimme alkuun. Pelkästään alasummia tutkimalla ei kuitenkaan saada tyydyttävää integraalin käsitettä aikaan, koska voimme esimerkiksi lisätä funktioon Esimerkin 2.8 tapaisen funktion sen alasummien muuttumatta.

Toimivampi integraalikäsitteen laajennus saadaan aikaan toisin. Kummassakin mainitussa tapauksessa käytämme lähestymistapaa, jossa ensin modifioimme integroimisväliä siten, että epäoleellisuus poistuu, ja määrätty integraali voidaan laskea. Sitten alamme tutkia, miten modifioitun määrätyn integraalin arvot muuttuvat, kun kasvatamme modifioitua väliä siten, että 'lähestymme' koko haluttua väliä 'sisältä päin'. Jos tällöin määrätyn integraalin arvoilla on tilanteeseen sopiva raja-arvo, niin olemme tyytyväisiä.

Mikä voi tässä mennä vikaan (olettaen, että funktio on sen verran 'siisti', esimerkiksi jatkuva, että modifioituilla väleillä integraalit voidaan laskea)? Positiiviarvoisen funktion tapauksessa kutakin modifioitua väliä vastaa jokin määrätyn integraalin arvona jonkin alueen pinta-ala. Välin kasvaessa kyseinen pinta-ala kasvaa, ja voi käydä niin, että se kasvaa rajatta. Tällöin joudumme luovuttamaan, ja toteamaan, että tutkittavana oleva epäoleellinen integraali *hajaantuu*. Mutta jos kasvu on ylhäältä rajoitettua, niin kasvun monotonisuuden vuoksi saamme määrätuille integraaleille raja-arvon, ja sanomme, että epäoleellinen integraali *suppenee*.

Samoin käy integraalin väliadditiivisuuden vuoksi (Lause 2.16), jos integrandi vaihtaa merkkiään äärelli-

sen monta kertaa. Joskus voi käydä myös niin, että raja-arvon olemassaolo perustuu siihen, että sen merkki vaihtuu äärettömän pitkällä integroimisvälillä äärettömän monta kertaa, ja mukaan tulevia positiivisia ja negatiivisia osavälejä vastaavat pinta-alat kumoavat toisiaan riittävästi.

Määritelmä 3.18. Oletetaan, että funktio f on Riemann-integroitava (erityisesti siis rajoitettu) kaikilla muotoa $[a, c]$ olevilla väleillä, missä $a \in \mathbf{R}$ on jokin kiinteä luku, mutta $c > a$ muuttuu. Tällöin voidaan muodostaa funktion f integraalifunktio $F(c) = \int_a^c f$. Jos tällä on äärellinen raja-arvo, kun $c \rightarrow \infty$, niin määrittelemme

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{c \rightarrow \infty} F(c) = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx,$$

ja sanomme, että epäoleellinen integraali $\int_a^\infty f$ suppenee. Muussa tapauksessa sanomme, että epäoleellinen integraali $\int_a^\infty f$ hajaantuu.

Esimerkki 3.19. Osoita, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty \sin x dx$$

hajaantuu.

Ratkaisu. Nyt

$$F(c) = \int_0^c \sin x dx = \left| -\cos x \right|_0^c = 1 - \cos c.$$

Tällä ei ole raja-arvoa, kun $c \rightarrow \infty$, vaan funktion $F(c)$ arvot heilahtelevat loputtomiin koko välillä $[0, 2]$.

Esimerkki 3.20. Koska

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c 1 dx = \lim_{c \rightarrow \infty} (c - 1) = \infty,$$

niin vakiofunktion $f(x) = 1$ määrättyt integraalit $\int_1^c f$ kasvavat rajatta, kun $c \rightarrow \infty$. Näin ollen epäoleellinen integraali $\int_1^\infty f$ hajaantuu.

Esimerkki 3.21. Selvitä, millä parametrin k arvoilla eksponenttifunktion $f(x) = e^{-kx}$ epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty e^{-kx} dx$$

suppenee.

Ratkaisu. Jos $k = 0$, niin kyseessä on vakiofunktio 1, jolloin integraali $\int_0^c f$ kasvaa rajatta, kun $c \rightarrow \infty$. Samoin käy, jos $k < 0$, sillä tällöin välillä $x \in [0, \infty)$ on voimassa arvio $f(x) \geq 1$. Sitä vastoin vähenevän eksponenttifunktion $k > 0$ tapauksessa saamme

$$F(c) = \int_0^c e^{-kx} dx = -\frac{1}{k} \left| e^{-kx} \right|_0^c = \frac{1 - e^{-kc}}{k}.$$

Nyt $k > 0$, ja tässä $e^{-kc} \rightarrow 0$, kun $c \rightarrow \infty$, ja $\lim_{c \rightarrow \infty} F(c) = 1/k$. Vastaukseksi saamme siis, että integraali

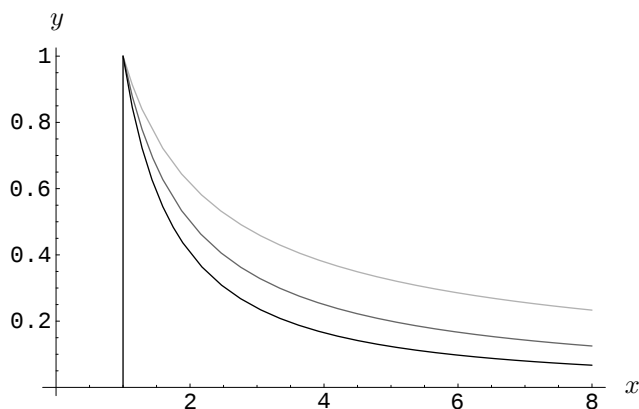
$$\int_0^\infty e^{-kx} dx = \frac{1}{k}, \quad \text{kun } k > 0, \text{ ja hajaantuu muulloin.}$$

Edellisen esimerkin tulos on tulkittavissa siten, että vähenevä eksponenttifunktio lähestyy nollaa niin nopeasti, että sen kuvaajan alle jäävän alueen pinta-ala on äärellinen. Tunnetusti kasvava eksponenttifunktio voittaa kasvavan potenssifunktion, joten käänteislukujen puolella tilanne kääntyy toisin päin, ja vähenevä eksponenttifunktio lähestyy nollaa nopeammin kuin vähenevä potenssifunktio. Näin ollen ei ole selvää, mitä vähenevän potenssifunktion integraalille tapahtuu, kun integrointiväliä laajennetaan rajatta. Selvitämme tämän seuraavaksi.

Esimerkki 3.22. Olkoon $s \geq 0$ jokin vakio. Osoita, että integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx$$

suppenee silloin ja vain silloin, kun $s > 1$, ja tällöin kyseisen integraalin arvo on $1/(s-1)$



Kuva 3.19: Funktion x^{-s} , $s > 0$, integraali yli välin $x \in [1, \infty)$ hajaantuu kun $s < 1$ (vaalea), hajaantuu logaritmisesti kun $s = 1$ (keskiharmaa), ja suppenee kun $s > 1$ (musta)

Ratkaisu. Funktion $f(x) = 1/x^s$ määräämätön integraali on $F(x) = x^{-s+1}/(1-s)$, jos $s \neq 1$ ja $F(x) = \ln x$, kun $s = 1$. Näin ollen

$$\int_1^c f(x) dx = \left|_1^c F(x) = \begin{cases} \ln c, & \text{kun } s = 1, \text{ ja} \\ \frac{1 - c^{-s+1}}{s-1}, & \text{kun } s \neq 1. \end{cases}$$

Tässä $\lim_{c \rightarrow \infty} \ln c = \infty$. Lisäksi $\lim_{c \rightarrow \infty} c^{-s+1}$ on ääretön, jos $-s+1 > 0 \Leftrightarrow s < 1$, mutta $\lim_{c \rightarrow \infty} c^{-s+1} = 0$, jos $s > 1$. Epäoleellinen integraali siis suppenee silloin ja vain silloin, kun $s > 1$.

Kirjaamme seuraavan suhteellisen ilmeisen tuloksen.

Lause 3.23. Oletetaan, että epäoleelliset integraalit

$$\int_a^\infty f_1 = I_1 \quad \text{ja} \quad \int_a^\infty f_2 = I_2$$

suppenevat. Olkoot $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ mielivaltaisia vakioita. Tällöin funktion $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ epäoleellinen integraali yli välin $[a, \infty)$ suppenee ja

$$\int_a^\infty f = c_1 I_1 + c_2 I_2$$

Todistus. Olkoon $c > a$ mielivaltainen. Merkitään $F_i(c) = \int_a^c f_i, i = 1, 2$. Tällöin Lauseen 2.13 nojalla $f \in R([a, c])$ ja

$$F(c) = \int_a^c f = c_1 \int_a^c f_1 + c_2 \int_a^c f_2 = c_1 F_1(c) + c_2 F_2(c).$$

Kurssin Analyysi I funktion raja-arvoa koskevien tulosten nojalla

$$\lim_{c \rightarrow \infty} F(c) = c_1 \lim_{c \rightarrow \infty} F_1(c) + c_2 \lim_{c \rightarrow \infty} F_2(c) = c_1 I_1 + c_2 I_2.$$

□

Esitämme seuraavaksi kriteerin, jonka avulla epäoleellisen integraalin suppeneminen voidaan usein todeta. Kriteeri soveltuu käytettäväksi tilanteessa, jossa tutkittavaa ei-negatiivista funktiota voidaan arvioida ylöspäin toisella funktiolla (=majorantilla), jonka epäoleellinen integraali jo tiedetään suppenevaksi. Tulos ei tietenkään ole lainkaan yllättävä.

Lause 3.24. (Majoranttiperiaate.) Olkoon $a \in \mathbf{R}$ jokin luku, ja olkoot f ja g funktioita, jotka ovat integroituvia kaikilla väleillä $[a, c], c > a$. Oletetaan, että joillakin luvuilla $K > 0$ ja $b, b \geq a$, epäyhtälöt $0 \leq g(x) \leq Kf(x)$ ovat voimassa aina, kun $x \geq b$. Jos integraali $\int_b^\infty f$ suppenee, niin tällöin myös integraali $\int_b^\infty g$ suppenee.

Todistus. Tutkitaan funktiota

$$G(c) = \int_b^c g(x) dx.$$

Lauseen 2.16 mukaan aina, kun $c_2 > c_1 \geq b$

$$G(c_2) = G(c_1) + \int_{c_1}^{c_2} g.$$

Lauseen 2.20 nojalla $\int_{c_1}^{c_2} g \geq 0$, joten saamme epäyhtälön $G(c_2) \geq G(c_1)$. Olemme siis osoittaneet, että funktio $G(c)$ on kasvava välillä $c \in I_b = [b, \infty)$. Samoin nähdään, että funktio $F(c) = \int_b^c f$ on kasvava välillä I_b . Lisäksi Lauseen 2.20 nojalla $\forall c \geq b$ on voimassa epäyhtälö $0 \leq G(c) \leq KF(c)$.

Voimme muodostaa lukujonon $(G(n))_{n \in \mathbf{N}, n \geq b}$, missä siis indeksi $n \in \mathbf{N}$ saa vain ne arvot, joilla $n \geq b$. Näimme yllä, että jono $(G(n))$ on kasvava. Lisäksi

$$G(n) \leq KF(n) \leq K(F(n+1) \leq \dots \leq K \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = K \int_b^\infty f.$$

Tekemämme oletuksen perusteella integraali $\int_b^\infty f$ suppenee, joten jono $(G(n))$ on myös ylhäältä rajoitettu. Monotonisten jonojen peruslauseen (Analyysi I) nojalla jonolla $(G(n))$ on raja-arvo I_g , ja $G(n) \leq I_g$ kaikille $n \in \mathbf{N}, n \geq b$. Kun osoitamme, että $\lim_{c \rightarrow \infty} G(c) = I_g$, niin väite seuraa. Tämä ei ole vielä täysin selvää, sillä tässä muuttuja c saa mitä tahansa reaalisia arvoja, kun taas jonon indeksi n sai ainoastaan kokonaisluokuarvoja. Funktion G monotonisuus sallii meidän ottaa tämän askeleen kuten seuraavassa näemme.

Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Jonon raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa sellainen raja-luku $M \in \mathbf{R}$, että $|G(n) - I_g| < \varepsilon$ aina, kun n on ehdon $n > M$ toteuttava luonnollinen luku. Koska jono $(G(n))$ on kasvava, niin tästä seuraa, että

$$I_g - \varepsilon < G(n) \leq I_g \quad \text{aina, kun } n \in \mathbf{N} \text{ on suurempi kuin } M.$$

Jos nyt $c > M + 1$, niin on olemassa sellainen luonnollinen luku $n > M$ että $n \leq c < n + 1$. Aiemmin nähdyn ja funktion $G(c)$ monotonisuuden nojalla tällöin

$$I_g - \varepsilon < G(n) \leq G(c) \leq G(n + 1) \leq I_g.$$

Siten $|I_g - G(c)| < \varepsilon$ aina, kun $c > M + 1$. □

Esimerkki 3.25. Esimerkin 3.22 nojalla integraali $\int_a^\infty (1/x^2) dx$ suppenee aina, kun $a > 0$, joten majoranttiperiaatteen nojalla integraalit

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2 + 1} dx \quad \text{ja} \quad \int_a^\infty \frac{3}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} dx$$

myös suppenevat.

Esimerkki 3.26. Olkoot $t > 0$ ja $k > 0$ mielivaltaisia vakioita. Perustele, miksi tällöin epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty x^t e^{-kx} dx$$

suppenee.

Ratkaisu. Olkoon $f(x) = x^t e^{-kx}$. Tutkitaan ensin apufunktiota $g(x) = x^t e^{-kx/2}$. Kurssin Analyysi I tulosten perusteella (eksponenttifunktio voittaa potenssifunktion) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Näin ollen on olemassa sellainen rajaluku M , että $g(x) \leq 1$ aina, kun $x > M$. Toisaalta välillä $[0, M]$ funktio $g(x)$ on jatkuvana funktiona rajoitettu, eli on olemassa sellainen luku S , että $S \geq g(x)$ aina, kun $x \in [0, M]$. Merkitään sitten $K = \max\{1, S\}$, jolloin $0 \leq g(x) \leq K$ kaikille $x \geq 0$. Koska $f(x) = g(x)e^{-kx/2} \leq Ke^{-kx/2}$, ja koska Esimerkin 3.21 nojalla integraali $\int_0^\infty e^{-kx/2} dx$ suppenee, niin majoranttiperiaatteen mukaisesti integraali $\int_0^\infty f$ suppenee sekin.

Esimerkki 3.27. Lasketaan epäoleellinen integraali

$$I = \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx.$$

Ratkaisu. Käytetään yleistettyä osittaisintegrointia primitiivifunktion löytämiseksi. Olkoon siis $u = x^3$, jolloin $u' = 3x^2$, $u'' = 6x$, $u^{(3)} = 6$ ja $u^{(4)} = 0$. Tällöin on valittava $v^{(4)} = e^{-x}$, joten $v^{(3)} = -e^{-x}$, $v'' = e^{-x}$, $v' = -e^{-x}$ ja $v = e^{-x}$. Siis

$$I = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-x}(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6) = 6 - \lim_{c \rightarrow \infty} e^{-c}(c^3 + 3c^2 + 6c + 6) = 6 - 0 = 6.$$

Huomautus 3.28. Edellisen Esimerkin tulos yleistyy koskemaan niin sanottua *Gamma-funktiota* $\Gamma(t)$, joka määritellään epäoleellisena integraalina

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Näimme jo, että tämä integraali suppenee, kun $t > 1$. Seuraavan pykälän määritelmien avulla nähdään, että tällä integraalilla on järkevästi määriteltävissä oleva arvo aina, kun $t > 0$. Harjoitustehtävänä voit todistaa, että, kun $n \in \mathbf{N}$, niin $\Gamma(n+1) = n!$. Voidaan todistaa, että gamma-funktio on muuttujan t jatkuva funktio. Tämä on tapa laajentaa kertomafunktion määrittelyjoukko luonnollisten lukujen joukon ulkopuolelle.

Määritelmä 3.29. Olkoot $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ kiinteitä lukuja. Oletetaan ensin, että funktio f ei ole rajoitettu missään pisteen a oikeanpuoleisessa ympäristössä $(a, a+h)$, mutta että f on Riemann-integroituva (erityisesti siis rajoitettu) kaikilla muotoa $[a+h, b]$ olevilla väleillä, missä h muuttuu välillä $0 < h < b-a$. Jos määrättyllä integraalilla

$$F(h) = \int_{a+h}^b f(x) dx$$

on äärellinen raja-arvo, kun $h \rightarrow 0+$, niin tällöin määrittelemme

$$\int_a^b f = \lim_{h \rightarrow 0+} \int_{a+h}^b f,$$

ja sanomme, että epäoleellinen integraali $\int_a^b f$ suppenee. Muussa tapauksessa sanomme, että epäoleellinen integraali $\int_a^b f$ hajaantuu.

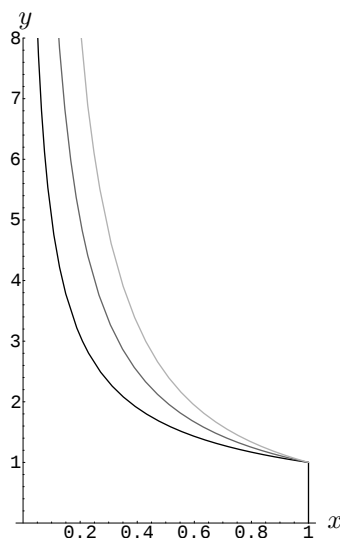
Vastaavasti, jos f on integroituva kaikilla muotoa $[a, b-h]$, $0 < h < b-a$ olevilla väleillä, mutta ei ole rajoitettu missään pisteen b vasemmanpuoleisessa ympäristössä, niin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{h \rightarrow 0+} \int_a^{b-h} f,$$

mikäli yhtälön oikean puolen raja-arvo on olemassa.

Huomautus 3.30. Huomaa erityisesti, ettei funktion f siis tarvitse olla edes määritelty integroimisvälin päätepisteessä, jotta tarvittava raja-arvo voitaisiin muodostaa.

Esimerkki 3.31. Osoita, että funktion $f(x) = 1/x^s$, $s > 0$ epäoleellinen integraali yli välin $[0, 1]$ suppenee silloin, kun $s \in (0, 1)$ ja hajaantuu, kun $s \geq 1$.



Kuva 3.20: Funktion x^{-s} , $s > 0$, integraali yli välin $x \in (0, 1]$ hajaantuu kun $s > 1$ (vaalea), hajaantuu logaritmisesti kun $s = 1$ (keskiharmaa), ja suppenee kun $s < 1$ (musta)

Ratkaisu. Jos $s = 1$, niin

$$\int_h^1 f = \left|_h^1 \ln x = -\ln h \rightarrow \infty,\right.$$

kun $h \rightarrow 0+$, joten tässä tapauksessa epäoleellinen integraali hajaantuu. Muissa tapauksissa

$$\int_h^1 f = \left|_h^1 \frac{x^{1-s}}{1-s} = \frac{1-h^{1-s}}{1-s}.$$

Jos tässä $1-s > 0$, niin $h^{1-s} \rightarrow 0$, ja raja-arvoksi saadaan $1/(1-s)$. Jos taas $1-s < 0$, niin $h^{1-s} \rightarrow \infty$, ja epäoleellinen integraali hajaantuu.

Kun $s > 0$, niin funktion $f(x) = 1/x^s$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = g(x) = 1/x^{1/s}$. Siten funktion $f(x)$ kuvaajan välillä $x \in (0, 1]$, suoran $y = 1$ ja y -akselin rajaama alue on saman muotoinen kuin funktion $g(x)$ kuvaajan välillä $x \in [1, \infty)$, suoran $x = 1$ ja x -akselin rajaama alue. Pisteiden $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ rajaamaa neliötä lukuun ottamatta tämän esimerkin ja Esimerkin 3.22 epäoleelliset integraalit siis laskevat saman alueen pinta-alan. Vertaa myös Kuvia 3.19 ja 3.20. Näin ollen tämän esimerkin tulos seuraa myös Esimerkin 3.22 tuloksesta, kun otetaan huomioon, että $s \geq 1 \Leftrightarrow 1/s \leq 1$.

Esimerkki 3.32. Epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{h \rightarrow 0+} \left|_h^1 \frac{\sqrt{x}}{1/2} = \lim_{h \rightarrow 0+} 2(1 - \sqrt{h}) = 2.$$

Tämä on erikoistapaus ($s = 1/2$) edellisen esimerkin tuloksesta.

Esimerkki 3.33. Osoita, että funktion $f(x) = \ln x$ epäoleellinen integraali yli välin $[0, 1]$ suppenee.

Ratkaisu. Koska $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty$ tämä integraali todella on epäoleellinen. Kun $h \in (0, 1)$

$$\int_h^1 \ln x \, dx = \left[x \ln x - x \right]_h^1 = -1 + h - h \ln h.$$

Sijoitetaan tässä raja-arvon määräämiseksi $h = 1/t$, jolloin $h \rightarrow 0+ \Leftrightarrow t \rightarrow \infty$. Nähdään, että

$$-h \ln h = -\frac{\ln(1/t)}{t} = \frac{\ln t}{t} \rightarrow 0,$$

kun $t \rightarrow \infty$ (potenssifunktio $t = t^1$ voittaa kasvussa logaritmifunktion $\ln t$). Lopputulokseksi saadaan

$$\int_0^1 \ln x \, dx = -1.$$

Majoranttiperiaate toimii tietenkin myös rajoittamattomien funktioiden integraalien suppenemista tutkittaessa. Jos siis esimerkiksi $f \geq 0$ välillä $(a, b]$, epäoleellinen integraali $\int_a^b f$ suppenee, funktio g on integroitava kaikilla väleillä $[a+h, b]$ ja $0 \leq g(x) \leq Kf(x)$ aina, kun $x \in (a, b]$ ($K > 0$ jokin vakio), niin tällöin myös integraali $\int_a^b g$ suppenee. Samoin Lauseen 3.23 rajoittamattomia funktioita koskeva vastine pitää paikkansa (todistus harjoitustehtävänä).

Esimerkki 3.34. Osoita, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^\pi \frac{e^x}{\sqrt{x}} \, dx$$

suppenee.

Ratkaisu. Olkoon $f(x) = e^x x^{-1/2}$. Koko välillä $I = (0, \pi]$ on voimassa epäyhtälö $0 \leq f(x) \leq e^\pi / \sqrt{x}$. Koska $f(x)$ on jatkuva välillä I , ja integraali $\int_0^\pi 1/\sqrt{x} \, dx$ suppenee, niin väite seuraa majoranttiperiaatteesta.

Joskus tutkittavassa integraalissa esiintyy useita epäoleellisuutta aiheuttavia piirteitä. Tällöin sovellettava menettelytapa on eristää kukin niistä jakamalla integroimisväli osiin siten, että kullakin osavälillä esiintyy vain yhdenlaista epäoleellisuutta: joko funktio ei ole rajoitettu välin jomman kumman päätepisteen ympäristössä, tai $\pm\infty$ esiintyy päätepisteenä. Tällöin yksikin hajaantuva osa ‘pilaa’ koko integraalin. Valotamme käytettäviä periaatteita esimerkkien kautta.

Esimerkki 3.35. Eristä integraalissa

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} \, dx$$

esiintyvät epäoleellisuudet, ja määritä kyseisen integraalin arvo, mikäli se suppenee.

Ratkaisu. Integroitava funktio $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$ ei ole määritelty eikä rajoitettu missään pisteen $x = 0$ ympäristössä, joten aloitamme jakamalla välin kahtia, ja tutkimme aiemmin käsiteltyä tyyppiä olevia epäoleellisia integraaleja

$$I_1 = \int_{-1}^0 f \quad \text{ja} \quad I_2 = \int_0^1 f$$

kumpaakin erikseen. Funktiolla $F(x) = 2\sqrt{|x|}\operatorname{sgn}(x)$ on derivaattana $F'(x) = 2 \cdot (1/2)x^{-1/2} = 1/\sqrt{x} = 1/\sqrt{|x|}$, kun $x > 0$, ja $F'(x) = 2 \cdot (1/2)(-x)^{-1/2} \cdot (-1)(-1) = 1/\sqrt{|x|}$, kun $x < 0$. Siis aina, kun $x \neq 0$ on voimassa $F'(x) = f(x)$. Näin ollen

$$I_1 = \lim_{h \rightarrow 0+} \left[F(x) \right]_{-1}^{-h} = \lim_{h \rightarrow 0+} (-2\sqrt{-h} - (-2)) = 2.$$

Aiemmin jo selvitimme, että $I_2 = 2$. Yhteenvedona toteamme, että tarkasteltava epäoleellinen integraali suppenee, ja sen arvo on $I_1 + I_2 = 2 + 2 = 4$.

Vaihtoehtoisesti tässä tehtävässä voitaisiin vedota myös integrandin parillisuuteen.

Esimerkki 3.36. Minkälaisia epäoleellisuuksia on integraalissa

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx,$$

kun vakio $t \in (0, 1)$? Selitä, miksi tämä integraali suppenee.

Ratkaisu. Epäoleellisuutta on tässä integraalissa kahdenlaista. Ensinnäkin integroimisvälin yläraja on ∞ , ja toiseksi integrandi kasvaa rajatta, kun $x \rightarrow 0+$. Eristämme nämä jakamalla integroimisvälin kahtia esimerkiksi kohdasta $x = 1$, joten

$$\Gamma(t) = I_1 + I_2 = \int_0^1 x^{t-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Näistä I_2 suppenee majoranttiperiaatteen nojalla, koska välillä $x \in [1, \infty)$ on voimassa $0 \leq x^{t-1} e^{-x} \leq e^{-x}$, ja integraali $\int_1^\infty e^{-x}$ suppenee (Esimerkki 3.21).

Epäoleellisen integraalin I_1 suppeneminen seuraa sekin majoranttiperiaatteesta, sillä kaikilla $x \in (0, 1]$ on voimassa epäyhtälöt

$$0 \leq x^{t-1} e^{-x} \leq x^{t-1} = \frac{1}{x^{1-t}}.$$

Lisäksi $(1-t) \in (0, 1)$, joten integraali $\int_0^1 x^{t-1} dx$ suppenee Esimerkin 3.31 nojalla.

Esimerkki 3.37. Osoita, että

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Ratkaisu. Määrätty integraali koko lukusuoran $(-\infty, \infty)$ yli määritellään kahden raja-arvon summana

$$\lim_{c_1 \rightarrow -\infty} \int_{-c_1}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c_2 \rightarrow \infty} \int_0^{c_2} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Näiden raja-arvojen laskeminen jätetään harjoitustehtäväksi.

Huomautus 3.38. Huomaa, että Esimerkissä 3.37 integroidaan ensin yli välin $[-c_1, c_2]$ ja sen jälkeen c_1 ja c_2 alkavat kumpikin lähestyä ääretöntä, mutta *toisistaan riippumatta*. Tämä on yleinen periaate, kun tutkimme integraalia, jossa on useita erilaisia epäoleellisuuksia, koska ilman sitä ei integraalin additiivisuus osavälien yli yleisty epäoleellisille integraaleille. Joissakin yhteyksissä voidaan käyttää rajoitetumpaa raja-arvon käsitettä, ns. *pääarvoa*, joka saadaan siten, että tässä asetetaan $c_1 = c_2 = c$, ja muodostetaan sitten raja-arvo, kun $c \rightarrow \infty$. Pääarvo integraalille yli välin $(-\infty, \infty)$ voi olla olemassa, vaikka integraalit yli välien $(0, \infty)$ ja $(-\infty, 0)$ hajaantuisivat. On selvää, että tästä syystä pääarvoa sovelluksissa käytettäessä on oltava tarkkana, sillä kaikki tutut säännöt eivät tällöin ole voimassa.

Esimerkki 3.39. Tutki integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx$$

suppenemista ja pääarvoa.

Ratkaisu. Merkitään $f(x) = x^3/(1+x^4)$. Välillä $x \in [1, \infty)$ on voimassa arvio $f(x) = x^3/(1+x^4) \geq x^3/(x^4+x^4) \geq 1/2x > 0$. Näin ollen integraalin $\int_1^\infty f$ on pakko hajaantua, sillä muutoin integraali $\int_1^\infty (1/2x) dx$ suppenisi majoranttiperiaatteen mukaisesti, mutta tiedämme, että kyseinen integraali hajaantuu (tätä majoranttiperiaatteen kontrapositiota kutsutaan *minoranttiperiaatteeksi*). Samoin näemme, että integraali $\int_{-\infty}^0 f$ hajaantuu. Mutta pääarvo

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{x^3}{1+x^4} dx = 0,$$

sillä funktion f parittomuuden vuoksi integraali yli välin $[-c, c]$ häviää.

Funktiolla f on primitiivi $F(x) = (1/4) \ln(1+x^4)$ (tarkista esimerkiksi derivoimalla!). Näin ollen

$$\int_{-c_1}^{c_2} f(x) dx = F(c_2) - F(-c_1) = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+c_2^4}{1+c_1^4} \right).$$

Jos tässä valitaan, että $c_1 = c, c_2 = 2c$ ja annetaan sitten parametrin c kasvaa rajatta saadaan raja-arvo

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{2c} f = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+16c^4}{1+c^4} \right) = \frac{1}{4} \ln 16 = \ln 2.$$

Jos taas valitaankin $c_2 = c, c_1 = 2c$, niin saadaan

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-2c}^c f = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+c^4}{1+16c^4} \right) = \frac{1}{4} \ln(1/16) = -\ln 2.$$

Näin ollen äärellinenkin raja-arvo riippuu siitä, miten integroimisvälin ylä- ja alarajat lähestyvät ääretöntä. Selitystä tälle saadaan määrätyn integraalin pinta-alatulkinnasta. Väliltä $[-c_1, 0]$ integraaliin tulee miinusmerkkistä pinta-alaa, ja väliltä $[0, c_2]$ taas plusmerkkistä. Koska epäoleelliset integraalit yli välien $(-\infty, 0]$ ja $[0, \infty)$ hajaantuvat, sekä negatiivista että positiivista pinta-alaa on kaiken kaikkiaan käytettävissä rajattomasti. Kun samanaikaisesti $c_1 \rightarrow \infty$ ja $c_2 \rightarrow \infty$, niin raja-arvo riippuu siitä, mitä vauhtia otamme raja-arvoprosessin aikana mukaan kummankinmerkkistä pinta-alaa. Tällä kertaa pääarvoa muodostettaessa plus- ja miinusmerkkistä pinta-alaa tulee mukaan koko ajan yhtä paljon, joten raja-arvoksi tulee tällöin

nolla. Voidaan osoittaa, että tällöin raja-arvoksi saadaan mikä reaaliarvo tahansa valitsemalla raja-arvon muodostamistapa sopivasti.

Määritelmä 3.40. Oletetaan, että funktio f on integroitava yli välin $[a, b]$ sellaisten osavälien, joilla epäoleellisuutta ei esiinny. Sanomme, että epäoleellinen integraali $\int_a^b f$ (missä siis voi olla $a = -\infty$ tai $b = \infty$ tai molemmat) *suppenee itseisesti*, jos vastaava integraali $\int_a^b |f|$ suppenee. Jos funktion $|f|$ integraali ei suppene, mutta funktion f integraali suppenee, sanomme, että suppeneminen on *ehdollista*.

Käyttämämme luonnollisen kielen fraasit olisivat epäjohdonmukaisia, jollei seuraava tulos pitäisi paikkaansa.

Lause 3.41. *Jos epäoleellinen integraali $\int_a^b f$ suppenee itseisesti, niin se suppenee.*

Todistus. Käytetään Lauseen 2.15 merkintöjä ja tuloksia. Olkoot siis f^+ ja f^- funktion f positiivinen ja negatiivinen osa. Funktiot f^+ , f^- ja $|f| = f^+ + f^-$ ovat siis integroitavia yli välin $[a, b]$ kaikkien relevanttien osavälien. Lisäksi kaikille määrittelyjoukon luvuille x on voimassa epäyhtälöt $0 \leq f^+(x) \leq |f|(x)$ ja $0 \leq f^-(x) \leq |f|(x)$. Koska epäoleellinen integraali $\int_a^b |f|$ suppenee oletuksen mukaan, niin majoranttiperiaateen seurauksena integraalit $\int_a^b f^+$ ja $\int_a^b f^-$ suppenevat. Lauseen 3.23 nojalla tällöin myös $\int_a^b f = \int_a^b (f^+ - f^-)$ suppenee. $\square$

Esimerkki 3.42. Tutkitaan epäoleellisen integraalin

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

suppenemista ja itseistä suppenemista.

Ratkaisu. Olkoon $f(x) = (1/x)\sin x$. Osittaisintegroidaan tämä valitsemalla $u = 1/x, v' = \sin x$, jolloin $u' = -1/x^2$ ja $v = -\cos x$. Näin ollen

$$\int_{\pi}^c \frac{\sin x}{x} dx = \left| -\frac{\cos x}{x} \right|_{\pi}^c - \int_{\pi}^c \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Koska $\lim_{c \rightarrow \infty} (\cos c)/c = 0$, ottamalla puolittain raja-arvo $c \rightarrow \infty$ seuraa tästä

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Tässä oikeanpuoleisessa epäoleellisessä integraalissa integrandin itseisarvo $\leq 1/x^2$, joten se suppenee itseisesti majoranttiperiaateen nojalla. Näin ollen $\int_{\pi}^{\infty} f$ suppenee sekin.

Epäoleellinen integraali $\int_{\pi}^{\infty} |f|$ kuitenkin hajaantuu. Yksi tapa päätyä tähän johtopäätökseen on todeta, että ‘suurella osalla’ reaaliarvoista x on voimassa $|\sin x| \geq 1/2$, jolloin voi ajatella, että integraalin $\int_{\pi}^{\infty} 1/(2x) dx$ hajaantumisen seurauksena myös integraali $\int_{\pi}^{\infty} |f|$ hajaantuu. Tarkempi tapa tehdä tämä arvio on seuraava. Olkoon $k \geq 1$ jokin kokonaisluku. Integroitaessa yli välin $I_k = [k\pi, (k+1)\pi]$ saadaan $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = 2$. Välillä I_k on voimassa epäyhtälö $|f(x)| \geq |\sin x|/((k+1)\pi)$, joten Lauseen 2.20 ja

epäyhtälön $0 < k+1 \leq 2k$ nojalla $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f| \geq 2/((k+1)\pi) \geq 1/(k\pi)$. Toisaalta välillä I_k on voimassa myös arvio $1/x \leq 1/(k\pi)$, joten $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} 1/x \, dx \leq \pi/(k\pi) = 1/k$. Siis kullakin välillä I_k pätee epäyhtälö

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{1}{\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{x} dx.$$

Laskemalla tässä puolittain yhteen nämä epäyhtälöt, kun k saa arvot $1, 2, \dots, n-1$, saadaan epäyhtälö

$$\int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{1}{x} dx.$$

Koska tässä oikea puoli $\rightarrow \infty$, kun $n \rightarrow \infty$, vasemmalle puolelle käy samoin.

Luku 4

Numeerisista sarjoista

4.1 Peruskäsitteet ja integraalitarkastin

Sarjassa on kyse numeroituvasti äärettömän monen luvun summasta. Yhteenlaskettavat luvut voidaan tällöin järjestää jonoksi $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$. Luonnollinen tapa käsitellä ääretöntä summaa

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

on aloittaa yhteenlasku alkupäästä, ja tarkastella *osasummia* S_n

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Määritelmä 4.1. Jonoon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ liittyvää osasummien jonoa $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ kutsutaan sarjaksi, ja sitä merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Sanomme, että tämä sarja *suppenee*, merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$, jos osasummien jonolla on äärellinen raja-arvo S . Tätä raja-arvoa kutsutaan *sarjan summaksi*, ja käytämme merkintöjä

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Jos osasummien jono (S_n) ei suppene (tai suppenee kohti raja-arvoa $\pm\infty$) sanomme, että sarja *hajaantuu*. Tällöin merkitsemme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$. Yhteenlaskettavia a_n kutsutaan usein sarjan *termeiksi*.

Huomautus 4.2. Ei ole millään tavalla oleellista, että termien indeksointi alkaa luvusta 1. Jos indeksointi alkaa kokonaisluvusta k , niin määrittelemme vastaavasti

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^n a_i.$$

Etenkin tapaus $k = 0$ esiintyy usein.

Esimerkki 4.3. Päättymättömät desimaalikehitelmät voidaan tulkita suppeneviksi sarjoiksi. Esimerkiksi

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \dots$$

Esimerkki 4.4. Jonoa $a_n = 1, n \in \mathbf{N}$ vastaava sarja hajaantuu, sillä osasummien

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n 1 = n$$

jono kasvaa rajatta.

Esimerkki 4.5. Sarja $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \pm 1 \dots$ hajaantuu, sillä osasumma $S_n = 1$, kun n on parillinen, ja $S_n = 0$, kun n on pariton. Näin ollen raja-arvoa $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ei ole olemassa.

Lause 4.6. (Hajaantumistarkastin) Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Jos siis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$.

Todistus. Olkoon $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tällöin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

□

Esimerkki 4.7. Kurssilla Analyysi I näimme, että jonolla $a_n = q^n$ on raja-arvona nolla, kun $|q| < 1$, ja yksi, kun $q = 1$, ja että kyseinen jono hajaantuu muulloin. Näin ollen hajaantumistarkastimen nojalla geometrinen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ hajaantuu, kun $|q| \geq 1$. Kun $|q| < 1$ tämän sarjan osasummaksi tulee

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q}, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

Siis, kun $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

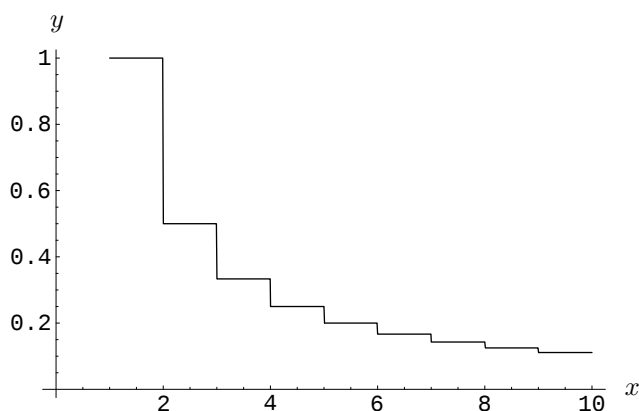
Esitämme kohta esimerkkejä siitä, että hajaantumistarkastin ei anna riittävää ehtoa sille, että sarja suppenisi. Toisin sanoen on mahdollista, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu, vaikka $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Näitä on hieman helpompi esittää sen jälkeen, kun ensin pohdimme hetken sarjojen suppenemisen ja epäoleellisten integraalien suppenemisen välistä yhteyttä.

Määritellään niin sanottu hakasfunktio, joka yksinkertaisesti pyöristää reaaliluvun alaspäin lähimmäksi kokonaisluvuksi

$$[x] = n, \quad \text{kun } x \in [n, n+1), n \in \mathbf{Z}.$$

Hakasfunktion avulla voidaan jono $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, \dots)$ muuttaa välillä $[1, \infty)$ määritellyksi reaalfunktioksi f_p asettamalla

$$f_p(x) = a_{[x]}.$$



Kuva 4.1: Harmonista sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ vastaava porraskunktio

Siis funktio f_p saa arvon a_1 välillä $x \in [1, 2)$, arvon a_2 välillä $x \in [2, 3)$ ja niin edelleen. Funktiota f_p kutsutaan joskus tästä syystä sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vastaavaksi porraskunktioksi. Kuvassa 4.1 näemme osan erään tällaisen porraskunktion kuvaajasta.

Olkoon sitten $n \in \mathbf{Z}, n > 0$ mielivaltainen. Välillä $x \in [n, n+1)$ funktio f_p saa vakioarvon a_n , joten

$$a_n = \int_n^{n+1} f_p(x) dx.$$

Käyttämällä hyväksi integraalin additiivisuutta yli välien saadaan tästä sarjan $\sum_n a_n$ osasummille esitys

$$S_n = \int_1^{n+1} f_p(x) dx.$$

Tässä valossa seuraava tulos ei ole lainkaan yllättävä.

Lemma 4.8. *Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee silloin ja vain silloin, kun epäoleellinen integraali*

$$\int_1^{\infty} f_p(x) dx$$

suppenee. Lisäksi tällöin integraalin arvo yhtyy sarjan summaan.

Todistus. Merkitään $F(c) = \int_1^c f_p$. Oletetaan ensin, että sarja suppenee, ja että sen summa on S . Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin $|S - S_n| < \varepsilon/2$ kunhan n on tarpeeksi suuri. Hajaantumistarkastimen nojalla myös $|a_n| < \varepsilon/2$ kunhan n on tarpeeksi suuri. Olkoon siis $M = M(\varepsilon)$ sellainen luku, että nämä molemmat ehdot toteutuvat, kun $n > M$. Jos sitten $c > M + 2$, niin

$$\begin{aligned} |F(c) - S| &= \left| F([c]) + \int_{[c]}^c f_p - S \right| \leq |F([c]) - S| + \left| \int_{[c]}^c f_p \right| \\ &\leq |S_{[c]-1} - S| + \int_{[c]}^c |f_p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

sillä $F(c) = \int_1^c f_p = \int_1^{[c]} f_p + \int_{[c]}^c f_p$, ja välillä $[[c], c]$ on $|f_p(x)| = |a_{[c]}| < \varepsilon/2$. Näin ollen epäoleellinen integraali suppenee kohti raja-arvoa S .

Oletetaan sitten, että kyseinen epäoleellinen integraali suppenee kohti raja-arvoa S . Tällöin $S_n = F(n+1)$ lähestyy raja-arvoaan sekin lukua S , kun $n \rightarrow \infty$. $\square$

Seuraus 4.9. Oletetaan, että sarjat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppenevat, ja että niiden summat ovat A ja B . Jos $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ovat mielivaltaisia vakioita, niin tällöin myös lineaarikombinaationa saatu sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ suppenee, ja sen summa on $\alpha A + \beta B$.

Todistus. Tämä seuraa välittömästi Lemmasta 4.8, koska olemme aikaisemmin nähneet, että sekä määrätty integraali että funktion raja-arvo vastaavalla tavalla ‘kunnioittavat lineaarikombinaation muodostamista’. $\square$

Sanotaan, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee itseisesti, jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ suppenee, ja että sarja suppenee ehdollisesti, jos se suppenee, mutta ei suppene itseisesti.

Seuraus 4.10. Itseisesti suppeneva sarja suppenee.

Todistus. Jos f_p on sarjaa $\sum_n a_n$ vastaava porrasfunktio, niin $|f_p|$ on sarjaa $\sum_n |a_n|$ vastaava porrasfunktio. Väite seuraa siten Lemmasta 4.8 ja vastaavasta epäoleellisia integraaleja koskevasta tuloksesta. $\square$

Sarjan suppeneminen riippuu siitä, miten sarjan äärettömän häntäpään termit käyttäytyvät. Esimerkiksi äärellisen monen termin poistaminen sarjasta (tai niiden arvojen muuttaminen) ei vaikuta sarjan suppenemiseen. Toisaalta suppenevan sarjan summan S suuruusluokka määräytyy alkupään ‘isoista termeistä’ jäännöstermien $R_n = S - S_n = \sum_{k>n} a_k$ lähestyessä nollaa, kun $n \rightarrow \infty$.

Esimerkki 4.11. Esimerkissä 4.7 näimme, että geometrinen sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

suppenee, ja sen summa $= 1/(1-q)$, kun $|q| < 1$ ja että sarja hajaantuu muulloin. Yleisemmän geometrisen sarjan saamme kertomalla tämän sarjan termeittäin luvulla aq^{n_0} . Seurauksen 4.9 nojalla saadun sarjan

$$aq^{n_0} + aq^{n_0+1} + aq^{n_0+2} + \cdots = \sum_{n=n_0}^{\infty} aq^n = \frac{aq^{n_0}}{1-q}.$$

kun $|q| < 1$ ja tämäkin sarja hajaantuu muulloin.

Koska emme osaa laskea (ainakaan Analyysin Peruslauseen avulla) porrasfunktion määrättyä integraalia, epäoleellisista integraaleista saamme sarjateorian puolella enemmän hyötyä, kun muodostamme sarjan funktiosta, emmekä funktiota sarjasta kuten porrasfunktion kohdalla. Kun lähdemme liikkeelle funktios-
ta f , voimme määritellä jonon $a_n = f(n)$ ja tutkia näin muodostuvaa sarjaa. Jotta arviot onnistuisivat, rajoitumme tapaukseen, jossa funktio f on ei-negatiivinen ja monotonisesti vähenevä.

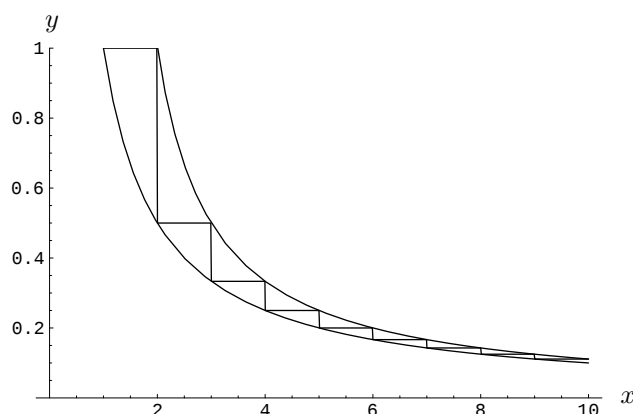
Lause 4.12. (Integraalitarkastin) Oletetaan, että funktio $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ on ei-negatiivinen ja vähenevä.

Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \downarrow \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x) dx \downarrow.$$

Molempien supetessa on voimassa arviot

$$\int_1^{\infty} f \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f.$$



Kuva 4.2: Funktion $f(x) = 1/x$ (alin), sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ vastaavan porraskfunktion, ja funktion $f(x-1)$ (ylin) kuvaajat yhdessä

Todistus. Olkoon f_p sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ vastaava porraskfunktio, ts. $f_p(x) = f([x])$. Funktion f monotonisuudesta seuraa, että aina, kun $x \geq 2$, niin

$$f(x) \leq f_p(x) \leq f(x-1).$$

Tätä havainnollistetaan Kuvassa 4.2.

Jos tässä integraali $\int_2^{\infty} f(x-1) dx = \int_1^{\infty} f$ suppenee, niin majoranttiperiaatteen nojalla myös integraali $\int_2^{\infty} f_p$ suppenee, ja sarja suppenee tällöin Lemman 4.8 nojalla. Jos taas $\int_2^{\infty} f_p$ suppenee, niin majoranttiperiaatteen nojalla $\int_2^{\infty} f$ suppenee. Koska lisäksi f monotonisuuden nojalla on integroitava välillä $[1, 2]$, integraali $\int_1^{\infty} f$ suppenee silloin ja vain silloin, kun $\int_2^{\infty} f$ suppenee. Integraalien supetessa niiden välillä on voimassa epäyhtälöt

$$\int_2^{\infty} f \leq \int_2^{\infty} f_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \right) - f(1) \leq \int_2^{\infty} f(x-1) dx = \int_1^{\infty} f.$$

Väitetyt arviot seuraavat näistä epäyhtälöistä lisäämällä niihin puolittain luku $f(1)$ ja ottamalla huomioon monotonisuuden seurauksena saatava arvio $\int_1^2 f \leq f(1)$. $\square$

Esimerkki 4.13. Koska integraali $\int_1^{\infty} (1/x) dx$ hajaantuu (Esimerkki 3.22), niin ns. *harmoninen sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

hajaantuu integraalitarkastimen nojalla. Yleisemmin Esimerkin 3.22 seurauksena nähdään, että kun $s > 0$, niin ns. *zeeta-sarja*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

suppenee, kun $s > 1$, ja hajaantuu, kun $0 < s \leq 1$.

Huomautus 4.14. Esimerkissä 4.13 esiintyvät suppenevat sarjat määrittelevät (osin) ns. Riemannin zeeta-funktion $\zeta(s)$. Riemann päätyi tutkimaan tätä funktiota pohtiessaan alkulukujen jakautumista. Kyseinen funktio on keskeisessä roolissa *analyttiseksi lukuteoriaksi* kutsutulla matematiikan osa-alueella. Aiheesta järjestetään Turun yliopistolla kursseja säännöllisesti.

Suppenevia sarjoja $\zeta(s)$, $s > 1$ kutsutaan myös *yliharmonisiksi sarjoiksi*.

Myöhemmillä kursseilla johdetaan menetelmiä, joiden avulla voidaan laskea funktion $\zeta(s)$ arvo, kun s on parillinen positiivinen kokonaisluku. Näistä useimmin esiintyy

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esimerkki 4.15. Todista välillä $s > 1$ voimassa olevat arviot

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{s}{s-1}.$$

Ratkaisu. Kun $s > 1$, niin epäoleellinen integraali $\int_1^{\infty} (1/x^s) dx = 1/(s-1)$. Koska sarjan $\zeta(s)$ ensimmäinen termi $= 1$, ja $1 + (1/(s-1)) = s/(s-1)$, niin väitteet seuraavat Lauseen 4.12 arvioista.

Tämän kappaleen lopuksi yksi hieman mutkikkaampi vastaesimerkki. Siinä esitettävää tekniikkaa käyttämällä saadaan tuotettua vastaesimerkkifunktioita eri tarkoituksiin. Analyysin sovellusten kannalta nämä eivät ole erityisen keskeisiä, mutta ne palvelevat sitä tarkoitusta, että ne osoittavat pelkkiin alkeisfunktioesimerkkeihin perustuvan ajattelun vaarat.

Edellisen luvun perusteella sinulle saattoi syntyä sellainen mielikuva, että jos epäoleellinen integraali $\int_0^{\infty} f$ suppenee, niin tällöin välttämättä $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, koska kaikissa niissä tarkastelemissamme tapauksissa, joissa integraali suppeni, tämä havainto piti paikkansa! Tämän luvun hajaantumistarkastin vielä vahvistaa tätä käsitystä. Se käsitys on kuitenkin virheellinen. Kuten näemme, funktio voi olla äärettömän pitkällä välillä jopa rajoittamaton, mutta epäoleellinen integraali silti suppenee!

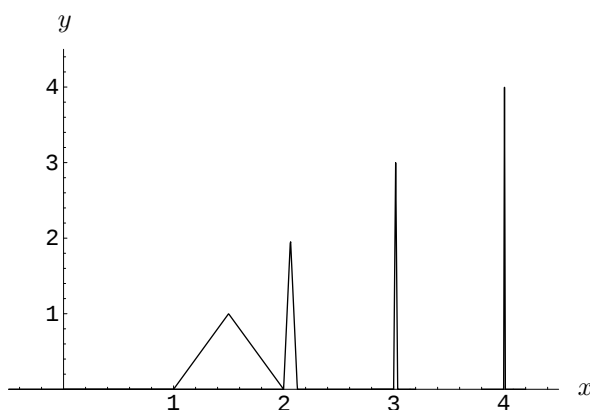
Esimerkki 4.16. Anna esimerkki välillä $[1, \infty)$ määritellystä jatkuvasta, ei-negatiivisesta funktiosta $f(x)$, jolle epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

suppenee, mutta joka ei ole rajoitettu, ja jolle raja-arvo $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ei ole olemassa.

Ratkaisu. Ideana on koota funktion kuvaaja äärettömän monesta kolmiomaisesta piikistä, jolloin piikkien ulkopuolella funktio saa arvon nolla. Piikkejä on numeroituvasti ääretön määrä, joten ne voidaan kätevästi

indeksoida positiivisilla kokonaisluvuilla. Oletetaan, että piikin numero k pinta-ala on a_k , ja että ko. piikki esiintyy osana funktion kuvaajaa välin $[k, k + 1]$ (pienellä) osavälillä. Tällöin $\int_1^{n+1} f = S(n) = \sum_{k=1}^n a_k$, joten jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin vastaava epäoleellinen integraalikin suppenee. Suppenevalle sarjalle tietenkin $a_n \rightarrow 0$, mutta piikkien korkeuden voidaan silti antaa kasvaa rajatta, kun $k \rightarrow \infty$, kunhan niitä vastaavasti kavennetaan.



Kuva 4.3: Rajoittamaton jatkuva funktio f , jolle $\int_1^{\infty} f = \pi^2/12$

Valitaan siis suppenevaa sarjaa $\zeta(2)/2$ seuraten $a_k = 1/(2k^2)$. Kolmiolla, jonka korkeus on $h = k$ ja kanta $a = 1/(k^3)$ on pinta-alana a_k . Jatkuvuuden takaamiseksi asetetaan piikin huippu puoliväliin (jolloin kolmiosta tulee tasakylkinen). Kyseisen kolmion nouseva reuna nousee h :n verran matkalla $a/2$, joten sen kulmakerroin on $2k^4$. Vastaavasti laskevan reunan kulmakerroin on $-2k^4$. Funktio määritellään siten välillä $[n, n + 1)$ paloittain seuraavasti

$$f(x) = \begin{cases} 2n^4(x - n), & \text{jos } x \in [n, n + \frac{1}{2n^3}), \\ 2n - 2n^4(x - n), & \text{jos } x \in [n + \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{n^3}), \\ 0, & \text{jos } x \in (n + \frac{1}{n^3}, n + 1). \end{cases}$$

Koska piikit eivät leikkaa toisiaan, piikkien reunat ovat lineaarisen polynomin kuvaajan osia, ja piikkien välillä funktio saa arvon nolla, niin tämän funktion kuvaaja on yhtenäinen murtoviiva. Integraali $\int_1^{\infty} f$ laskee piikkien pinta-alojen summan, joka on $\zeta(2)/2 = \pi^2/12$. Tämän funktion kuvaaja on Kuvassa 4.3

4.2 Suppenemistarkastimia

Tässä kappaleessa johdamme muutaman käyttökelpoisen kriteerin, joiden avulla kysymys annetun sarjan suppenemisestä tai hajaantumisesta voidaan jatkossa usein (mutta ei aina!) helposti ratkaista. Seuraavissa kahdessa tuloksessa on kyse siitä, että meillä on käytössämme positiiviterminen sarja, jonka suppeneminen tai hajaantuminen on jo tiedossa, ja sitten pystymme sen avulla tekemään vastaavan päätelmän (suppenee/hajaantuu?) jostakin toisesta sarjasta, kunhan pystymme vertailemaan kyseisten sarjojen vastintermejä toisiinsa sopivalla tavalla. Tästä syystä näitä tuloksia kutsutaan myös *vertailutarkastimiksi*.

Lause 4.17. (*Majoranttiperiaate*) Olkoot $K > 0$ jokin vakio. Oletetaan, että sarjojen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ termit toteuttavat jostakin rajasta n_1 alkaen epäyhtälön $0 \leq a_n \leq Kb_n$ (erityisesti siis $b_n \geq 0$, kun $n \geq n_1$). Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \downarrow \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow \quad (\text{itseisesti}).$$

Todistus. Väite seuraa suoraan epäoleellisten integraalien majoranttiperiaatteesta ja Lemmasta 4.8. $\square$

Esimerkki 4.18. Kun $a_n = (2^n + 4^n)/(3^n + 5^n)$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, koska kaikille $n \in \mathbf{Z}, n > 0$ on voimassa arvio

$$a_n = \frac{2^n + 4^n}{3^n + 5^n} \leq \frac{4^n + 4^n}{5^n} = 2 \left(\frac{4}{5}\right)^n,$$

ja majoroiva sarja $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, $q = 4/5 < 1$ suppenee.

Seuraus 4.19. (*Minoranttiperiaate*) Olkoon $K > 0$ jokin vakio. Oletetaan, että sarjojen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ termit toteuttavat jostakin rajasta n_1 alkaen epäyhtälön $|a_n| \leq Kb_n$ (erityisesti siis $b_n \geq 0$, kun $n \geq n_1$). Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \uparrow \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \uparrow.$$

Todistus. Jos majoroiva sarja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vastaoletuksen mukaisesti suppenisikin, niin tällöin majoranttiperiaatteen nojalla myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenisi. Tämä on ristiriita. $\square$

Esimerkki 4.20. Sarja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-5}{\sqrt[4]{n^7-3n^2}}$$

hajaantuu, koska aina, kun $n > 5$ on voimassa epäyhtälö

$$\frac{2n-5}{\sqrt[4]{n^7-3n^2}} \geq \frac{n}{n^{7/4}} = \frac{1}{n^{3/4}},$$

ja sarja $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n^{3/4}$ hajaantuu.

Huomautus 4.21. Vertailutarkastimia käytettäessä on huomattava, että jos halutaan perustella positiivitermisen sarjan hajoaminen, sarjan termejä on arvioitava *alaspäin*. Jos taas halutaan todistaa positiiviterminen sarja suppenevaksi, on termejä arvioitava *ylöspäin*. Edelleen, jos majoroiva sarja (yllä $\sum b_n$) hajaantuu, tai minoroiva sarja (yllä $\sum a_n$) suppenee, mitään johtopäätöksiä ei voida tehdä, vaan on keksittävä jokin toinen lähestymistapa.

Esimerkki 4.22. Oletetaan, että termit a_n ovat kaikki > 0 , ja että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee. Osoita, että tällöin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$$

suppenee myöskin. Kääntäen, jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu, niin myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ hajaantuu.

Ratkaisu. Logaritmifunktion jatkuvuuden nojalla $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + a_n) = \ln(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$. Näin ollen, jos hajaantumistarkastin (Lause 4.6) kertoo toisen sarjoista hajaantuvan, niin samoin käy toisenkin sarjan. Rajoituksetta voidaan siis olettaa, että $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + a_n)$. Palautamme mieleen raja-arvotuloksen kurssilta Analyysi I:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Tämän seurauksena saamme raja-arvotuloksen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1.$$

On siis olemassa sellainen rajaluku $n_1 \in \mathbf{N}$, että aina kun $n \geq n_1$, suhde $\ln(1+a_n)/a_n$ poikkeaa luvusta 1 vähemmän kuin $1/2$, eli

$$\begin{aligned} n > n_1 &\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} a_n \leq \ln(1+a_n) \leq \frac{3}{2} a_n. \end{aligned}$$

Jos nyt sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin saadaan arviot (kun $n > n_1$)

$$0 < \ln(1+a_n) \leq \frac{3}{2} a_n,$$

joten majoranttiperiaatteen nojalla sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ suppenee niin ikään.

Jos taas sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuu, niin epäyhtälöt (kun $n > n_1$)

$$0 < a_n \leq \frac{1}{1/2} \ln(1+a_n)$$

yhdessä minoranttiperiaatteen kanssa takaavat, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ hajaantuu sekin.

Vertailutarkastinta käytettäessä tunnettuna vertailusarjana esiintyy ylivoimaisesti useimmin geometrinen sarja (sekä suppeneva että hajaantuva). Seuraavaksi yleisimpiä ovat harmoninen ja yliharmoninen sarja. Seuraavaksi johdamme geometrisia sarjoja vertailusarjoina käyttäen suppenemis/hajoamistarkastimen, joka perustuu ainoastaan tutkittavan sarjan termien ominaisuuksiin. Siinä tutkitaan kahden peräkkäisen termin osamäärän a_{n+1}/a_n käyttäytymistä, kun $n \rightarrow \infty$.

Lause 4.23. (Osamäärätarkastin)

(i) Oletetaan, että on olemassa sellaiset vakio $L, 0 < L < 1$ ja luku $n_1 \in \mathbf{N}$, että sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ termit toteuttavat epäyhtälön

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq L \quad \text{aina, kun } n \geq n_1.$$

Tällöin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$. Suppeneminen on vieläpä itseistä.

(ii) Oletetaan, että on olemassa sellaiset vakio $L \geq 1$ ja luku $n_1 \in \mathbf{N}$, että sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ termit toteuttavat epäyhtälön

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq L \quad \text{aina, kun } n \geq n_1.$$

Tällöin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$.

Todistus. Merkitään kummassakin tapauksessa $A = |a_{n_1}|$. Tällöin on oltava $A > 0$, koska muutoin kahden peräkkäisen termin osamäärää ei voitaisi muodostaa.

Tapauksessa (i) saadaan suoraviivaisella induktiolla, että $|a_{n_1+k}| \leq AL^k$ aina, kun $k \geq 0$. Näin ollen suppeneva geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} AL^k$ majoroi alkuperäisen sarjan jäännöstermiä $\sum_{n \geq n_1} a_n$. Väite seuraa majoranttiperiaatteesta.

Tapauksessa (ii) nähdään induktiolla, että $|a_{n_1+k}| \geq AL^k$. Näin ollen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ja väite seuraa hajaantumistarkastimesta. $\square$

Osamäärätarkastimesta käytetään usein muotoa, jossa tutkitaan raja-arvoa $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n)$. Tällöin on oltava tarkkana, sillä tapauksessa, missä kyseinen raja-arvo on yksi, EI VOIDA PÄÄTELLÄ YHTÄÄN MITÄÄN!

Lause 4.24. (Osamäärätarkastin) Oletetaan, että sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ termien suhteen itseisarvolla on raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = K.$$

Jos $K < 1$, niin sarja suppenee itseisesti. Jos $K > 1$ (tai $K = \infty$), niin sarja hajaantuu.

Todistus. Olkoon $L = (K+1)/2$ lukujen K ja 1 keskiarvo. Jos $K < 1$, niin tällöin $K < L < 1$, joten oletuksen perusteella jostakin luvusta $n_1 = n(\varepsilon = L - K)$ alkaen $|a_{n+1}/a_n| \leq L$. Sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppeneminen seuraa siten osamäärätarkastimen ensimmäisestä versiosta.

Jos $K > 1$, niin tällöin $K > L > 1$, joten oletuksen perusteella jostakin luvusta $n_1 = n(\varepsilon = L - K)$ alkaen $|a_{n+1}/a_n| \geq L$. Sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hajaantuminen seuraa siten osamäärätarkastimen ensimmäisestä versiosta. $\square$

Koska tässä tehdään usein virheitä, ensimmäinen esimerkki on varoittava.

Esimerkki 4.25. Anna esimerkit kahdesta sellaisesta sarjasta, joista toinen suppenee, toinen hajaantuu, ja kummallekin $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = 1$.

Ratkaisu. Harmonisella sarjalla $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ on $a_n = 1/n$, joten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Harmoninen sarja kelpaa siten hajaantuvaksi esimerkiksi.

Suppeneva esimerkki saadaan yliharmonisesta sarjasta, jolle $a_n = 1/n^2$. Tässäkin

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1,$$

kun $n \rightarrow \infty$, ja sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ suppenee kohti summaansa $\zeta(2)$.

Esimerkki 4.26. Osoita, että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

suppenee.

Ratkaisu. Tässä $a_n = 1/n!$, joten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Sarjan suppeneminen seuraa siten Lauseesta 4.24. Seuraavassa luvussa näytämme, että tämän sarjan summa on Neperin luku e .

Esimerkki 4.27. Olkoon $x \in \mathbf{R}$ jokin reaalinen parametri. Osoita Esimerkkiä 4.26 yleistäen, että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

suppenee itseisesti.

Ratkaisu. Nyt sarjan yleinen termin on $a_n = x^n/n!$. Tällöin

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right|.$$

Koska tämä $\rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, niin väite seuraa.

Seuraava esimerkki osoittaa, että Lausetta 4.23 voidaan käyttää silloinkin, kun peräkkäisten termien suhteella ei ole raja-arvoa.

Esimerkki 4.28. Tutki sarjan

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2^2}{3^4} + \frac{2^2}{3^5} + \frac{2^3}{3^6} + \dots$$

suppenemista. Tässä sarjan yleisen termin lauseke on

$$a_n = \frac{2^{[n/2]}}{3^n},$$

kaikille $n = 1, 2, 3, \dots$

Ratkaisu. Tässä kahden peräkkäisen termin suhde a_{n+1}/a_n on

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{2^k/3^{2k+1}}{2^k/3^{2k}} = \frac{1}{3},$$

kun $n = 2k$ on parillinen. Kun $n = 2k + 1$ on pariton, suhteeksi tulee

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{2^{k+1}/3^{2k+2}}{2^k/3^{2k+1}} = \frac{2}{3}.$$

Näin ollen raja-arvoa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n$ ei ole olemassa. Sarja kuitenkin suppenee Lauseen 4.23 nojalla, koska siinä voidaan kohdassa (i) valita $L = 2/3 < 1$.

4.3 Vuorottelevat sarjat ja termien järjestyksen vaihto

Jos sarjan termeistä kaikki äärellistä poikkeusjoukkoa lukuun ottamatta ovat saman merkkisiä (+ tai −), niin sarjan mahdollinen suppeneminen on aina itseistä, koska äärellisen monen termin jättäminen pois sarjasta ei muuta sen suppenemista. Näin ollen ehdollista suppenemista voi esiintyä vain silloin, kun sarjassa on äärettömän monta positiivista ja äärettömän monta negatiivista termiä. Yksinkertaisin tilanne, jossa näin käy on ns. *vuorotteleva (alternoiava) sarja*.

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

missä $a_n > 0 \forall n \in \mathbf{N}$. Näiden suppenemista käsittelee seuraava erittäin yksinkertainen kriteeri.

Lause 4.29. (*Leibnizin lause*) Jos

(i) *positiivisten lukujen jono $(a_n), n \in \mathbf{N}$ on vähenevä, eli*

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots \geq 0,$$

ja

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,

niin vuorotteleva sarja $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ suppenee. Lisäksi jäännöstermi $R_n = S - S_n$ on samanmerkkinen kuin ensimmäinen poisjätetty termi sekä

$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$

Todistus. Tutkitaan erikseen parillisten ja parittomien osasummien jonoja. Jos $k \in \mathbf{N}$, niin oletuksen (i) nojalla

$$S_{2k+2} = S_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k} = S_{2k} - (a_{2k+1} - a_{2k}) \leq S_{2k},$$

joten parillisten osasummien jono on vähenevä: $S_0 \geq S_2 \geq S_4 \geq \cdots$. Vastaavasti näemme, että

$$S_{2k+3} = S_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3} = S_{2k+1} + (a_{2k+2} - a_{2k+3}) \geq S_{2k+1},$$

joten parittomien osasummien jono on kasvava: $S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \cdots$. Kaikille $k \in \mathbf{N}$ on lisäksi voimassa epäyhtälö

$$S_{2k+1} = S_{2k} - a_{2k+1} \leq S_{2k}. \quad (*)$$

Jokainen parillinen osasumma on siis $\geq$ kuin sitä edeltävä pariton osasumma, joka on puolestaan $\geq S_1$. Näin ollen parillisten osasummien jono $(S_{2k}), k \in \mathbf{N}$ on vähenevä ja alhaalta rajoitettu. Monotonisten jonojen peruslauseen nojalla tällä jonolla on raja-arvo

$$S_{\text{parillinen}} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k}.$$

Edelleen epäyhtälön (*) nojalla jokainen pariton osasumma on $\leq$ kuin sitä edeltänyt parillinen osasumma, joka on puolestaan $\leq S_0$. Näin ollen jono $(S_{2k+1}), k \in \mathbf{N}$ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, joten sillä on raja-arvo

$$S_{\text{pariton}} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1}.$$

Oletuksen (ii) nojalla

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{2k} - S_{2k+1}) = S_{\text{parillinen}} - S_{\text{pariton}}.$$

Näin ollen $S_{\text{parillinen}} = S_{\text{pariton}} = S$, eli parillisten osasummien ja parittomien osasummien jonoilla on yhteinen raja-arvo S , mikä on tällöin myös sarjan summa. Osajonojen monotonisuuden perusteella sitten

$$S_0 \geq S_2 \geq S_4 \geq \dots \geq S \geq \dots S_5 \geq S_3 \geq S_1.$$

Jäännöstermiä koskeva väite seuraa tästä, koska sarjan osasummaa muodostettaessa seuraavan termin ottaminen mukaan 'siirtää osasumman raja-arvon S toiselle puolelle'. $\square$

Huomautus 4.30. Leibnizin lausetta sovellettaessa riittää tietenkin, että sen ehdot (termien etumerkkien vuorottelu ja itseisarvojen monotoninen väheneminen kohti nollaa) toteutuvat jostakin indeksin arvosta $n_1 \in \mathbf{N}$ alkaen. Tällöin tietenkin jäännöstermiä koskeva väite on voimassa vain, kun $n \geq n_1$.

Esimerkki 4.31. Koska jono $(a_n), a_n = 1/n, n \in \mathbf{Z}_+$ toteuttaa Leibnizin lauseen ehdot, niin sarja

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

suppenee. Suppeneminen on ehdollista, koska termien itseisarvoista muodostuva harmoninen sarja hajaantuu. Olkoon tämän sarjan summa S . Leibnizin lauseen arvioista $S_2 \leq S \leq S_3$ (huomaa, että nyt kun parillisen indeksin omaavat termit ovatkin negatiivisia, niin parilliset osasummat ovatkin $\leq S$, ja parittomat $\geq S$) näemme, että

$$\frac{1}{2} \leq S \leq \frac{5}{6}.$$

Seuraavassa luvussa osoitamme, että $S = \ln 2$. Tässä suppeneminen on sangen hidasta. Jotta sarjan osasumma S_n olisi oikein 3 desimaalin tarkkuudella, tulee jäännöstermin R_n olla itseisarvoltaan $< 1/1000$. Leibnizin lauseen nojalla tähän päästään vasta, kun $n \geq 1000$, jolloin osasummassa on mukana jo tuhat termiä.

Esimerkin 4.31 ehdollisesti suppenevalla sarjalla on yhteisiä piirteitä Esimerkin 3.42 epäoleellisen integraalin

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

kanssa. Näimme, että tämä integraali suppenee, mutta ei suppene itseisesti, koska muutoin integraalin $\int_{\pi}^{\infty} (1/x) dx$ tulisi myös supeta. Tässä integraalissa säännöllisesti merkkiään vaihtava sinifunktio tuottaa vuorottelua vastaavan positiivisten ja negatiivisten termien osittaisen kumoutumisen.

Suppenevassa sarjassa voidaan perättäisiä termejä yhdistellä lisäämällä sarjaan sulkuja, ja näin saatu uusi sarja suppenee, ja sillä on sama summa alkuperäisen sarjan kanssa. Tämä johtuu siitä, että suluttamalla saadun sarjan osasummien jono on alkuperäisen sarjan osasummien jonon osajono, joten se suppenee kohti samaa raja-arvoa. Näin ollen Esimerkin 4.31 sarjasta voidaan muodostaa uusi sarja

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right),$$

jonka termit on saatu laskemalla yhteen kaksi alkuperäisen sarjan perättäistä termiä. Tämän sarjan osasummat ovat tarkalleen ne alkuperäisen sarjan osasummat, joissa on parillinen määrä yhteenlaskettavia. Tämän sarjan yleinen termi on

$$\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{2k - (2k-1)}{2k(2k-1)} = \frac{1}{2k(2k-1)},$$

joten se suppenee itseisesti, koska sitä majoroi suppeneva yliharmoninen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$. Sen suppeminen on kuitenkin melkein yhtä hidasta kuin alkuperäisen sarjankin — joka toinen osasumma esiintyy, joten siihen tarkkuuteen, mihin aikaisemmin vaadittiin tuhat termiä riittää nyt 500, mitä ei ole syytä pitää merkittävänä parannuksena tilanteeseen.

Sulkujen poistaminen suppenevasta sarjasta sen sijaan ei ole luvallista, ellei niin syntynyt uusi sarja sekin suppene (jolloin äsken esitettyjen perustelujen nojalla sulkujen lisääminen takaisin ei muuta sarjan suppenemista eikä summaa). Varoittavana esimerkkinä toimii suppeneva sarja

$$1 + 0 + 0 + \cdots = 1 + (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots,$$

jonka summa on selvästi 1. Jos tästä poistamme sulut saamme sarjan

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

joka hajaantuu, koska sen osasummina esiintyvät vuorotellen luvut 1 ja 0.

Ehdollisesti suppenevan sarjan termien järjestyksen vaihtaminenkaan ei ole luvallista (tilanne on siis hyvin erilainen kuin äärellisen monen luvun summan tapauksessa), kuten seuraavaksi näemme.

Esimerkki 4.32. Osoita, että kun Esimerkin 4.31 sarjan $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ termit lasketaankin yhteen järjestyksessä

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots,$$

niin syntyvä sarja suppenee, mutta sen summan arvo onkin $S/2 \neq S$.

Ratkaisu. Näimme jo sulkuja lisäämällä, että

$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right),$$

joten

$$\frac{S}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right).$$

Käyttämällä Seurausta 4.9 saadaan sitten, että

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= S - \frac{S}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) - \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \cdots\end{aligned}$$

Merkitään sarjaa, joka saadaan poistamalla tästä sulut

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots,$$

ja olkoot $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$ vastaavat osasummat. Yllä tarkastellun sarjan osasummina esiintyvät luvut $S_{3n}, n \in \mathbf{Z}_+$, joten jo nähdyn perusteella

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{S}{2}.$$

Toisaalta muut, muotoja S_{3n+1} ja S_{3n+2} olevat osasummat eivät poikkea osasummista S_{3n} merkittävästi. Nimittäin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{3n} + b_{3n+1}) = \frac{S}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = \frac{S}{2},$$

ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{3n+1} + b_{3n+2}) = \frac{S}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n} = \frac{S}{2}.$$

Koska kaikilla näillä kolmella osajonolla on yhteinen raja-arvo $S/2$, se on myös sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ summa. Esimerkissä 4.31 näimme, että $S > 1/2$, joten $S \neq S/2$.

Kohta törmäämme tilanteisiin, joissa emme halua spesifioida termien järjestystä. Sitä varten todistamme, ettei Esimerkin 4.32 tapainen anomalia voi esiintyä, jos sarja suppenee itseisesti. Eli itseisesti suppuenevan sarjan kohdalla termien järjestyksen vaihtaminen on luvallista.

Lause 4.33. *Olkoon $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ itseisesti suppueneva sarja, ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ siitä termien järjestystä vaihtamalla saatu sarja. Tällöin tämäkin sarja suppenee itseisesti, ja sen summa on S .*

Todistus. Oletetaan ensin, että sarjan kaikki termit ovat ei-negatiivisia: $a_k \geq 0, k = 1, 2, \dots$. Merkitään osasummia $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ja $T_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Koska osasummien jono (S_n) on kasvava ja suppenee kohti raja-arvoa S , on olemassa sellainen rajaluku $N(\varepsilon)$, että $S - \varepsilon < S_\ell \leq S$ aina, kun $\ell \geq N(\varepsilon)$. Termit $a_k, k = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$ esiintyvät kukin myös toisessa sarjassa: $a_k = b_{f(k)}$, missä $f : \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{Z}_+$ on termien järjestyksen vaihtoa kuvaava bijektio. Oletetaan sitten, että n on suurempi kuin mikään luvuista $N(\varepsilon), f(1), f(2), \dots, f(N(\varepsilon))$. Tutkitaan osasummaa T_n . Koska kyseessä on äärellisen monen termin summa, sen summa ei riipu yhteenlaskettavien järjestyksestä. Olkoon $k \leq N(\varepsilon)$ on mielivaltainen indeksi. Luvun n valinnan nojalla $f(k) < n$. Näin ollen termi $a_k = b_{f(k)}$ on mukana osasummassa T_n . Osasumma T_n on siten saatu lisäämällä osasummaan $S_{N(\varepsilon)}$ joitakin ei-negatiivisia termejä, eli voimme päätellä, että

$$T_n \geq S_{N(\varepsilon)} \geq S - \varepsilon.$$

Olkoon toisaalta ℓ suurin luvuista $f^{-1}(j), j = 1, 2, \dots, n$. Tällöin vastaavasti jokainen termeistä $b_j = a_{f^{-1}(j)}$ on mukana osasummassa S_ℓ , ja saamme vastaavasti epäyhtälöt

$$T_n \leq S_\ell \leq S.$$

Näin ollen $S - \varepsilon \leq T_n \leq S$. Koska tämä pitää paikkansa kaikille esitetyn rajan ylittäneille indekseille n , on todistettu, että $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = S$. Väite pitää siis paikkansa siinä tapauksessa, että mikään sarjan termeistä ei ole negatiivinen.

Käsittellään sitten yleinen tapaus, jossa sarjassa on ääretön määrä sekä positiivisia että negatiivisia termejä. Jos $x \in \mathbf{R}$, merkitään sen positiivista osaa (vrt. Lause 2.15) $x^+ = (x + |x|)/2$ ja vastaavasti negatiivista osaa $x^- = (|x| - x)/2$. Tällöin on voimassa epäyhtälöt

$$0 \leq x^+ \leq |x|, \quad 0 \leq x^- \leq |x|$$

sekä yhtälöt

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-.$$

Sarjat $\sum_n a_n^+$ ja $\sum_n a_n^-$ suppenevat itseisesti, koska suppeneva sarja $\sum_n |a_n|$ majoroi niitä. Jo todistetun perusteella

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^+ - b_n^-) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \end{aligned}$$

missä käytimme Seurausta 4.9, yhtälöä $x^+ - x^- = x$ sekä edeltäviä yhtälöitä.

Soveltamalla jo todistettua tulosta sarjaan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nähdään, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ suppenee, joten myös sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suppeneminen on itseistä. $\square$

Tutkitaan luvun lopuksi kahden sarjan kertolaskua. Kurssilla Analyysi I esitettiin tulos, jonka mukaan rationaalilukujen joukko on numeroituva. Tutkimalla sen todistusta näet, että joukko $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ on sekin numeroituva. Näin ollen parit (i, j) voidaan asettaa jonoon. Esimerkkejä tällaisista jonoista näemme kohta. Olkoot siis $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ kaksi sarjaa. Kutsumme (numeroituvasti äärettömän monen termin) summaa

$$\sum a_i b_j$$

näiden sarjojen *tulosarjaksi*, jos tässä summassa esiintyvät kaikki indeksiparit (i, j) jossakin järjestyksessä.

Lause 4.34. Oletetaan, että sarjat $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = T$ suppenevat itseisesti. Tällöin jokainen tulosarja $\sum a_i b_j$ suppenee itseisesti kohti tuloa ST .

Todistus. Olkoon $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, missä $c_k = a_{i(k)} b_{j(k)}$, jokin tulosarja. Tutkitaan osasummaa

$$U_n = \sum_{k=0}^n |c_k|.$$

Olkoon N suurin indekseistä $i(k), k = 0, 1, \dots, n$ ja M suurin indekseistä $j(k), k = 0, 1, \dots, n$. Tällöin jokainen osasumman U_n termi $|c_k| = |a_{i(k)}| \cdot |b_{j(k)}|$ esiintyy terminä osasummien tulossa $\left(\sum_{i=0}^N |a_i|\right) \left(\sum_{j=0}^M |b_j|\right)$. Tämä tulo $\leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|\right)$, joten myös

$$U_n \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|\right).$$

Kasvava jono U_n on siis ylhäältä rajoitettu. Näin ollen se suppenee, eli tulosarja $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ suppenee itseisesti. Lauseen 4.33 nojalla sitten kaikki tulosarjat suppenevat, ja niillä on sama summa. Olkoot sitten $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$ ja $T_n = \sum_{j=0}^n b_j$. Sellaisessa tulosarjassa, jossa ryhmittelemme tulot $a_i b_j$ sen mukaan, miten suuri suurempi indekseistä i ja j on (alla sulut osoittavat ryhmittelyn)

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_1 b_1) + (a_0 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2) + \dots$$

osasummina esiintyvät tulot $S_0 T_0, S_1 T_1, S_2 T_2, \dots$ (aina sulkulausekkeen päättyessä). Kahden suppenevan jonon tulona jono $(S_n T_n)$ suppenee kohti raja-arvoa ST . Koska nämä esiintyivät tässä suppenevan tulosarjan osasummina, myös tulosarjan osasummien jono suppenee kohti samaa raja-arvoa ST . $\square$

Laskennallisesti (etenkin seuraavassa luvussa) kätevin tulosarja on sellainen, jossa tulot $a_i b_j$ ryhmitellään indeksien summan $i + j$ mukaan:

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + \dots + (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-2} b_2 + \dots + a_0 b_n) + \dots$$

Kun kiinnitetään summan arvoksi $i + j = k$, niin indeksillä i on mahdollisia arvoja $i = 0, 1, 2, \dots, k-1, k$, ja toinen indeksi j määräytyy yhtälöstä $i + j = k \Leftrightarrow j = k - i$. Näin saadaan itseisesti suppenevien sarjojen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ns. *Cauchyn tulo*.

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}\right).$$

Esimerkki 4.35. Kun $|x| < 1$, niin geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ suppenee itseisesti, ja sen summa $= 1/(1-x)$. Tämän sarjan Cauchyn tulona sen itsensä kanssa saadaan siten tulos

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} x^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k x^i x^{k-i}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

Siis aina, kun $|x| < 1$, on voimassa kaava

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$$

Luku 5

Potenssisarjoista

5.1 Funktiojonojen ja -sarjojen tasainen suppeneminen

Tässä luvussa tarkastelemme sellaisia jonoja (vast. sarjoja), joiden jäsenet (vast. termit) ovat lukujen asemesta jollakin välillä I määriteltyjä funktioita. Sanomme, että funktioiden $f_n : I \rightarrow \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$ muodostama jono (f_n) *suppenee pisteittäin joukossa* I , jos jokaisessa pisteessä $x \in I$ lasketuista funktioiden arvoista muodostettu lukujono $(f_n(x)), n \in \mathbf{N}$ suppenee. Tällöin raja-arvot määrittelevät funktion $f : I \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Kvanttorikielellä pisteittäinen suppeneminen ilmaistaan seuraavasti

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(x, \varepsilon) \in \mathbf{N})(n > N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon).$$

Kvanttorien kirjoittamisjärjestys jo kertoo, että rajaluku N riippuu paitsi toleranssin ε arvosta, niin myös luvusta x . Tätä on selvyys vuoksi korostettu kirjoittamalla nämä riippuvuudet näkyviin muodossa $N = N(x, \varepsilon)$.

Vastaavasti sanomme, että funktioista $w_n : I \rightarrow \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$ muodostettu sarja

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$$

suppenee pisteittäin joukossa I , jos jokaisessa pisteessä $x \in I$ lasketuista funktioiden arvoista muodostettu numeerinen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$ suppenee. Tällöin sarjojen summat määrittelevät funktion $S : I \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto S(x)$. Käytetään osasummafunktiosta merkintää

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n w_k(x),$$

jolloin sarjan $\sum_n w_n(x)$ pisteittäinen suppeneminen on siten jo määritelmän mukaisesti ekvivalenttia osasummafunktioiden jonon (S_n) pisteittäisen suppenemisen kanssa. Pisteittäin suppenevan sarjan $S(x) = \sum_n w_n(x)$ yhteydessä käytetään sen jäännöstermistä $S(x) - S_n(x)$ merkintää $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k>n} w_k(x)$. Kun $S_n(x) \rightarrow S(x)$ pisteittäin välillä I , niin $R_n(x) \rightarrow 0$ kaikille $x \in I$.

Haluaisimme, että rajafunktio $f(x)$ ‘perisi’ jonon jäsenten $f_n(x)$ hyvät ominaisuudet kuten integroituvuuden, jatkuvuuden ja derivoituvuuden. Seuraava esimerkki osoittaa, että tämä ei ole automaattista.

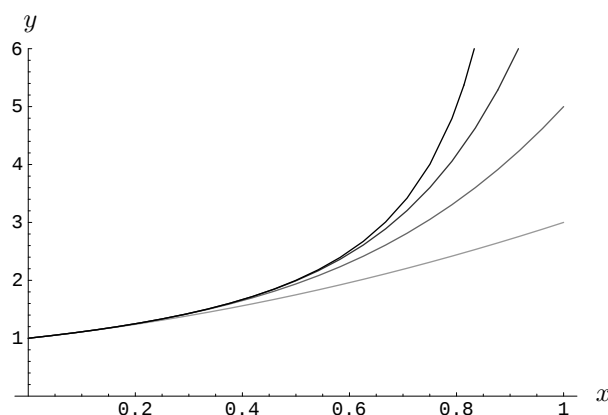
Esimerkki 5.1. Funktiot $f_0(x) = 1$, $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \dots$ on määritelty välillä $I = [0, 1]$. Jokainen funktioista $f_n(x)$ on jatkuva ja derivoituva välillä I . Funktiojono (f_n) suppenee välillä I pisteittäin kohti sääntöjen $f(1) = 1$ ja $f(x) = 0$, $x \in [0, 1)$ antamaa rajafunktiota f . Rajafunktio ei kuitenkaan ole jatkuva eikä näin ollen myöskään derivoituva pisteessä $x = 1$.

Tämän ongelman alkusyyksi osoittautuu se, että pisteittäisessä suppenemisessä rajaluku $N = N(x, \varepsilon)$ voi hyvin voimakkaasti riippua pisteen x valinnasta. Vaikka kutakin pistettä $x \in I$ kohti jokin rajaluku löytyy, niin kiinteällä muuttujan ε arvolla rajaluku voidaan joutua valitsemaan mielivaltaisen suureksi, kun x liikkuu välin I sisällä.

Esimerkki 5.2. Tutki rajaluvun $N = N(x, \varepsilon)$ riippuvuutta pisteestä x välillä $I = (-1, 1)$ pisteittäin supenevan geometrisen sarjan

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

tapauksessa.



Kuva 5.1: Sarjan $S(x) = 1/(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ summafunktio (musta) sekä osasummafunktiot $S_2(x)$ (vaalein harmaa), $S_4(x)$ ja $S_7(x)$ (tummin harmaa). Sarja ei suppene tasaisesti välillä $[0, 1)$ (Määritelmä 5.4).

Ratkaisu. Osasumma on tällä kertaa $S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$, ja sitä vastaava jäännöstermi

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Valitaan testiä varten $\varepsilon = 1/100$. Jos $x = 1/2 \in I$, niin $|R_n(x)| = 1/2^n$, mikä on $< \varepsilon$, kun $n > 6$, joten $N(1/2, 1/100) = 6$. Jos $x = 99/100 \in I$, niin $x^{100} = [1 - (1/100)]^{100} \approx 1/e$. Koska nimittäjä on tällöin $1 - x = 1/100$, saamme likimääräisen arvion $R_{100k}(99/100) \approx 100e^{-k}$. Jotta tämä olisi itseisarvoltaan $< \varepsilon$, on valittava $k \geq 10$, joten saamme arvion $N(99/100, 1/100) = 1000$ (tarkempi lasku osoittaisi, että $N(99/100, 1/100) = 917$ riittää).

Tekemällä lisätarkasteluja näkisimme, että $N(x, 1/100) \rightarrow \infty$ kun $x \rightarrow 1-$. Toisin sanoen suppeneminen on sitä hitaampaa, mitä lähempänä lukua 1 olemme. Samaan johtopäätökseen viittaa myös se, ettei katkaisuvirhe $R_n(x)$ ole rajoitettu välillä I , sillä $R_n(1 - 1/n) \approx ne$.

Myös pistettä $x = -1$ oikealta lähestyttäessä rajaluku $N(x, \varepsilon)$ kasvaa rajatta. Tilanne ei siellä ole aivan yhtä paha, koska nimittäjä $1 - x$ ei siellä samalla lähesty nollaa.

Ns. *tasaisessa suppenemisessä* haluamme välttyä siltä, että rajaluku N riippuisi näin voimakkaasti muuttujan x arvosta. Määrittelemme tasaisen suppenemisen erikseen jonoille ja sarjoille.

Määritelmä 5.3. Funktiojono (f_n) suppenee kohti rajafunktiota $f(x)$ *tasaisesti välillä* I , jos kutakin lukua $\varepsilon > 0$ kohti voidaan valita sellainen rajaluku $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, että virhe $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ välin I jokaisessa pisteessä x aina, kun $n > N$. Kvanttorikielellä tämä ilmaistaan ehtona

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N})(\forall x \in I)(n > N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon).$$

Määritelmä 5.4. Sarja $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$ suppenee kohti summafunktiota $S(x)$ *tasaisesti välillä* I , jos kutakin lukua $\varepsilon > 0$ kohti voidaan valita sellainen rajaluku $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, että katkaisuvirhe $|R_n(x)| < \varepsilon$ välin I jokaisessa pisteessä x aina, kun $n > N$. Kvanttorikielellä tämä ilmaistaan ehtona

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N})(\forall x \in I)(n > N \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon).$$

Tasaisesta suppenemisestä käytetään (etenkin liitutaululla) merkintää $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \downarrow$ (tasaisesti I).

Huomautus 5.5. Eksistenssi- tai universaalikvanttorin yhteydessä esiintyminen aina sitoo muuttujan, ja esiintymisjärjestys määrää sitomisjärjestyksen. Niinpä pisteittäisessä suppenemisessä ensin kiinnitetään muuttujan $x \in I$ arvo, sitten muuttujan $\varepsilon > 0$, ja sen jälkeen kysytään löytyykö sopivaa rajalukua, joka toteuttaa tavallisen implikaation näillä kiinteillä arvoilla. Tällöin rajaluku saa riippua aikaisemmin kiinnitetyistä muuttujien arvoista. Tasaisessa suppenemisessä taas kiinnitetään ensin ε , ja sen jälkeen kysytään löytyykö sopivaa rajalukua, jolle vaadittu implikaatio toteutuisi kaikilla muuttujan x arvoilla. Ennen eksistenssikysymyksen ilmaantumista on tällöin kiinnitetty ε , joten rajaluku saa tietenkin edelleen riippua muuttujan ε arvosta.

Seuraavat esimerkit valottavat pisteittäisen ja tasaisen suppenemisen välistä eroa.

Esimerkki 5.6. Osoita, että Esimerkin 5.1 jono $f_n(x) = x^n$ ei suppene tasaisesti välillä $J = [0, 1)$.

Ratkaisu. Totesimme jo aikaisemmin, että kaikilla $x \in J$ on voimassa $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Väitämme, ettei tasaisen suppenemisen ehto toteudu, kun valitsemme $\varepsilon = 1/2$. Tämä nähdään seuraavasti. Kiinnitetään luonnollinen luku n . Tällöin

$$\lim_{x \rightarrow 1-} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x \rightarrow 1-} x^n = 1.$$

Joukosta J löytyy siis läheltä ykköstä sellainen luku x , että $f_n(x) > 1/2 = \varepsilon$. Näin ollen epäyhtälö

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| < \varepsilon$$

ei ole voimassa kaikissa välin J pisteissä olipa n miten suuri luku tahansa.

Esimerkki 5.7. Valitaan luku $a \in (0, 1)$. Rajoitetaan Esimerkin 5.2 tarkastelu suljetulle välille $I_a = [-a, a]$. Osoita, että välillä I_a sarjan

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

suppeneminen on tasaista.

Ratkaisu. Jäännöstermi $R_n(x)$ laskettiin jo Esimerkin 5.2 yhteydessä, joten sen itseisarvo on $|R_n(x)| = |x^{n+1}|/(1-x)$. Välillä I_a osoittaja saa suurimman arvonsa pisteissä $x = \pm a$ ja nimittäjä pienimmän arvonsa pisteessä $x = a$, joten on voimassa arvio

$$|R_n(x)| \leq \frac{a^n}{1-a} \quad \text{aina, kun } x \in I_a.$$

Koska nimittäjä $1-a > 0$, niin $a^n/(1-a) < \varepsilon$ silloin ja vain silloin, kun $a^n < (1-a)\varepsilon$. Koska tässä kantaluku $a \in (0, 1)$, funktio $f(x) = a^x$ on kaikkialla vähenevä. Siis epäyhtälö $f(x) < (1-a)\varepsilon$ toteutuu aina, kun $n > \log_a((1-a)\varepsilon)$. Näin ollen myös $|R_n(x)| < \varepsilon$ kaikille $x \in I_a$, kunhan $n > N(\varepsilon) = \log_a((1-a)\varepsilon)$.

Lause 5.8. Jos funktiot $f_n(x)$ ovat jatkuvia välillä I ja jono

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ tasaisesti välillä } I,$$

niin tällöin rajafunktio $f(x)$ on jatkuva välillä I .

Vastaavasti jos funktiot $w_n(x)$ ovat jatkuvia välillä I , ja jos sarja $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$ suppenee tasaisesti välillä I , niin sarjan summafunktio $S(x)$ on jatkuva välillä I .

Todistus. Kiinnitetään piste $x_0 \in I$ ja muuttujan $\varepsilon > 0$ arvo. Tasaisen suppenemisen nojalla on olemassa sellainen luku $N(\varepsilon)$, että kaikille $x \in I$ on voimassa arvio

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{aina, kun } n > N(\varepsilon).$$

Olkoon sitten n jokin lukua $N(\varepsilon)$ suurempi kokonaisluku. Oletuksen mukaan funktio $f_n(x)$ on jatkuva pisteessä x_0 . Näin ollen on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Oletetaan nyt, että $|x - x_0| < \delta$. Kolmioepäyhtälön nojalla nähdään, että tällöin

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0))| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Koska ε oli mielivaltainen, funktion $f(x)$ jatkuvuus pisteessä x_0 on todistettu. Koska x_0 oli välin I mielivaltainen piste, on tasaisesti suppenevaa jonoa koskeva väite todistettu.

Kurssin Analyysi I tulosten perusteella osasummafunktiot $S_n(x) = \sum_{k=0}^n w_k(x)$ ovat välillä I jatkuvia äärellisen monen jatkuvan funktion summina. Oletimme, että osasummien jono $S_n(x)$ lähestyy raja-arvoaan summafunktiota $S(x)$ välillä I tasaisesti. Näin ollen tasaisesti suppenevan sarjan jatkuvuutta koskeva väite seuraa jo todistetusta tasaisesti suppenevaa jonoa koskevasta tuloksesta. $\square$

Tällä kurssilla käytämme edellisestä Lauseesta lähes yksinomaan sen sarjoja koskevaa tulosta. Jotta voimme hyödyntää tätä tulosta tarvitsemme helposti tarkistettavan kriteerin sarjan tasaisen suppenemisen toteamiseksi. Esimerkissä 5.7 esittämämme päättelyn yleistys antaa tarvittavan työkalun. Siellä oleellista oli, että löysimme sarjan termeille sellaiset koko tarkasteluvälillä voimassa olevat ylärajat, että ylärajojen muodostama (numeerinen) sarja suppeni.

Lause 5.9. (Weierstrassin M -testi) Oletetaan, että positiiviterminen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ suppenee. Jos aina, kun $n \geq n_1 \in \mathbf{N}$, on kaikilla välin I pisteillä x on voimassa arvio

$$|w_n(x)| \leq M_n,$$

niin sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$$

suppenee tasaisesti välillä I . Suppeneminen on myös itseistä jokaisessa pisteessä $x \in I$.

Todistus. Majoranttiperiaatetta soveltamalla nähdään heti, että sarja $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$ suppenee pisteittäin itseisesti.

Oletetaan, että $n \geq n_1$, ja kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Oletuksen mukaan positiiviterminen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ suppenee. Olkoon sen summa M . Koska kyseisen sarjan osasummien jono on kasvava, löydetään sellainen luku n_2 , että kaikille $n > n_2$ on voimassa epäyhtälö $M - \varepsilon < \sum_{k=1}^n M_k \leq M$. Majoroivan sarjan jäännöstermeille saadaan siten arvio $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$, joka sekin on voimassa aina, kun $n > n_2$.

Oletetaan sitten, että $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Tällöin jokaiselle $x \in I$

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |w_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = R_n < \varepsilon. \end{aligned}$$

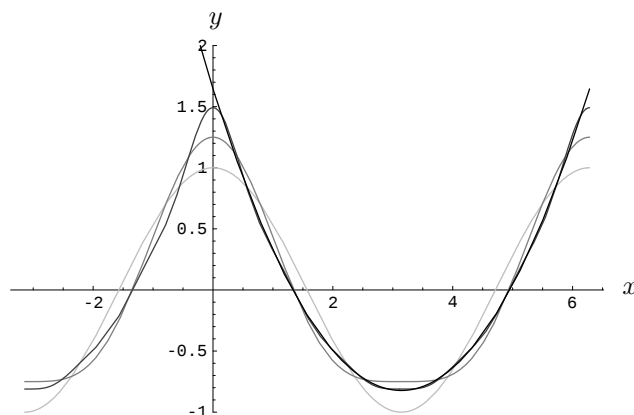
Suppeneminen on siis myös tasaista. $\square$

Esimerkki 5.10. Saamme Esimerkin 5.7 tuloksen perusteltua uudelleen käyttämällä Weierstrassin M -testiä. Kun $a \in (0, 1)$, niin itseisesti suppeneva sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ majoroi geometrista sarjaa $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ välillä $I_a = [-a, a]$, joten geometrisen sarjan suppeneminen on tällä välillä tasaista.

Esimerkki 5.11. Osoita, että sarja

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$$

suppenee tasaisesti koko reaalisuoralla $I = (-\infty, \infty)$, ja että summafunktio $S(x)$ on kaikkialla jatkuva.



Kuva 5.2: Sarjan $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \cos kx$ osasummafunktiot $S_1(x)$ (vaalein harmaa), $S_2(x)$ ja $S_6(x)$ (tummin harmaa). Sarja suppenee tasaisesti. Mustalla paraabeli, joka yhtyy summafunktioon $S(x)$ välillä $[0, 2\pi]$

Ratkaisu. Funktiot $w_k(x) = k^{-2} \cos kx$, $k = 1, 2, \dots$ ovat kaikki jatkuvia. Koska selvästi epäyhtälö $|w_k(x)| \leq 1/k^2$ on voimassa kaikille $x \in \mathbf{R}$, ja sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$ suppenee, niin Weierstrassin M-testin nojalla sarja $S(x)$ suppenee tasaisesti välillä $I = \mathbf{R}$. Summafunktio $S(x)$ on siten jatkuva kaikkialla Lauseen 5.8 nojalla.

Huomautus 5.12. Edellisen esimerkin sarjan kaikilla termeillä $w_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ on yhteisenä jaksona 2π . Siksi myös summafunktiolla on oltava jaksona 2π . Jaksollisten funktioiden analyysiin keskittyvän *Fourier-sarjojen* teorian avulla (myöhemmillä kursseilla) voidaan todistaa, että välillä $x \in [0, 2\pi]$ on voimassa yhtälö

$$S(x) = \frac{3(x - \pi)^2 - \pi^2}{12}. \quad (*)$$

Tämä yhtälö ei selvästikään voi olla voimassa tämän välin ulkopuolella, koska oikealla puolella oleva polynomi ei ole jaksollinen. Kuvassa 5.2 on esitetty sarjan $S(x)$ eräitä osasummafunktioita sekä yhtälön (*) oikean puolen polynomin kuvaaja.

Lause 5.13. Oletetaan, että funktiot $w_n(x)$ ovat jatkuvia suljetulla välillä $I = [a, b]$, ja että sarja $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$ suppenee tasaisesti tällä välillä. Tällöin sarja voidaan integroida termeittäin, eli

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b w_n(x) dx. \quad (*)$$

Erityisesti siis yhtälön (*) oikealla puolella oleva sarja suppenee.

Todistus. Summafunktio $S(x)$ on jatkuva välillä I Lauseen 5.8 nojalla. Näin ollen se on myös integroitava välillä I . Sama koskee myös osasummafunktioita $S_n(x) = \sum_{k=0}^n w_k(x)$. Kiinnitetään luku $\varepsilon > 0$. Suppene-
misen tasaisuuden nojalla on olemassa sellainen luku n_1 , että aina, kun $n > n_1$, niin

$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad \text{kaikille } x \in I.$$

Lauseen 2.20 perusteella

$$\left| \int_a^b S - \int_a^b S_n \right| \leq \int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon,$$

aina, kun $n > n_1$. Näin ollen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

Integraalin lineaarisuuden vuoksi tässä

$$\int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n w_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b w_k(x) dx,$$

joten osasummafunktion $S_n(x)$ määrätty integraali on yhtälön (*) oikean puolen sarjan n :s osasumma. Väite seuraa. $\square$

Lauseen todistus menee läpi ilmeisin muutoksin myös siinä tapauksessa, että $b < a$ ja suppeneminen on tasaista välillä $[b, a]$.

Huomautus 5.14. Lauseessa 5.13 on tasainen suppeneminen välttämätöntä. Monomin $x^k, k \in \mathbf{N}$ integraali välin $[0, 1]$ yli on $1/(k+1)$. Sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ integroiminen termeittäin siis epäonnistuu, koska sarja $\sum_{k=0}^{\infty} 1/(k+1)$ hajaantuu. Toisaalta helposti näemme (harjoitustehtävä), että summafunktion epäoleellinen integraali $\int_0^1 1/(1-x) dx$ hajaantuu sekin.

Esimerkki 5.15. (Logaritmfunktion sarjakehitelmä) Osoita, että aina kun $x \in (-1, 1]$, niin

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$$

Ratkaisu. Oletetaan ensin, että $x \in (-1, 1)$. Valitaan $a \in (0, 1)$ siten, että $|x| < a$. Tällöin Esimerkin 5.7 perusteella (sijoitetaan siellä x :n paikalle $-x$) sarja $1/(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ suppenee tasaisesti välillä $I = [0, x]$ (tai välillä $I = [x, 0]$, jos $x < 0$). Lauseen 5.13 nojalla voimme siis integroida identiteetin

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

puolittain yli välin I , ja oikean puolen sarja voidaan integroida termeittäin:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},$$

mistä tulee väiteyhtälön oikean puolen sarja sijoittamalla $k = n+1$. Näin ollen väite on todistettu, kun $x \in (-1, 1)$.

Tutkitaan sitten sarjaa

$$L(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

välillä $I_2 = [0, 1]$. Tällä välillä sarjan on selvästi vuorotteleva. Sen kahden peräkkäisen termin itseisarvojen suhde on

$$\frac{x^{k+1}/(k+1)}{x^k/k} = \frac{kx^{k+1}}{(k+1)x^k} = \frac{kx}{k+1} < x \leq 1,$$

joten aina $x^{k+1}/(k+1) \leq x^k/k$. Lisäksi $0 \leq x^k/k \leq 1/k$, joten $x^k/k \rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$. Sarja täyttää siis Leibnizin lauseen (Lause 4.29) ehdot koko välillä. Näin ollen sen jäännöstermiä voidaan arvioida

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Tämä on $< \varepsilon$ aina, kun n on tarpeeksi suuri, joten sarja $L(x)$ suppenee tasaisesti välillä I_2 . Näin ollen $L(x)$ on Lausen 5.8 nojalla jatkuva välillä I_2 . Toisaalta myös funktio $\ln(1+x)$ on jatkuva välillä I_2 . Näin ollen

$$\ln 2 = \ln(1+1) = \lim_{x \rightarrow 1-} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 1-} L(x) = L(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Olemme todistaneet, että sarjan $L(x)$ summa on $\ln(1+x)$ myös pisteessä $x = 1$, eli olemme todistaneet Esimerkissä 4.31 esitetyn väitteen

$$\ln 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots.$$

Työlämmiin ilmaistavissa on tasaisen suppenemisen ja derivoituvuuden välistä suhdetta käsittelevä tulos. Se on itse asiassa Lauseelle 5.13 käänteinen tulos, joten tällä kertaa tullaan vaatimaan, että *termeittäin derivoitu sarja suppenee tasaisesti*.

Lause 5.16. *Oletetaan, että*

- (i) *termit $w_n(x)$ ovat derivoituvia välillä I , ja derivaatat $w'_n(x)$ ovat jatkuvia kaikille $n = 0, 1, 2, \dots$,*
- (ii) *sarja $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x_0)$ suppenee ainakin yhdessä pisteessä $x_0 \in I$, ja*
- (iii) *sarja $\sum_{n=0}^{\infty} w'_n(x)$ suppenee tasaisesti välillä I .*

Tällöin sarja $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$ suppenee koko välillä I . Lisäksi summafunktio on derivoituva välillä I , ja derivaatta saadaan derivoimalla sarja termeittäin:

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w'_n(x).$$

Todistus. Lauseiden 5.8 ja 5.13 mukaan funktio $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w'_n(t)$ on välillä I jatkuva ja integroitava, ja kaikille $x \in I$

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^x w'_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (w_n(x) - w_n(x_0)),$$

missä viimeisenä esiintyvä sarja suppenee. Oletuksen (ii) mukaan sarja $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x_0)$ suppenee, joten Seurauksen 4.9 nojalla myös sarja $\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x)$ suppenee, ja edelleen $F(x) = S(x) - S(x_0)$. Analyysin peruslauseen perusteella lopulta

$$S'(x) = F'(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w'_n(x).$$

□

Esimerkki 5.17. Selitä, miksi sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ derivoiminen termeittäin on luvallista välillä $I = (-1, 1)$.

Ratkaisu. Lauseen 5.16 ehdoista ainoastaan kolmatta ei ole selvitetty aikaisemmin. Kiinnitetään $x \in I$ ja valitaan $a \in (0, 1)$ siten, että $a > |x|$. Tutkitaan termeittäin derivoimalla saatua sarjaa

$$D(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$$

pisteessä a . Tässä kahden perättäisen termin suhde

$$\frac{(k+1)a^k}{ka^{k-1}} = \frac{(k+1)a}{k} \rightarrow a,$$

kun $k \rightarrow \infty$, joten osamäärätarkastimen nojalla sarja $D(a)$ suppenee itseisesti. Selvästi sarja $D(a)$ majoroi sarjaa $D(x)$ välillä $x \in I_a = [-a, a]$, joten Weierstrassin M-testin perusteella sarja $D(x)$ suppenee tasaisesti välillä I_a . Lauseen 5.16 nojalla sitten

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

kaikissa välin I_a pisteissä x . Kun varioimme lukua a , näemme, että sama tulos pitää paikkansa kaikilla $x \in (-1, 1)$.

Päädyimme aikaisemmassa Esimerkissä 4.35 samaan tulokseen toista menetelmää (Cauchyn tuloa) käyttäen.

5.2 Eksponenttifunktion sarja, määritelmä ja perusominaisuuksia

Tässä pykälässä tutkimme intensiivisesti sarjaa

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Esimerkissä 4.27 jo näimme osamäärätarkastimen avulla, että $E(x)$ suppenee itseisesti kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Merkitään yleistä termiä $w_n(x) = x^n/n!, n \in \mathbf{N}$. Jos $a > 0$, niin $w_n(a) \geq |w_n(x)|$ kaikilla $x \in I_a = [-a, a]$. Koska sarja $E(a)$ suppenee, niin Weierstrassin M-testin nojalla sarja $E(x)$ suppenee tasaisesti välillä I_a . Näin ollen summafunktio $E(x)$ on Lauseen 5.8 mukaan jatkuva koko $\mathbf{R}$:ssä.

Derivoimalla huomaamme, että $w'_0(x) = 0$ ja $w'_n(x) = n(x^{n-1}/n!) = w_{n-1}(x)$. Näin ollen termeittäin derivoimalla saatu sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} w'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{n-1}(x) = E(x)$$

suppenee aiemmin nähdyn perusteella tasaisesti välillä I_a . Näin ollen Lauseen 5.16 perusteella funktio $E(x)$ on myös derivoituva jokaisella välillä I_a (toisin sanoen kaikkialla), ja se on itsensä derivaatta:

$$E'(x) = E(x) \quad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R}.$$

Koska lisäksi selvästi $E(0) = 1$, alkaa näyttää vahvasti siltä, että funktio $E(x)$ jakaa useita ominaisuuksia funktion e^x kanssa. Kurssilla Analyysi I emme aikanamme määritelleet funktiota e^x tyydyttävästi. Tässä pykälässä korjaamme tämän puutteen osoittamalla, että funktiolla $E(x)$ on kaikki ne ominaisuudet, joita silloin oletimme funktiolla e^x olevan. Sen jälkeen voimmekin *määritellä*

$$e^x = E(x).$$

Tiedämme jo jatkuvuuden ja derivoituvuuden sekä sen, että kyseinen funktio on oma derivaattansa. Muita ominaisuuksia varten johdetaan ensin seuraava tulos.

Lemma 5.18. (*Eksponenttifunktion identiteetti*) *Kaikilla reaali-luvuilla x, y on voimassa*

$$E(x)E(y) = E(x+y).$$

Todistus. Sarjat $E(x)$ ja $E(y)$ suppenevat itseisesti, joten binomikaavaa kriittisessä kohdassa käyttäen niiden Cauchyn tuloksi tulee

$$\begin{aligned} E(x)E(y) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} \frac{y^{k-i}}{(k-i)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \frac{1}{k!} \frac{k!}{i!(k-i)!} x^i y^{k-i} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i y^{k-i} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = E(x+y). \end{aligned}$$

□

Valitsemalla tässä $y = -x$ saamme seurauksena, että kaikilla $x \in \mathbf{R}$ on voimassa yhtälö

$$E(x)E(-x) = E(x-x) = E(0) = 1.$$

Näin ollen jokaiselle $x \in \mathbf{R}$ on voimassa $E(x) \neq 0$, sillä muutoin olisikin $E(x)E(-x) = 0 \cdot E(-x) = 0 \neq 1$. Edelleen voimme päätellä, että $\forall x \in \mathbf{R} : E(x) > 0$. Jos nimittäin jossakin pisteessä x_0 olisikin $E(x_0) < 0$,

niin funktion $E(x)$ jatkuvuuden, havainnon $E(0) = 1$ ja Bolzanon lauseen nojalla lukujen 0 ja x_0 välissä olisi funktion $E(x)$ nollakohta. Näimme juuri, ettei nollakohtia voi olla, joten päädyimme ristiriitaan.

Jos $x > 0$, niin jokainen termeistä $w_n(x)$ on positiivinen. Näin ollen sarjan $E(x)$ osasummien jono on tällöin kasvava. Erityisesti siis

$$x > 0 \Rightarrow E(x) > w_0(x) + w_1(x) = 1 + x.$$

Tästä näemme, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E(x) = \infty,$$

eli jatkuvan funktion väliarvolauseen perusteella funktio $E(x)$ saa kaikki arvot $y \in [1, \infty)$, kun $x \geq 0$.

Toisaalta $E(-x) = 1/E(x)$, joten

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} E(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{E(x)} = 0.$$

Näin ollen funktio $E(x)$ saa kaikki arvot $y \in (0, 1]$, kun $x \leq 0$. Koska $E'(x) = E(x) > 0$, funktio $E(x)$ on kaikkialla aidosti kasvava. Näin ollen se on bijektio $E : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+, x \mapsto E(x)$. Erityisesti sillä on bijektiivinen käänteiskuvaus $L : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$. Esitämme yhteenvedon havainnoistamme seuraavassa.

Lause 5.19. *Sarja*

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

määrittelee bijektiivisen, aidosti kasvavan funktion $E : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$, jolle $E(0) = 1$. Funktio $E(x)$ on kaikkialla derivoituva, ja $\forall x \in \mathbf{R} : E'(x) = E(x)$. Funktiolla $E(x)$ on käänteisfunktio $L : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$. Kaikilla $x, y \in \mathbf{R}, u, v \in \mathbf{R}_+$ on voimassa identiteetit

$$E(x)E(y) = E(x+y), \quad L(uv) = L(u) + L(v).$$

Lisäksi myös funktio $L(x)$ on derivoituva, ja $\forall x > 0 : L'(x) = 1/x$.

Todistus. Ainoastaan funktiota $L(x)$ koskevia väitteitä ei vielä todistettu. Sen derivoituvuus ja derivaatan lauseke seuraavat yleisestä käänteisfunktioiden derivoituvuutta koskevista tuloksista (Analyysi I). Olkoon siis $u > 0$. Valitaan $x \in \mathbf{R}$ siten, että $E(x) = u$. Tällöin $E'(x) = E(x) \neq 0$, joten käänteisfunktio $L(x)$ on derivoituva pisteessä u , ja derivaatta on

$$L'(u) = L'(E(x)) = 1/E'(x) = 1/E(x) = 1/u.$$

Jos luvut u ja v ovat positiivisia, niin $u = E(x)$ ja $v = E(y)$ joillakin (yksikäsitteisillä) muuttujien $x, y \in \mathbf{R}$ valinnoilla. Tällöin $uv = E(x)E(y) = E(x+y)$, joten käänteisfunktio-ominaisuuden nojalla

$$L(uv) = L(E(x+y)) = x+y = L(u) + L(v).$$

□

Lause 5.20. *Lauseessa 5.19 luetellut ominaisuudet määrittävät funktion $E(x)$ yksikäsitteisesti.*

Todistus. Oletetaan, että $F(x)$ olisi jokin toinen funktio, joka toteuttaa ehdot $F(0) = 1$ ja $F(x) = F'(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Tällöin osamäärän derivoimissäännön mukaan kaikilla $x \in \mathbf{R}$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{F(x)}{E(x)} \right) = \frac{F'(x)E(x) - F(x)E'(x)}{E(x)^2} = \frac{F(x)E(x) - F(x)E(x)}{E(x)^2} = 0.$$

Integraalilaskennan peruslauseen mukaan tällöin funktio $F(x)/E(x)$ on vakio C . Koska $F(0)/E(0) = 1$, niin $C = 1$. Siis $F(x) = E(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. $\square$

Määritelmä 5.21. Määritellään eksponenttifunktio e^x ja sen käänteisfunktio $\ln y$ kaikille $x, y \in \mathbf{R}, y > 0$ asettamalla

$$e^x = E(x) \quad \text{ja} \quad \ln y = L(y).$$

Jos $a > 0, a \neq 1$ määritellään

$$a^x = E(xL(a)) = e^{x \ln a} \quad \text{ja} \quad \log_a(y) = \frac{L(y)}{L(a)} = \frac{\ln y}{\ln a}.$$

Kuorrutuksena todistamme varmuuden vuoksi vielä seuraavan yksityiskohdan.

Lause 5.22.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = E(1) = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Todistus. Binomikaavan avulla näemme, että kun $n > k > 0$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!n^i} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-i+1)}{i!n^i} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-i+1)}{n^i} \\ &\geq \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-i+1)}{n^i}. \end{aligned}$$

Kiinnitetään hetkeksi k ja annetaan luvun n kasvaa rajatta. Tällöin kaikilla $i = 0, 1, 2, \dots, k$

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-i+1)}{n^i} = \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-i+1}{n} \rightarrow 1,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Siirtymällä raja-arvoihin saadaan sitten epäyhtälö

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \geq \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^k w_i(1).$$

Tämä epäyhtälö on voimassa olipa parametrilla k mikä positiivinen kokonaislukuarvo tahansa. Antamalla sitten $k \rightarrow \infty$ saadaan raja-arvona tulos

$$e \geq \sum_{i=0}^{\infty} w_i(1) = E(1).$$

Toisaalta katkaisemalla positiivitermisen sarjan $E(1/n)$ kahden termin jälkeen näemme, että kaikille $n \in \mathbf{Z}_+$ on voimassa

$$E(1/n) \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

Korottamalla tämä epäyhtälö puolittain n :nteen potenssiin ja soveltamalla identiteettiä $E(x)^n = E(nx)$ (todistus harjoitustehtävänä) saadaan

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq E(1/n)^n = E(n \cdot (1/n)) = E(1).$$

Ottamalla tässä puolittain raja-arvo $n \rightarrow \infty$ saadaan käänteinen epäyhtälö

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq E(1).$$

Molemmat epäyhtälöt voivat olla samanaikaisesti voimassa vain, jos $E(1) = e$. □

5.3 Potenssisarjojen perusominaisuuksia

Oletetaan, että $a_0, a_1, \dots$ ovat reaalisia vakioita, ja kiinnitetään $x_0 \in \mathbf{R}$. Muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

olevaa sarjaa sanotaan x_0 -keskiseksi *potenssisarjaksi*. Tekemällä tässä muunnos $t = x - x_0$ saadaan 0-keskinen potenssisarja $\sum_n a_n t^n$. Teoreettisissa tarkasteluissa voimme siis halutessamme palauttaa tarkastelun tilanteeseen $x_0 = 0$.

Potenssisarja $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ selvästi suppenee vakioiden $a_n, n \in \mathbf{N}$ arvoista riippumatta, kun $x = 0$. Jos se suppenee jollakin välillä I , ja sen summa on $S(x)$, kun $x \in I$, niin sanomme, että potenssisarja *esittää funktiota* $S(x)$ *välillä* I . Aiemmin näkemämme perusteella siis esimerkiksi potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ esittää funktiota $1/(1-x)$ välillä $(-1, 1)$, potenssisarja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n/n$ esittää funktiota $\ln(1+x)$ välillä $(-1, 1]$ ja potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ esittää funktiota e^x välillä $(-\infty, \infty)$.

Tässä suppenemisväli on (mahdollisesti päätepisteitä lukuun ottamatta) symmetrinen potenssisarjan keskipisteen suhteen. Seuraavaksi näytämme, että näin käy aina.

Lemma 5.23. *Oletetaan, että potenssisarja*

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

suppenee pisteessä $x = c \neq 0$. *Tällöin sarja* $S(x)$ *suppenee itseisesti pisteessä* x *aina, kun* $|x| < |c|$. *Jos kiinnitetään luku* $a, 0 < a < |c|$, *niin sarjan* $S(x)$ *suppeneminen on tasaista välillä* $I_a = [-a, a]$.

Todistus. Oletimme, että $S(c) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ suppenee. Hajaantumistarkastimen nojalla $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c^n = 0$. Suppeneva jono on rajoitettu, joten on olemassa sellainen vakio $K > 0$, että $|a_n c^n| \leq K$ kaikilla indeksin $n \in \mathbf{N}$ arvoilla.

Kiinnitetään sitten luku x , joka toteuttaa ehdon $|x| < |c|$. Merkitään $q = |x|/|c|$, jolloin $0 < q < 1$. Tällöin

$$|a_n x^n| = |a_n c^n| \cdot \frac{|x|^n}{|c|^n} = |a_n c^n| q^n \leq K q^n.$$

Suppeneva geometrinen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} K q^n$ siis majoroi sarjaa $S(x)$, joten $S(x)$ suppenee itseisesti majorantti-periaatteen seurauksena.

Jos $a \in (0, |c|)$, niin kaikille $n \in \mathbf{N}$ ja kaikille $x \in I_a$ on voimassa epäyhtälö $|a_n x^n| \leq |a_n a^n|$. Itseisesti suppeneva sarja $S(a)$ siis majoroi sarjaa $S(x)$ välillä $x \in I_a$, joten Weierstrassin M-testin perusteella sarja $S(x)$ suppenee tasaisesti välillä I_a . $\square$

Lause 5.24. Sarjan $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ suppenemiseen nähden on seuraavat kolme toisensa poissulkevaa mahdollisuutta.

- (i) Sarja $S(x)$ hajaantuu aina, kun $x \neq 0$.
- (ii) Sarja $S(x)$ suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$.
- (iii) On olemassa yksikäsitteinen sellainen luku $R > 0$, että

$$|x| < R \Rightarrow S(x) \downarrow \quad \text{ja} \quad |x| > R \Rightarrow S(x) \uparrow.$$

Todistus. Tutkitaan joukkoa $S = \{|x| \neq 0 \mid S(x) \downarrow\}$. Jos vaihtoehto (i) ei toteudu, niin joukko S on epätyhjä. Jos joukko S ei ole ylhäältä rajoitettu, niin kutakin lukua $x \in \mathbf{R}$ kohti on olemassa sellainen $|c| \in S$, että $|x| < |c|$. Joukon S määritelmän perusteella tässä $S(c) \downarrow$, joten Lemman 5.23 mukaan myös $S(x)$ suppenee. Tällöin vaihtoehto (ii) toteutuu.

Jäljelle jää tapaus, jossa joukko S on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu. Merkitään $R = \sup S$. Jos $|x| < R$, niin $|x|$ ei ole joukon S yläraja. On siis olemassa sellainen luku c , että $|c| > |x|$ ja $S(c) \downarrow$. Lemman 5.23 perusteella sitten $S(x) \downarrow$. Jos taas $|x| > R$, niin sarja $S(x)$ hajaantuu, sillä muutoin $|x| \in S$, eikä R olisikaan joukon S yläraja. $\square$

Määritelmä 5.25. Lauseessa 5.24 tapauksessa (iii) esiintyvää lukua R kutsutaan potenssisarjan $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ suppenemissäteeksi. Tapauksessa (i) sanotaan, että $R = 0$ ja tapauksessa (ii) vastaavasti $R = \infty$.

Väliä $(-R, R)$ sanotaan sarjan $S(x)$ suppenemisväliksi. Jos sarjan $S(x)$ suppenemisväli on $(-R, R)$, niin vastaavan x_0 -keskisen sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ suppenemisväli on $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Jos siis x on potenssisarjan suppenemisvälillä, niin sarja $S(x)$ suppenee itseisesti. Lisäksi potenssisarja voi supeta molemmissa, toisessa tai ei kummassakaan suppenemisvälin päätepisteistä. Esimerkkeinä näistä tilanteista käyvät sarjat $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2$, joiden kaikkien suppenemisväli on $(-1, 1)$.

Koska millä tahansa suppenemisväliin sisältyvällä suljetulla välillä potenssisarjan suppeneminen on tasais-
ta, on potenssisarjan integroiminen termeittäin yli tällaisen välin aina luvallista (Lause 5.13). Termeittäistä
derivointia varten tarvitsemme vielä yhden aputuloksen.

Lemma 5.26. *Potenssisarjoilla*

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{ja} \quad B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

on sama suppenemissäde.

Todistus. Oletetaan ensin, että sarjan $A(x)$ suppenemissäde $R = R_A > 0$. Olkoon sitten $x \in \mathbf{R}$ luku, joka
toteuttaa ehdon $0 < |x| < R$. Valitaan luku c siten, että $|x| < c < R$, ja merkitään $q = |x|/c$. Tällöin

$$|n a_n x^{n-1}| = \frac{1}{|x|} |a_n c^n| n \left(\frac{|x|}{c} \right)^n.$$

Tässä jonossa tekijä $|1/x| \cdot |a_n c^n|$ on rajoitettu (muuttujan n funktiona), koska soveltamalla hajaantumistar-
kastinta suppenevaan sarjaan $A(c)$ saadaan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c^n = 0$. On siis olemassa sellainen luku $K > 0$, että
kaikille $n \in \mathbf{N}$

$$|n a_n x^{n-1}| \leq K n q^n.$$

Koska $0 < q < 1$, sarja $\sum_{n=0}^{\infty} n q^n = q \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}$ suppenee itseisesti Esimerkin 5.17 perusteella. Majorant-
tiperiaatteen nojalla sarja $B(x)$ suppenee. Näin ollen sarjan $B(x)$ suppenemissäde $R_B \geq |x|$. Tämä päätelmä
voidaan tehdä aina, kun $|x| < R$, joten $R_B \geq R$.

Jos taas $R_B > 0$, niin Lemman 5.23 nojalla $B(x)$ suppenee tasaisesti kaikilla väleillä $[-a, a]$, $a < R_B$.
Olkoon x mielivaltainen ehdon $|x| < R_B$ toteuttava luku. Valitsemalla a väliltä $|x| < a < R_B$ nähdään
Lauseen 5.13 nojalla, että sarja $A(x)$ suppenee (koska se saatiin integroimalla tasaisesti suppeneva sarja
termeittäin). Näin ollen $R_A \geq |x|$. Koska tämä päättely voitiin tehdä aina, kun $|x| < R_B$, saamme epäyhtälön
 $R_A \geq R_B$.

Olemme todistaneet, että $R_B \geq R_A$ aina, kun $R_A > 0$, ja että $R_A \geq R_B$ aina, kun $R_B > 0$. On siis
mahdotonta, että vain toinen suppenemissäteistä olisi nolla, tai että vain toinen niistä olisi ääretön. Lisäksi
näistä epäyhtälöistä seuraa, että molempien suppenemissäteiden ollessa äärellisiä ja positiivisia niiden on
pakko yhtyä. $\square$

Yhdistämällä kaikki yllä olevat tulokset saamme potenssisarjojen teorian päätuloksen.

Lause 5.27. *Oletetaan, että potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ suppenemissäde $R > 0$. Sen summafunktio $S(x)$ on
välillä $x \in (-R, R)$*

(i) *jatkuva,*

(ii) *integroituva, ja aina, kun $[a, b] \subset (-R, R)$ niin*

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b a_n x^n dx \right),$$

(iii) derivoituva ja

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Erityisesti siis termeittäin integroimalla tai derivoimalla saadut potenssisarjat suppenevat itseisesti kaikilla $x \in (-R, R)$. Lisäksi suppeneminen on tasaista jokaisella välillä $[-a, a]$, $a < R$.

Huomautus 5.28. Huomaa, että mikään näistä tuloksista ei kerro mitään siitä, mitä tapahtuu suppenemisvälin päätepisteissä ($x = \pm R$).

Seuraus 5.29. Potenssisarjan $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ summafunktiolla on sarjan suppenemisvälillä $(-R, R)$ jokaisella $n \in \mathbf{N}$ n :nnen kertaluvun derivaatta $S^{(n)}(x)$ ja

$$a_n = \frac{1}{n!} S^{(n)}(0).$$

Todistus. Sovelletaan Lauseen 5.27 kohtaa (iii) n kertaa, ja sijoitetaan sen jälkeen $x = 0$. □

Lause 5.30. (Potenssisarjojen identtisyyslause) Jos jossakin origon ympäristössä $(-\delta, \delta)$ on

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

niin $\forall n \in \mathbf{N} : a_n = b_n$.

Todistus. Jos näiden kahden potenssisarjan yhteinen summafunktio välillä $x \in (-\delta, \delta)$ on $S(x)$, niin Seurauksen 5.29 mukaan kaikille $n \in \mathbf{N}$

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = b_n.$$

□

Suppenevien potenssisarjojen kesken voidaan tehdä peruslaskutoimituksia. Huomaa, että kahden (saman kesken) potenssisarjan Cauchyn tulo on edelleen potenssisarja, koska siinä termejä ryhmiteltäessä ryhmän sisällä $i + j = k$ on vakio, joten termit $a_i x^i b_j x^j = a_i b_j x^{i+j}$ ovat kaikki keskenään samaa astetta.

Lause 5.31. Oletetaan, että potenssisarjojen $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ja $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ suppenemissäteet ovat R_S ja R_T . Tällöin potenssisarjat

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

ja Cauchyn tulo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

kaikki suppenevat (ainakin) välillä $x \in (-R, R)$, missä $R = \min\{R_T, R_S\}$, ja esittävät funktioita $S(x) \pm T(x)$, $S(x)T(x)$ tällä välillä.

Todistus. Summan ja erotuksen tapauksessa väite seuraa Lauseesta 4.9. Tulon tapauksessa vedotaan Lauseeseen 4.34. □

Esimerkki 5.32. Määrittää sarjojen $1/(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ja $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ Cauchyn tulon $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ kertoimet $c_k, k = 0, 1, 2, 3$. Mitä voit sanoa potenssisarjan $P(x)$ suppenemissäteestä?

Ratkaisu. Tällä kertaa $a_n = 1$ ja $b_n = 1/n!$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Cauchyn tulon kertoimiksi saadaan siten

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 &&= 1, \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 &&= 1 + 1 = 2, \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &&= \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{5}{2}, \\ c_3 &= a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 &&= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{8}{3}, \\ \vdots & && \vdots \end{aligned}$$

Siis

$$P(x) = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \dots$$

Koska tekijäsarjat molemmat suppenevat välillä $x \in I = (-1, 1)$ myös sarja $P(x)$ suppenee tällä välillä.

Kahden samankeskisen potenssisarjan osamäärä sen sijaan on pulmallisempi käsite. Tämä johtuu siitä, ettei ole lainkaan selvää voidaanko välillä $(-R, R)$ suppevan potenssisarjan esittämän funktion $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ käänteislukujen antamaa funktiota $1/S(x)$ lainkaan esittää suppevana 0-keskisenä potenssisarjana. Joissakin tilanteissa on ilmeistä, että näin ei voi olla. Jos nimittäin $S(0) = 0$, niin funktio $1/S(x)$ ei ole määritelty eikä jatkuva pisteessä $x = 0$ kun taas potenssisarjan esittämällä funktiolla on suppenemisvälillä kaikkien kertalukujen derivaatat.

Joskus kuitenkin tiedämme tai arvaamme, että on olemassa sellainen potenssisarja $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, joka suppenee jollakin välillä, ja sen summa on kahden suppevan potenssisarjan suhde $S(x)/T(x)$, missä $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ja $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ovat tunnettuja sarjoja, ja $b_0 \neq 0$. Tällöin tuntemattomat kertoimet $c_n, n \in \mathbf{N}$ määräytyvät yksikäsitteisesti siitä, että sarjojen $Q(x)$ ja $T(x)$ Cauchyn tulona saatavan sarjan on potenssisarjojen identtisyyslauseen perustella oltava juuri sarja $S(x)$. Pystymme nimittäin muodostamaan riittävän määrän tuntemattomia kertoimia $c_n, n \in \mathbf{N}$ sitovia lineaarisia yhtälöitä, ja ratkaisemaan ne niitä käyttäen. Tähän perustuu ns. tuntemattomien kertoimien menetelmä potenssisarjojen osamäärän laskemiseksi. Joskus pystymme jälkeinpäin selvittämään saadun sarjan suppenemisvälin.

Esimerkki 5.33. Oletetaan, että on olemassa sellainen origokeskinen potenssisarja $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, että jollakin välillä $(-R, R)$

$$Q(x) = \frac{1+x}{1+2x+3x^2+4x^3+\dots}$$

Määrittää sarjan $Q(x)$ kertoimet.

Ratkaisu. Nimittäjänä esiintyvän sarjan $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ ja tuntemattoman sarjan $Q(x)$ Cauchyn tulona on tällä kertaa äärellinen sarja (=polynomi) $P(x) = 1+x = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$. Kirjoittamalla Cauchyn

tulo auki ja soveltamalla potenssisarjojen identtisyyslausetta tulosarjaan $Q(x)T(x)$ ja ‘sarjaan’ $P(x)$ saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 1 = p_0 &= c_0 \\ 1 = p_1 &= c_1 + 2c_0 \\ 0 = p_2 &= c_2 + 2c_1 + 3c_0 \\ 0 = p_3 &= c_3 + 2c_2 + 3c_1 + 4c_0 \\ &\vdots \\ 0 = p_n &= c_n + \cdots + (n-2)c_3 + (n-1)c_2 + nc_1 + (n+1)c_0 \\ &\vdots \end{cases}$$

Tässä ensimmäisestä yhtälöstä ratkeaa $c_0 = 1$. Sijoittamalla se toiseen yhtälöön saadaan $1 = c_1 + 2c_0 = c_1 + 2$, mistä ratkeaa $c_1 = -1$. Sijoittamalla c_0 ja c_1 kolmanteen yhtälöön seuraa $0 = c_2 + 2c_1 + 3c_0 = c_2 + 2(-1) + 3 \cdot 1 = c_2 + 1$, joten $c_2 = -1$. Neljännestä yhtälöstä $0 = c_3 + 2(-1) + 3(-1) + 4 \cdot 1$ ratkeaa $c_3 = 1$.

Yleisessä tilanteessa tätä ‘ketjureaktiota’ voidaan jatkaa niin pitkälle kuin laskijan kärsivällisyys riittää. Jos nimittäjän vakiotermi $\neq 0$, niin seuraavasta yhtälöstä ratkeaa aina yksi uusi kerroin. Käsillä olevassa erikoistapauksessa jakolasku on kuitenkin jo päättynyt, ja ratkaisuksi tulee $c_n = 0$ aina, kun $n > 3$. Ratkaisu on nimittäin ketjureaktion vuoksi yksikäsitteinen, ja sijoittamalla löydetty c_0, c_1, c_2, c_3 ja postuloidut $c_n = 0, n > 3$ yhtälöön

$$0 = p_n = c_n + \cdots + (n-2)c_3 + (n-1)c_2 + nc_1 + (n+1)c_0$$

nähdään, että se toteutuu.

Vastaukseksi saadaan, että

$$Q(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (1-x)(1-x^2) = (1-x)^2(1+x).$$

Tämä ei ollut yllätys sillä Esimerkin 5.17 mukaan jakajana oleva sarja suppenee välillä $x \in (-1, 1)$ kohti summafunktiota $T(x) = 1/(1-x)^2$, joten $(1+x)/T(x) = (1+x)(1-x)^2$. Tällä kertaa osamääränä saatu äärellinen potenssisarja tietenkin suppenee kaikkialla. Näin siitä huolimatta, että jakaja suppeni vain välillä $(-1, 1)$.

5.4 Taylorin ja Maclaurinin sarjakehitelmistä ja niiden sovelluksista

Kun tähän asti olemme lähinnä yrittäneet laskea potenssisarjan summafunktion, niin nyt pohdimme käänteistä tehtävää: etsi potenssisarja, jolla on haluttu summafunktio! Tällöin Seuraus 5.29 sitoo kätemme aika täydellisesti, mutta viitoittaa samalla tien ainoaan mahdolliseen ratkaisuun. Jotta funktiota $f(x)$ esittäisi jokin välillä $(x_0 - R, x_0 + R)$ suppeneva potenssisarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, on ensinnäkin funktiolla $f(x)$ oltava tällä välillä kaikkien kertalukujen derivaatat. Lisäksi potenssisarjan kertoimet a_n määräytyvät yhtälöistä

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \text{ kaikille } n \in \mathbf{N}.$$

Jäljelle jäävät kysymykset:

(i) Millä muuttujan x arvoilla tämä sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (*)$$

suppenee?

(ii) Millä muuttujan x arvoilla sen summa on $f(x)$?

Sarjaa (*) kutsutaan *funktion $f(x)$ Taylorin sarjaksi pisteessä x_0* . Erikoistapauksessa $x_0 = 0$ puhutaan yleensä *Maclaurinin sarjasta*.

Kurssilla *Funktioteoria* nähdään, että niissä tapauksissa, jolloin funktio $f(x)$ voidaan laajentaa säännölliseksi (ns. holomorfeiksi) kompleksimuuttujan funktioksi, näihin kysymyksiin saadaan yllättävän yksinkertainen vastaus. Tällä kurssilla joudumme tyytymään hiukan mutkikkaampiin menetelmiin, emmekä saa läheskään aina täydellistä kuvaa. Siksi joidenkin funktioiden kohdalla tyydymme vain kertomaan esimerkiksi suppenemissäteen kykenemättä perustelemaan sitä lainkaan.

Lause 5.34. (*Taylorin Lause*) Oletetaan, että funktio $f(x)$ on välillä $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ derivoattoineen jatkuva kertalukuun $n + 1$ saakka. Tällöin välillä I on

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

missä osasumma $T_n(x)$ on astetta n oleva Taylorin polynomi. Jäännöstermi on muotoa

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

missä ξ on tuntematon, lukujen x ja x_0 välissä oleva luku.

Todistus. Kiinnitetään $x \in I$. Jos $x = x_0$, niin $T_n(x_0) = f(x_0)$, ja väite on tosi. Muussa tapauksessa $x - x_0 \neq 0$, joten voidaan valita luku K siten, että

$$f(x) = T_n(x) + K(x - x_0)^{n+1}.$$

Muodostetaan muuttujan t apufunktio

$$\varphi(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!} (x - t) + \frac{f''(t)}{2!} (x - t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x - t)^n + K(x - t)^{n+1} \right].$$

Tällöin selvästi $\varphi(x) = 0$ ja K :n valinnan perusteella myös $\varphi(x_0) = 0$. Käyttämällä tulon derivoimiskaavaa ja oletustamme, näemme, että funktio $\varphi(t)$ on derivoituva lukujen x ja x_0 välillä, ja sen derivaatta on

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= - \sum_{k=0}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{f^{(k)}(t)(x - t)^k}{k!} \right) + K(n+1)(x - t)^n \\ &= -f'(t) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(t)(x - t)^k - f^{(k)}(t)k(x - t)^{k-1}}{k!} \right) + K(n+1)(x - t)^n \\ &= - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)(x - t)^k}{k!} + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)(x - t)^{k-1}}{(k-1)!} + K(n+1)(x - t)^n \\ &= - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n + K(n+1)(x - t)^n, \end{aligned}$$

koska muut termit kumoutuvat pareittain. Rollen lauseen ehdot ovat voimassa, joten lukujen x ja x_0 välillä on sellainen kohta $t = \xi$, että $\varphi'(\xi) = 0$. Yhtälöstä

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + K(n+1)(x-\xi)^n = 0$$

seuraa, että

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Rollen lauseen lupaama piste ξ ei ole kumpikaan välin päätepisteistä, joten $x - \xi \neq 0$. Väite seuraa tästä. $\square$

Lause 5.34 avaa nyt yhden mahdollisen tavan vastata kysymyksiin (i), (ii). Jos funktion $f(x)$ kaikkien kertalukujen derivaatat hallitaan riittävän hyvin, niin voidaan (ehkä?) osoittaa, että $R_n(x) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Tällöinhän saamme varmuuden paitsi sarjan suppenemisesta niin myös siitä, että se esittää ko. funktiota.

Esimerkki 5.35. Osoita, että sinifunktion $f(x) = \sin x$ Maclaurinin sarja on

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Osoita edelleen, että tämä sarja suppenee kaikkialla, ja myös että sen summa $= \sin x$ aina, kun $x \in \mathbf{R}$.

Ratkaisu. Induktiolla nähdään helposti, että $D^n \sin x = \sin(x + n\pi/2)$ kaikille $n \in \mathbf{Z}_+$. Siten $f^{(n)}(0) = 0$, kun n on parillinen, ja $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Näin ollen sinin Maclaurinin sarja on väitetty.

Kiinnitetään $x \neq 0$ ja $n > 0$. Koska aina $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq 1$, saadaan Lauseen 5.34 perusteella jäännöstermille arvio

$$R_n(x) \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

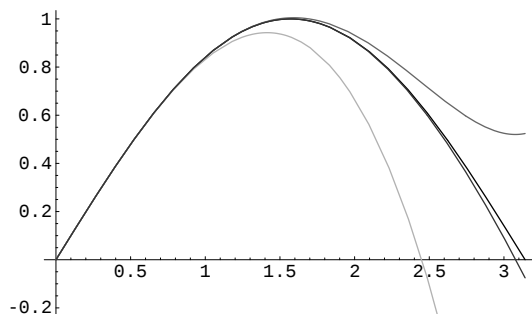
Kun tässä $n \rightarrow \infty$, niin $R_n(x) \rightarrow 0$ (vrt. Esimerkki 4.27), joten tämä potenssisarja suppenee ja sen summa $= \sin x$.

Sinin Taylorin sarja suppenee tasaisesti millä tahansa välillä $[-a, a]$, $a > 0$. Kuvasta 5.3 näemme, että katkaisuvirhe $R_7(x)$ on melko pieni koko välillä $[0, \pi]$. Osasummassa $S_7(x) = x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/5040$ on mukana 4 termiä, ja Taylorin lauseen avulla nähdään, että $|R_7(x)| < \pi^9/9! \approx 0,082$ kaikille välin $[0, \pi]$ luvuille x . Jos rajaamme muuttujan x pienemmälle välillä, on katkaisuvirhe vastaavasti paljon pienempi. Esimerkiksi välillä $[0, 1]$ saadaan $|R_7(x)| < 3 \cdot 10^{-6}$.

Esimerkki 5.36. Potenssisarjojen teorian päätuloksen nojalla suppeneva sarja voidaan derivoida termeittäin, ja näin saatu sarja esittää summafunktion derivaattaa. Näin ollen (potenssisarjojen identtisyyslause!) kosinin Maclaurinin sarja on

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

ja tämäkin sarja suppenee $\forall x \in \mathbf{R}$ ja esittää kosinifunktiota kaikkialla.



Kuva 5.3: Funktion $\sin x$ (musta) ja sen Taylorin sarjan kahden (vaalea), kolmen (keskiharmaa) ja neljän (tummanharmaa) ensimmäisen termin määrittämien polynomien kuvaajat välillä $[0, \pi]$.

Kuten eksponenttifunktionkin tapauksessa, myös sini- ja kosinifunktiot voitaisiin *määritellä* Esimerkkien 5.35 ja 5.36 sarjojen summoina. Puritaaninen lähestymistapa analyysiin toimisikin tällä tavalla. Kurssilla Analyysi I esitetty sinin ja kosinin määritelmään perustui pitkälti visuaaliseen havaintoon, ja sivuutimme muun muassa ympyrän kaaren pituuden määrittelyyn ja vaaditun kehäpisteen olemassaoloon liittyvät ongelmat. Kaikki trigonometrisia funktioita koskevat identiteetit (kahden kulman summaa koskevat kaavat, ‘summat tuloiksi’-kaavat jne.) voidaan todistaa myös potenssisarjojen Cauchyn tulojen avulla. Emme tutki tätä vaihtoehtoa tällä kurssilla, mutta kompleksianalyysin kursseilla menetellään juuri näin, koska kompleksisen muuttujan x siniä tai kosinia ei voida määritellä kuvan avulla samoin kuin tapauksessa $x \in \mathbf{R}$.

Näistä sarjoista voidaan johtaa uusia esimerkiksi algebrallisilla manipulaatioilla.

Esimerkki 5.37. Etsi funktion $f(x) = \sin^2 x$ Maclaurinin sarjan 3 ensimmäistä nollasta eroavaa termiä.

Ratkaisu. Yksi tapa tuottaa Maclaurinin sarja funktiolle f on muodostaa sinin Maclaurinin sarjan Cauchyn tulo itsensä kanssa:

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \right).$$

Tässä

$$\begin{array}{rcl} xf(x) & = & x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} - \cdots \\ -\frac{x^3}{3!}f(x) & = & -\frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{36} + \cdots \\ +\frac{x^5}{5!}f(x) & = & +\frac{x^6}{120} + \cdots \\ \hline f(x)^2 & = & x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + \cdots \end{array}$$

Toinen ratkaisu saadaan käyttämällä trigonometristen funktioiden identiteettiä

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Sijoitetaan siis kosinin Maclaurinin sarjaan x :n paikalle $2x$, ja jaetaan näin saatu sarja kahdella:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^4}{24} + \frac{(2x)^6}{720} - \dots \right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + \dots \end{aligned}$$

Vielä kolmas tapa olisi tietenkin laskea funktion derivaattoja riittävän monta, jotta haluttu määrä termejä selviää. Tämä johtaa kuitenkin mutkikkaampiin laskuihin, joissa virheen riski kasvaa. Tällöin myös saatavan sarjan suppeneminen tulisi selvittää erikseen esimerkiksi Lausetta 5.34 käyttäen.

Esimerkki 5.38. Määrää funktion $f(x) = \tan x$ Maclaurinin sarjan 4 ensimmäistä nollasta eroavaa termiä potenssisarjojen jakolaskua käyttäen.

Ratkaisu. Funktio f on pariton. Näin ollen sen derivaatta f' on parillinen (harjoitustehtävä), toinen derivaatta f'' pariton jne. Koska pariton funktio häviää nollassa, niin sen Maclaurinin sarjassa esiintyy vain muuttujan x parittomia potensseja. Tämän perusteella tiedämmekin jo, että (edellyttäen, että tangentin Maclaurinin sarja ylipäättään suppenee ja esittää sitä jollakin välillä)

$$\tan x = T(x) = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + c_7 x^7 + \dots$$

Ratkaistaan alkupään kertoimia $c_1, c_3, \dots$ muodostaen tarvittavat yhtälöt käyttäen hyväksi potenssisarjojen identtisyyslausetta sekä sitä tietoa, että sarjan $T(x)$ ja kosinin sarjan $C(x)$ Cauchyn tulo on oltava sinin sarja $S(x)$. Cauchyn tulo on

$$\begin{aligned} T(x)C(x) &= T(x) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots \right) \\ &= x \cdot c_1 + x^3 \left(c_3 - c_1 \cdot \frac{1}{2} \right) + x^5 \left(c_5 - c_3 \cdot \frac{1}{2} + c_1 \cdot \frac{1}{24} \right) + \\ &\quad + x^7 \left(c_7 - c_5 \cdot \frac{1}{2} + c_3 \cdot \frac{1}{24} - c_1 \cdot \frac{1}{720} \right) + \dots, \end{aligned}$$

joten vertailemalla vastinkertoimia sinin Maclaurinin sarjan kanssa saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} c_1 &= 1 \\ c_3 - c_1 \cdot \frac{1}{2} &= -\frac{1}{6} \\ c_5 - c_3 \cdot \frac{1}{2} + c_1 \cdot \frac{1}{24} &= \frac{1}{120} \\ c_7 - c_5 \cdot \frac{1}{2} + c_3 \cdot \frac{1}{24} - c_1 \cdot \frac{1}{720} &= -\frac{1}{5040} \\ \vdots &\vdots \end{cases}$$

Tästä ketjureaktiona ratkeaa tangentin sarjaksi

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$$

Kompleksianalyysin kurssilla osoitetaan, että sarja suppenee ja esittää tangenttia välillä $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Koska tangenttia ei ole edes määritelty pisteissä $x = \pm\pi/2$, niin ei ole yllättävää, että suppenemissäde $R \leq \pi/2$. Tällä hetkellä käytössämme olevilla metodeilla olisi vaikeaa nähdä, miksi $R = \pi/2$.

Edellisen esimerkin alussa tehdyt havainnot yleistyvät:

- Parittoman funktion Maclaurinin sarjassa esiintyy vain muuttujan x parittomia potensseja.

$$f(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + \dots$$

- Parillisen funktion Maclaurinin sarjassa esiintyy vain muuttujan x parillisia potensseja.

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \dots$$

Huomautus 5.39. On olemassa funktioita, joiden Maclaurinin sarja suppenee kaikkialla, mutta ei esitä kyseistä funktiota muualla kuin pisteessä $x = 0$. Esimerkki tällaisesta funktiosta on

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = 0, \\ e^{-1/x^2}, & \text{kun } x \neq 0. \end{cases}$$

Voidaan osoittaa, että tällä funktiolla on kaikkien kertalukujen derivaatat, ja että $f^{(n)}(0) = 0$ olipa $n \in \mathbf{N}$ mikä tahansa. Todistus perustuu seuraavaan faktaan (nähdään induktiolla). Kun $x \neq 0$, niin $f^{(n)}(x)$ on muotoa $P_n(1/x)e^{-1/x^2}$, missä P_n on jokin polynomi. Tällöin funktion $f^{(n)}$ pisteessä nolla muodostettu erotusosamäärä on samanlaista muotoa. Vaihtamalla muuttujaksi $t = 1/x$ (jolloin $t \rightarrow \pm\infty$, kun $x \rightarrow 0$) ja käyttämällä tulosta “eksponenttifunktio voittaa potenssifunktion” nähdään, että kyseisen erotusosamäärän raja-arvoksi tulee nolla, joten $f^{(n+1)}(0) = 0$. Tämän jälkeen väite seuraa induktiolla.

Kun kerran kaikkien kertalukujen derivaatat origossa häviävät, Maclaurinin sarjan kertoimet ovat kaikki nollia. Näin ollen sarjan summa on identtisesti nolla. Toisaalta $f(x) = 0$ ainoastaan silloin, kun $x = 0$.

Esimerkki 5.40. (Binomisarja) Oletetaan, että $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$. Osoita, että

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

aina, kun $|x| < 1$.

Ratkaisu. Funktiolle $f(x) = (1+x)^\alpha$ on $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$, joten väiteyhtälön oikea puoli on funktion $f(x)$ Maclaurinin sarja

$$S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Koska oletimme, että α ei ole kokonaisluku, tämän sarjan kaikki kertoimet ovat nollasta eroavia. Määrätään ensin sarjan $S(x)$ suppenemissäde osamäärätarkastimen raja-arvomuotoa käyttäen. Koska

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = |x| \frac{|\alpha-n|}{n+1} \rightarrow |x|,$$

kun $n \rightarrow \infty$, niin suppenemissäde $R = 1$. Sarjan $S(x)$ derivoiminen termeittäin on siis luvallista välillä $x \in (-1, 1)$. Suoraviivainen lasku osoittaa, että

$$\alpha S(x) = (1+x)S'(x).$$

Tämän avulla nähdään, että funktion $g(x) = (1+x)^\alpha/S(x)$ derivaatta häviää välillä $(-1, 1)$, joten $g(x)$ on vakiofunktio $g(x) = g(0) = 1$. Näin ollen $S(x) = f(x)$ aina, kun $|x| < 1$.

Tunnetuista Maclaurinin ja Taylorin sarjoista saadaan potenssisarjojen teorian päätulosten (Lause 5.27) avulla uusia sarjoja derivoimalla ja integroimalla. Derivoimalla jo käytimme yllä johtaessamme kosinin sarjan sinin sarjasta. Seuraavaksi johdamme sarjat arkustangentille ja arkussinille termeittäin integroimalla.

Esimerkki 5.41. Osoita, että kun $x \in [-1, 1]$, niin

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Ratkaisu. Koska arkustangentti on funktion $f(x) = 1/(1+x^2)$ määräämätön integraali, lähdemme liikkeelle suppenevasta geometrisesta sarjasta ($|t| < 1$)

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}.$$

Väitetty sarja saadaan tästä Lauseen 5.27 mukaisesti laskemalla puolittain määrättyt integraalit yli välin $[0, x]$. Kuten Esimerkissä 5.15 näemme vuorottelevia sarjoja koskeva Leibnizin lauseen nojalla, että suppeneminen on itse asiassa tasaista koko välillä $[-1, 1]$. Jatkuvuus päättelyn avulla (vrt. Esimerkki 5.15) nähdään sitten, että sarja esittää arkustangenttia myös pisteissä $x = \pm 1$. Erityisesti, kun $x = 1$ saamme tuloksen

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

Periaatteessa tätä sarjaa voitaisiin käyttää luvun π arvon määrittämiseen, mutta sen suppeneminen on siihen liian hidasta. Jotta summassa olisi edes 3 oikeaa desimaalia, on osasummaan otettava mukaan noin 500 termiä.

Esimerkki 5.42. Kun sijoitetaan binomisarjaan $x = -t^2$ ja $\alpha = -1/2$ saadaan välillä $|t| < 1$ voimassa oleva sarjaesitys

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}t^{2n} + \cdots$$

Integroimalla tämä termeittäin yli välin $t \in [0, x]$ saadaan

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Kun luku x on hyvin lähellä sarjan keskipistettä x_0 , potenssit $(x-x_0)^n$ ovat sitä pienempiä, mitä suurempi eksponentti n on. Näin ollen Taylorin sarja matala-asteiset termit ovat määrääviä tällaisessa tilanteessa. Katsomme seuraavaksi, miten tätä voidaan hyödyntää mahdollisen ääriarvokohdan luonteen selvittämiseksi sekä raja-arvojen tutkimiseen.

Esimerkki 5.43. Selvitä, onko funktiolla $f(x) = \sin x - x\sqrt{1+x^3}$ ääriarvokohta origossa.

Ratkaisu. Nyt $f'(x) = \cos x - \sqrt{1+x^3} - x \cdot 3x^2(1+x^3)^{-1/2}/2$, joten $f'(0) = 1 - 1 - 0 = 0$, ja ääriarvokohta on mahdollinen. Toinen derivaatta ei tuo selvyyttä asiaan, sillä

$$f''(x) = \frac{9x^5}{4(1+x^3)^{3/2}} - \frac{6x^2}{\sqrt{1+x^3}} - \sin x,$$

joten $f''(0) = 0$. Yhdistämällä binomisarjaa ($\alpha = 1/2$) ja sinifunktion sarjaa koskevat tietomme näemme, että funktiota $f(x)$ esittää välillä $x \in (-1, 1)$ suppeneva Maclaurinin sarja

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \dots\right) - x\left(1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \dots\right) \\ &= -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{629}{5040}x^7 \dots \\ &= x^3 \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{120}x^2 + \frac{629}{5040}x^4 \dots\right) \end{aligned}$$

Merkitään $g(x)$:llä viimeisen muodon sulkulauseketta $g(x) = -1/6 - x/2 + x^2/120 + \dots$. Koska tiedämme, että $f(x)$:n Maclaurinin sarja suppeni, kun $|x| < 1$, niin sarja $g(x)$ suppenee niin ikään tällä välillä, ja sen summafunktio on näin ollen tällä välillä jatkuva. Koska $g(0) = -1/6 < 0$, niin tiedämme, että jossakin luvun 0 ympäristössä $g(x)$ saa vain negatiivisia arvoja. Tekijä x^3 sen sijaan vaihtaa merkkiään tässä samassa ympäristössä. Näin ollen niiden tulo $f(x) = x^3g(x)$ saa nollan mielivaltaisen pienessä ympäristössä kummankin merkkisiä arvoja. Voimme päätellä, että $x = 0$ ei ole funktion f ääriarvokohta.

Esimerkki 5.44. Selvitä, onko $x = 0$ funktion $f(x) = \cos x + (1/2)x \sin x$ ääriarvokohta?

Ratkaisu. Jälleen $f'(0) = f''(0) = 0$, joten kurssin Analyysi I metodeista ei ole apua. Kombinoimalla sinin ja kosinin sarjat nähdään, että funktiota $f(x)$ esittää kaikkialla suppeneva Maclaurinin sarja

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + \frac{1}{2}x\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \dots\right) \\ &= 1 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{12}\right)x^4 + \dots \\ &= 1 + x^4(-1/12 + c_6x^2 + c_8x^4 + \dots), \end{aligned}$$

missä $c_6, c_8, \dots$ ovat parillisen funktion $f(x)$ Maclaurinin sarjan korkeampiasteisten termien kertoimia. Sulkulausekkeen sarjan määräämä funktio $g(x) = -1/12 + c_6x^2 + \dots$ on kaikkialla jatkuva, ja $g(0) = -1/12 < 0$, joten jossakin nollan ympäristössä $Y(0; \delta)$ funktion g saamat arvot ovat kaikki negatiivisia. Koska $x^4 \geq 0$ kaikkialla, ja $= 0$ vain, kun $x = 0$, niin puhkaistussa ympäristössä $Y'(0; \delta)$ on aina $x^4g(x) < 0$. Näin ollen $f(0) = 1$ on lokaali maksimi.

Kahden edellisen esimerkin tulokset on helppo yleistää seuraavaksi yleiseksi säännöksi.

Lause 5.45. Oletetaan, että funktiota $f(x)$ esittää pisteen $x = x_0$ jossakin ympäristössä Taylorin sarja

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Olkon $n_0 > 0$ pienin sellainen indeksin n arvo, jolle $a_n \neq 0$. Jos n_0 on pariton, niin funktiolla f ei ole ääriarvokohtaa pisteessä x_0 . Jos n_0 on parillinen, niin funktiolla f on lokaali ääriarvokohta pisteessä x_0 , ja sen luonne selviää seuraavalla tavalla: mikäli $a_{n_0} > 0$ on kyseinen ääriarvokohta lokaali minimi, ja jos taas $a_{n_0} < 0$, niin kyseessä on lokaali maksimi.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Huomautus 5.46. Edellisen lauseen tulos voidaan yleistää koskemaan myös sellaista tilannetta, jossa emme vielä tiedä jonkin Taylorin sarjan esittävän ko. funktiota. Erityisesti jos tiedämme vain derivaattojen $f^{(k)}$, $1 \leq k \leq n_0$ olemassaolon ja sen, että $f^{(k)}(x_0) = 0$ aina, kun $k = 1, 2, \dots, n_0 - 1$, voimme käyttää Taylorin lausetta (Lause 5.34). Jos siinä pystymme päättämään kertoimen $f^{(n_0)}(\xi)$ etumerkin, niin johtopäätös on sama kuin yllä.

Tässä(kin) mielessä Taylorin lause on nähtävissä differentiaalilaskennan väliarvolauseen (DVAL) korkeampia derivaattoja koskevana yleistysenä.

Seuraavana esimerkkinä sarjojen käytöstä käsittelemme määrättyjen integraalien likiarvojen laskemista. Jos emme kykene löytämään jollekin funktiolle määräämätöntä integraalia, mutta tunnemme sitä esittävän Taylorin sarjan, niin voimme käyttää potenssisarjojen termeittäistä integrointia. Haluttuun tarkkuteen pääsemiseksi on arvioitava termeittäin integroimalla saadun sarjan jäännöstermiä. Emme esitä mitään yleistä teoriaa, vaan valaisemme yleisimpiä tekniikoita seuraavan kahden esimerkin avulla.

Esimerkki 5.47. Etsi määrätylle integraalille

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

sellainen likiarvo, joka poikkeaa tarkasta arvosta enintään $1/1000$.

Ratkaisu. Funktiolla $f(x) = e^{x^2}$ ei ole alkeisfunktioiden avulla lausuttavaa primitiiviä (emme todista tätä). Sille kuitenkin saadaan Maclaurinin sarjakehitelmä sijoittamalla kaikkialla suppenevan eksponenttifunktion sarjaan $E(x)$ muuttujan paikalle x^2 . Siis $\forall x \in \mathbf{R}$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}.$$

Integroimalla tämä välillä $[0, 1]$ tasaisesti suppeneva sarja termeittäin tämän välin yli saadaan

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{2k+1}.$$

Merkitään tulokseksi saadun sarjan yleistä termiä $a_k = 1/(2k+1)k!$. Tällöin kahden peräkkäisen termin suhteelle saadaan arvio

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k!(2k+1)}{(k+1)!(2k+3)} = \frac{2k+1}{(k+1)(2k+3)} \leq \frac{1}{k+1}.$$

Merkitään $q = 1/(n+1)$. Tällöin kaikille $k \geq n$ on voimassa $a_{k+1}/a_k \leq q$, joten induktiolla saamme arvion $a_{n+p} \leq q^p a_n$ aina, kun $p > 0$. Näin ollen jäännöstermille saadaan sitä majoroivan geometrisen sarjan avulla arvio

$$0 \leq R_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k \leq \sum_{p=0}^{\infty} q^p a_n = \frac{a_n}{1-q} = \frac{1}{n!(2n+1)} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)}{n!(2n+1)n}.$$

Kun $n = 5$, on $R_n \leq 6/(120 \cdot 11 \cdot 5) = 1/1100 < 1/1000$, joten vastaukseksi saadaan

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \approx 1,462.$$

Esimerkki 5.48. Etsi määrätylle integraalille

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

sellainen likiarvo, joka poikkeaa tarkasta arvosta enintään $1/1000$.

Ratkaisu. Tällä kertaa Maclaurinin sarja on

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Termeittäin integroimalla saadaan

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}.$$

Tämä sarja on alternoiva ja vähenevä heti ensimmäisestä termistä alkaen. Näin ollen jäännöstermiä on tällä kertaa yksinkertaisinta arvioida Leibnizin lauseen avulla. Ensimmäinen termi, joka on itseisarvoltaan $< 1/1000$ on termi $k = 3$. Halutulla tarkkuudella vastaukseksi saadaan siten

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx \sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} = 0,946.$$

Raja-arvojen määrittämisessä Taylorin sarjojen käyttö on joskus houkutteleva vaihtoehto useampikertaiselle l'Hospitalin säännön soveltamiselle.

Esimerkki 5.49. Määrittää raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x - x^3/2}{\arctan x - x + x^3/3}.$$

Ratkaisu. Osoittajan Maclaurinin sarja on

$$f(x) = \tan x - \sin x - x^3/2 = x(1-1) + x^3(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}) + x^5(\frac{2}{15} - \frac{1}{120}) + c_7x^7 + c_9x^9 + \dots = \frac{1}{8}x^5 + c_7x^7 + \dots$$

joillekin kertoimille $c_7, c_9, \dots$. Aikaisemmin mainittujen faktojen perusteella tämä sarja suppenee ja esittää osoittajan funktiota, kun $|x| < \pi/2$. Näin ollen kyseinen sarja soveltuu käytettäväksi, kun $x \rightarrow 0$. Vastaavasti nimittäjää esittävä sarja saadaan arkustangentin sarjasta

$$g(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3} = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$$

Tämä sarja suppenee ja esittää funktiota $g(x)$, kun $|x| \leq 1$. Näin ollen tutkittavaa funktiota esittää sarjojen osamäärä

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^5(\frac{1}{8} + c_7x^2 + c_9x^4 + \dots)}{x^5(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}x^2 + \dots)} \quad \text{olet. } x \neq 0 \quad = \frac{\frac{1}{8} + c_7x^2 + c_9x^4 + \dots}{\frac{1}{5} - \frac{1}{7}x^2 + \dots}.$$

Tässä selvästi osoittaja ja nimittäjä ovat jatkuvia välillä $|x| \leq 1$, joten kun $x \rightarrow 0$, ne lähestyvät ilmeisiä raja-arvojaan, ja tulokseksi saadaan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/8}{1/5} = \frac{5}{8}.$$

Vaihtoehtoinen ratkaisutapa olisi soveltaa l'Hospitalin sääntöä viisi kertaa. Tällä kertaa vaadittavat korkean kertaluvun derivaatat olisivat kohtuullisen mutkikkaita lausekkeita (kokeile, jos et usko!)

Luku 6

Usean muuttujan funktion differentiaalilaskentaa ja geometrisia sovelluksia

Kertaa tässä vaiheessa kurssilla Analyysi I esitetyt asiat kahden muuttujan funktioiden jatkuvuudesta ja osittaisderivaatoista. Ne yleistyvät luonnollisella tavalla kolmen tai useamman muuttujan funktion tapaukseen. Alla esitämme muutamille tuloksille todistuksen, joka on nähtävä vain erikoistapauksena myöhemmän kurssin yleisempää tapausta koskevan tuloksen todistuksesta. Nämä todistukset on otettu mukaan vaativimpien lukijoiden tarpeita ajatellen, mutta niiden yksityiskohtien hallintaa ei tällä kurssilla edellytetä. Tällä kurssilla tavoitteena on tässä (ja seuraavassa) luvussa esitellä Analyysin tarjoamia työkaluja kahden muuttujan funktioiden kuvaajien ja 3-ulotteisen maailman ‘sileiden’ pintojen ja käyrien hallitsemiseksi. Pääpaino on siis geometrisen mielikuvan ja analyysin työkalun välisen yhteyden omaksumisessa. Yksityiskohtien tarkka käsittely tapahtuu myöhemmillä kursseilla. Suosittelenkin, että kertaat tämän luvun materiaalin valmistautuessasi kurssille *Usean muuttujan funktiot*.

6.1 Avaruuden $\mathbf{R}^3$ vektoreista, suorista ja tasoista

Luvun aluksi kertaamme 3-ulotteisen avaruuden $\mathbf{R}^3$ vektorien, suorien ja tasojen peruskäsitteistön. Todistukset esitetyille tuloksille ovat koulukursseissa tai kurssin Lineaarialgebra alussa, joten emme käsittele niitä tässä yhteydessä. Lineaarialgebran kurssilla mukana olleet voivat siirtyä suoraan seuraavaan kappaleeseen.

Kolmiulotteisista vektoreista käytetään matematiikassa yleisimmin merkintää

$$\mathbf{u} = (a, b, c)$$

kuvaamaan pisteitä $O = (0, 0, 0)$ ja $P = (a, b, c)$ yhdistävän suuntajanan $\overrightarrow{OP}$ määäämää vektoria $\mathbf{u}$. Etenkin fysiikassa esitetään kyseinen vektori usein koordinaattiakselien suuntaisten yksikkövektorien

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

avulla muodossa

$$\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Pythagoraan lauseen avulla saadaan vektorin $\mathbf{u}$ pituudelle helposti lauseke

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Vektori $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ja sen skalaarimonikerta $a\mathbf{u} = (au_1, au_2, au_3)$ ($a \neq 0$ on vakio) ovat yhdensuuntaisia. Sanotaan, että ne ovat samansuuntaisia, jos $a > 0$ ja vastakkaissuuntaisia, jos $a < 0$.

Vektoreille voidaan määritellä kaksi usein esiintyvää operaatiota. Kahden vektorin $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ja $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *sisätulo* (eli pistetulo eli skalaaritulo) määritellään kaavalla

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Sisätulosta käytetään monissa yhteyksissä myös pistetulomerkinä $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Kahden vektorin sisätulo on siis paljas luku. Erityisesti muistettavia sisätulon ominaisuuksia ovat

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= |\mathbf{u}|^2, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \alpha, \end{aligned}$$

missä α on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma. Erityisesti siis kaksi nollavektorista $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ eroavaa vektoria $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa silloin ja vain silloin, kun niiden sisätulo on nolla:

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \text{kun } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \text{ ja } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Kahden vektorin $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ja $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *ristitulo* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ sen sijaan on vektori

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Ristitulon $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ suunta määräytyy melkein kokonaan siitä, että suoraviivainen lasku osoittaa sisätulojen $(\mathbf{u}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$, joten ristitulo on kohtisuorassa kumpaakin vektoria $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ vastaan. Vastakkais-suuntaisen vaihtoehdon poissulkemiseksi käytetään yleensä ns. oikeakätistä sääntöä: jos oikean käden sormet voidaan kääntää sellaisiin asentoihin, että peukalo on samansuuntainen vektorin $\mathbf{u}$ ja etusormi vektorin $\mathbf{v}$ kanssa, niin tällöin keskisormi voidaan kääntää ristitulovektorin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ suuntaiseksi niveliä murskaamatta. Erityisesti 3-ulotteisia koordinaatistoja hahmoteltaessa on usein syytä olla tarkkana sen kanssa, että koordinaattiakselien suunnat vastaava oikeakätistä sääntöä ristitulon $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ mukaisesti.

Ristitulovektorin pituudelle voidaan todistaa lauseke

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \alpha,$$

missä α jälleen on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma.

Kolmiulotteisen avaruuden suora L määräytyy, kun tunnetaan suoralta yksi piste $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja suoran *suuntavektori* $\mathbf{v} = (a, b, c)$. Oletetaan siis, että ainakin yksi luvuista a, b, c eroaa nolasta. Suora

L on sitten niiden pisteiden $P = (x, y, z)$ joukko, joille suuntajana $\overrightarrow{P_0P}$ on yhdensuuntainen vektorin $\mathbf{v}$ kanssa. Tällöin on oltava $\overrightarrow{P_0P} = t(a, b, c)$ jollekin reaaliluvulle t (valinta $t = 0$ vastaa pistettä P_0). Koska $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$ saadaan L :lle *parametriesitys*

$$\begin{cases} x &= x_0 + ta, \\ y &= y_0 + tb, \\ z &= z_0 + tc. \end{cases}$$

eliminoimalla tästä parametri t saadaan L :n *standardimuotoinen yhtälö(pari)*

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Tässä on eroteltava erikoistapauksina ne tilanteet, joissa jokin (tai jotkin kaksi) suuntavektorin komponenttia häviää. Tällöin vastaava koordinaatin arvo suoralla on vakio. Huomaa, ettei suora L määrää mitään näistä yhtälöistä yksikäsitteisesti, sillä P_0 voidaan korvata millä tahansa suoran L toisella pisteellä, ja suuntavektori $\mathbf{v}$ voidaan korvata millä tahansa sen kanssa yhdensuuntaisella vektorilla.

Kolmiulotteisen avaruuden taso T määräytyy, kun tunnetaan tasolta yksi piste $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja tason *normaali(vektori)* $\mathbf{n} = (a, b, c)$. Tällöin piste $P = (x, y, z)$ on tasolla T silloin ja vain silloin, kun suuntajana $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ on kohtisuorassa normaalia $\mathbf{n}$ vastaan. Tämä on helpointa ilmaista tarkistamalla kohtisuoruus sisätulon avulla:

$$(\overrightarrow{P_0P}, \mathbf{n}) = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Tämä esitetään usein standardimuodossa

$$T : ax + by + cz = d,$$

missä vakio $d = ax_0 + by_0 + cz_0$. Standardimuotoisesta tason yhtälöstä on helppo lukea eräs normaalivektori (a, b, c) . Huomaa, ettei tasonkaan standardimuotoinen yhtälö ole yksikäsitteinen, vaan se voidaan kertoa millä tahansa nollasta eroavalla vakiolla. Joissakin tilanteissa halutaan taso esittää kahden muuttujan funktion kuvaajana $z = f(x, y)$. Tämä on mahdollista silloin, kun $c \neq 0$, koska silloin voidaan standardimuotoisesta yhtälöstä ratkaista z :

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y + \frac{d}{c}.$$

Esimerkki 6.1. Selvitä, missä pisteessä suora L

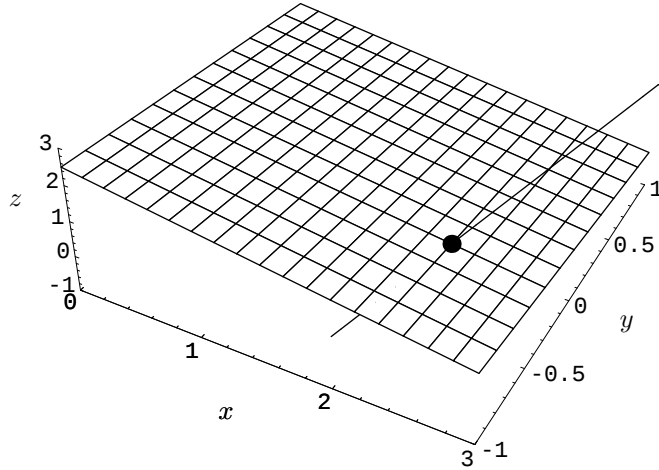
$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z - 2}{3}$$

leikkaa tason

$$T : x + y + 2z = 4.$$

Ratkaisu. Suoran L parametriesitys on $(x, y, z) = (3, 1, 2) + t(2, 4, 3) = (3 + 2t, 1 + 4t, 2 + 3t)$. Sijoitetaan nämä tason T yhtälöön, jolloin saadaan yhtälö

$$4 = x + y + 2z = (3 + 2t) + (1 + 4t) + 2(2 + 3t) = 8 + 12t.$$



Kuva 6.1: Taso, suora ja niiden leikkauspiste

Tästä ratkeaa $t = -1/3$. Leikkauspiste on siten

$$(x, y, z) = (3, 1, 2) + t(2, 4, 3) = (3 + 2t, 1 + 4t, 2 + 3t) = (3 + 2(-1/3), 1 + 4(-1/3), 2 + 3(-1/3)) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).$$

Kuvassa 6.1 on kuva tästä tilanteesta. Käytetty piirto-ohjelma piirtää koordinaattiakselit kuvattua 3-ulotteista aluetta ympäröivän suorakulmaisen särmiön reunoille. Näin ollen nämä eivät kulje yleensä origon kautta, ja koordinaattien lukeminen vaatii hieman mielikuvitusta. Kuvassa on mukana tasosta T se osa, jolla $0 \leq x \leq 3$ ja $-1 \leq y \leq 1$. Suorasta L on mukana se osa, jossa $-1 \leq z \leq 3$. Pinta esitetään mustavalkokuvassa ruudukkona, joka yleensä ei ole läpinäkyvä. Yleensä käytän tasavälistä jakoa x - ja y -suunnissa, joten 'laskemalla ruutuja' huomaa, että tasoa T kuvaavassa ruudukossa x - ja y -koordinaatit muuttuvat $1/6$ verran siirryttäessä viereiseen ruutuun. Joissakin myöhemmissä kuvissa on tarkoituksenmukaisempaa käyttää tasavälistä jakoa muille parametreille kuin xy -koordinaateille (esimerkiksi napakoordinaateille tai muille kulmasuureille).

6.2 Kahden muuttujan funktion differentioituvuus ja tangenttitaso

Esimerkki 6.2. Määritellään funktio $f(x, y)$ asettamalla $f(0, 0) = 0$ ja

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{aina, kun } (x, y) \neq (0, 0).$$

Totea, että funktiolla f on origossa osittaisderivaatat $f_x(0, 0)$ ja $f_y(0, 0)$, mutta että se ei ole jatkuva origossa.

Ratkaisu. Koska kaikille $x \in \mathbf{R}$, $f(x, 0) = 0$ ja kaikille $y \in \mathbf{R}$, $f(0, y) = 0$, niin koordinaattiakseleilla kyseessä on vakiofunktio nolla. Näin ollen osittaisderivaatat origossa ovat olemassa, ja $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

Toisaalta suoralla $y = x$ on

$$f(x, y) = f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{aina, kun } x \neq 0.$$

Kyseinen suora kulkee origon kautta, joten funktio f saa arvon $1/2 \neq f(0, 0)$ mielivaltaisen lähellä origoa. Näin ollen f ei ole origossa jatkuva.

Luvun alun esimerkin perusteella emme määrittele kahden muuttujan funktion differentioituvuutta pelkästään osittaisderivaattojen olemassaolon perusteella, koska ehdottomasti vaadimme, että differentioituvuudesta seuraa jatkuvuus.

Yhden muuttujan funktion $f(x)$ tapauksessa differentioituvuus (=derivoituvuus) pisteessä $x = a$ määriteltiin siten, että edellytettiin funktion kuvaajan seuraavan tangenttisuoraa seuraavassa mielessä: Olkoon $b = f(a)$ ja $k = f'(a)$ tangenttisuoran $T : y = k(x - a) + b$ kulmakerroin. Tällöin yhtälö

$$f(a + h) = f(a) + k \cdot h + \eta(h) \cdot |h|$$

määrittelee funktion $\eta(h)$, ja differentioituvuudessa vaaditaan, että

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta(h) = 0.$$

Otamme tämän malliksi, kun määrittelemme kahden muuttujan funktion $f(x, y)$ differentioituvuuden pisteessä $P = (a, b)$. Oletetaan ensinnäkin, että f on määritelty jossakin pisteen P ympäristössä $Y(P; r)$, $r > 0$. Olkoon $c = f(a, b)$. Tällöin funktion kuvaajana oleva avaruuden $\mathbf{R}^3$ pinta $z = f(x, y)$ tietenkin kulkee pisteen $Q = (a, b, c)$ kautta. Tämän pisteen kautta kulkee useita tasoja. Jos k_1 ja k_2 ovat mielivaltaisia vakioita, niin

$$T : z = c + k_1(x - a) + k_2(y - b)$$

on tällainen taso. Itse asiassa kaikki sellaiset pisteen Q kautta kulkevat tasot, joiden normaali ei ole z -akselia vastaan kohtisuorassa, ovat tätä muotoa (vrt. *Lineaarialgebra*).

Kun (x, y) on lähellä pistettä $P = (a, b)$, merkitsemme $x = a + h$, $y = b + k$, missä vektorin (h, k) molemmat komponentit ovat pieniä. Tämän vektorin pituus $|(h, k)| = \sqrt{h^2 + k^2}$ toteuttaa epäyhtälöt

$$0 \leq \max\{|h|, |k|\} \leq |(h, k)| \leq |h| + |k|,$$

ja $|(h, k)| > 0$, jos ainakin toinen komponenteista $h, k \neq 0$. Tällöin

$$(a + h, b + k) \in Y(P; r) \Leftrightarrow |(h, k)| < r.$$

Vaadimme siten differentioituvalta kahden muuttujan funktiolta, että sen kuvaaja "seuraa läheisesti erästä tasoa" seuraavan määritelmän mukaisesti.

Määritelmä 6.3. Oletetaan, että funktio $f(x, y)$ on määritelty pisteen $P = (a, b)$ ympäristössä $Y(P; r)$. Olkoot k_1 ja k_2 reaalisia vakioita. Kun $(a + h, b + k) \in Y(P; r)$, niin yhtälö

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + k_1 h + k_2 k + \eta(h, k)|(h, k)|$$

määrittelee funktion $\eta(h, k)$. Jos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \eta(h, k) = 0, \quad (*)$$

niin sanomme, että taso

$$T : z = f(a, b) + k_1(x - a) + k_2(y - b)$$

on *pinnan* $z = f(x, y)$ *pisteeseen* $Q = (a, b, f(a, b))$ *piirretty tangenttitaso*. Sanomme, että funktio $f(x, y)$ on *differentioituva* pisteessä P , jos sen kuvaajalla on pisteessä Q jokin tällainen tangenttitaso, eli jos ehto $(*)$ toteutuu joillakin vakioiden $k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ arvoilla.

Huomautus 6.4. Aivan kuten yhden muuttujan funktion tapauksessa emme sallineet derivoituvuuden yhteydessä kuvaajalle pystysuoraa tangenttia (vaikka sallimme sen esimerkiksi parametrimuotoiselle tai implisiittisesti annetulle *käyrälle*), niin emme tässäkään yhteydessä salli sellaista tangenttitasoa, jonka normaali olisi kohtisuorassa z -akselia vastaan. Parametrimuodossa tai implisiittisesti annetulle *pinnalle* tällainen tangenttitaso on kuitenkin luonnollista sallia (esimerkiksi pallopinnan päiväntasaajalla olevassa pisteessä). Tangenttitaso on silloin vain määriteltävä hieman toisin.

On kuitenkin odotettavissa, että funktion differentioituvuus läheisesti liittyy osittaisderivaattoihin. Osoitetaan, että osittaisderivaattojen jatkuvuus (kahden muuttujan funktioina) on riittävä (mutta ei välttämättöm) ehto differentioituvuudelle.

Lause 6.5. *Oletetaan, että funktiolla $f(x, y)$ on pisteen $P = (a, b)$ ympäristössä $Y = Y(P; r), r > 0$ olemassa jatkuvat osittaisderivaatat f_x ja f_y . Tällöin funktio f on differentioituva pisteessä P , ja differentioituvuuden määritelmässä esiintyvät vakiot k_1 ja k_2 saadaan osittaisderivaatoista*

$$k_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad k_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Erityisesti siis tangenttitason T yhtälöksi tulee tällöin

$$T : z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Todistus. Kiinnitetään ensin hetkeksi erotusvektori (h, k) . Oletetaan, että $|(h, k)| < r$. Kirjoitetaan erotus $f(a + h, b + k) - f(a, b)$ muodossa

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = [f(a + h, b + k) - f(a + h, b)] + [f(a + h, b) - f(a, b)].$$

Arvioimme tässä kumpaakin hakasulkulauseketta erikseen käyttäen hyväksi yhden muuttujan funktion differentiaalilaskennan väliarvolauseetta (=DVAL). Ensimmäisessä hakasulkulausekkeessa on muuttujan x paikalla koko ajan $x = a + h$. Tutkimme siis apufunktiota $g(y) = f(a + h, y)$, joka on oletustemme nojalla jatkuvasti derivoituva välillä $y \in [b, b + k]$ (tai välillä $[b + k, b]$, jos $k < 0$). Näin ollen DVALin nojalla lukujen nolla ja k välillä on sellainen luku ξ_1 , että

$$f(a + h, b + k) - f(a + h, b) = g(b + k) - g(b) = k \cdot g'(b + \xi_1) = k f_y(a + h, b + \xi_1).$$

Vastaavasti jälkimmäisessä hakasulkulausekkeessa on $y = b$, joten käytämme apufunktiota $s(x) = f(x, b)$, joka sekin on oletustemme nojalla jatkuvasti derivoituva välillä $x \in [a, a + h]$ (tai välillä $[a + h, a]$, jos $h < 0$). Näin ollen DVALin mukaan lukujen nolla ja h välillä on sellainen luku ξ_2 , että

$$f(a + h, b) - f(a, b) = s(a + h) - s(a) = h \cdot s'(a + \xi_2) = h f_x(a + \xi_2, b).$$

Yhdistämällä nämä tulokset saamme, että

$$|f(a + h, b + k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k| = R(h, k),$$

missä

$$\begin{aligned} R(h, k) &= |(f_x(a + \xi_2, b) - f_x(a, b))h + (f_y(a + h, b + \xi_1) - f_y(a, b))k| \\ &\leq |f_x(a + \xi_2, b) - f_x(a, b)| |h| + |f_y(a + h, b + \xi_1) - f_y(a, b)| |k| \\ &\leq (|f_x(a + \xi_2, b) - f_x(a, b)| + |f_y(a + h, b + \xi_1) - f_y(a, b)|) |(h, k)|. \end{aligned}$$

Valitaan $k_1 = f_x(a, b)$, $k_2 = f_y(a, b)$, jolloin $R(h, k) = \eta(h, k)|(h, k)|$. Kun $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, niin $\xi_1, \xi_2 \rightarrow 0$ ja funktioiden f_x ja f_y jatkuvuuden nojalla $f_x(a + \xi_2, b) \rightarrow f_x(a, b) = k_1$ ja $f_y(a + h, b + \xi_1) \rightarrow f_y(a, b)$, joten esitetyn ylärajan pakottamana

$$\eta(h, k) = \frac{R(h, k)}{|(h, k)|} \rightarrow 0.$$

□

Huomautus 6.6. Pisteeseen $(a, b, f(a, b))$ piirretyn tangenttitason normaalivektoriksi saadaan siten

$$\mathbf{n} = (-f_x(a, b), -f_y(a, b), 1).$$

Mielivaltainen vektori $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ on yhdensuuntainen vektorin $(x_1/x_3, x_2/x_3, 1)$ kanssa, jos $z = x_3 \neq 0$. Taso määräytyy, kun tunnetaan sen yksi piste sekä sen normaalivektorin suunta (eli vektori skalaarikerrointa vaille). Näin ollen tangenttitason määrittämisen kannalta ei ole välttämätöntä, että normaalin z -komponentti on yksi. Hyödynnämme tätä vapautta myöhemmin tutkiessamme implisiittistä derivointia.

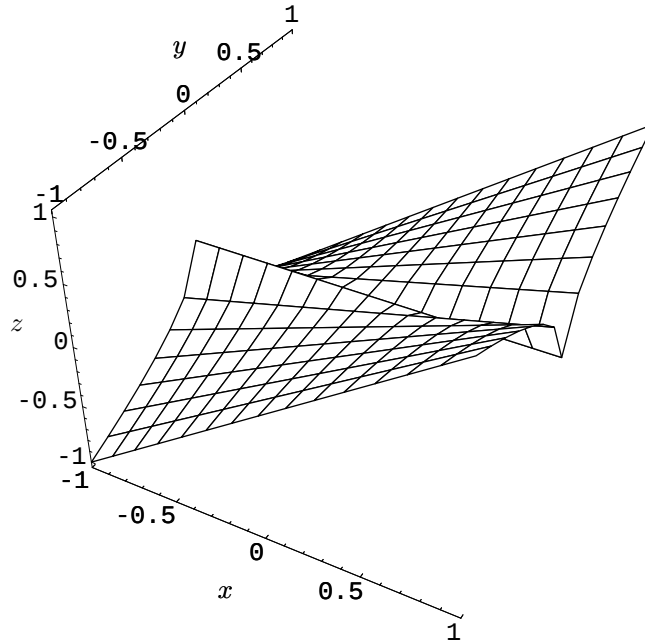
Lauseen 6.5 tilanne on mukavin tapa todeta tutkittavan funktion differentioituvuus. Jos funktio on differentioituva jossakin alueessa (käsite joka määrittellään täsmällisesti kurssilla UMF), niin funktion kuvaajana saatava pinta on sileä, ts. siinä ei ole reikiä, laskoksia eikä repeämiä. Differentioituvuus yksittäisessä pisteessä sallii seuraavan esimerkin kaltaisia tilanteita.

Esimerkki 6.7. Osoita, että funktio $f(x, y) = x\sqrt{|y|}$ ei ole differentioituva pisteissä $(x, 0)$, $x \neq 0$, mutta on differentioituva muualla, erityisesti pisteessä $(0, 0)$.

Ratkaisu. Nyt $f_x = \sqrt{|y|}$ ja $f_y = x \operatorname{sgn} y / 2\sqrt{|y|}$, kun $y \neq 0$. Nämä ovat jatkuvia pisteessä (x, y) kunhan $y \neq 0$, joten differentioituvuus näissä pisteissä seuraa Lauseesta 6.5.

Käsitellään seuraavaksi origo, joten $(a, b) = (0, 0)$. Koska $|(h, k)| \geq |h|$, niin $|h|/|(h, k)| \leq 1$, ja

$$0 \leq \left| \frac{f(h, k)}{|(h, k)|} \right| = \left| \frac{|h|\sqrt{|k|}}{|(h, k)|} \right| \leq \sqrt{|k|}.$$



Kuva 6.2: Funktio $f(x, y) = x\sqrt{|y|}$ kuvaaja.

Kun $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, niin näemme, että differentioituvuusehto toteutuu, kun $k_1 = k_2 = 0$ jolloin $\eta(h, k) = f(h, k)/|(h, k)|$.

Kiinnitetään sitten $x \neq 0$ ja asetetaan $(a, b) = (x, 0)$. Tehdään vastaoletus, että olisi olemassa differentioituvuuden määritelmän edellyttämät vakiot k_1 ja k_2 . Asetetaan $h = 0, k \neq 0$, jolloin $|(h, k)| = |k|$. Nyt

$$f(x + h, k) = f(x, k) = x\sqrt{|k|} = f(x, 0) + k_1 \cdot h + k_2 \cdot k + \eta(h, k)|(h, k)| = 0 + k_2 \cdot k + \eta(0, k)|k|,$$

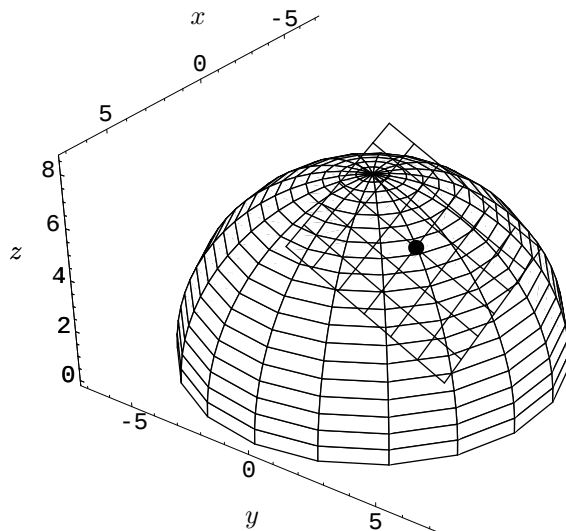
mistä ratkeaa

$$\eta(0, k) = \frac{x\sqrt{|k|} - k_2 k}{|k|} = \frac{x}{\sqrt{|k|}} - k_2 \operatorname{sgn}(k).$$

Tällä ei selvästikään ole raja-arvona nollaa, kun $k \rightarrow 0$ riippumatta vakion k_2 arvon valinnasta, koska $x/\sqrt{|k|} \rightarrow \pm\infty$ x -koordinaatin merkistä riippuen.

Kuvassa 6.2 on kyseisen funktion kuvaaja. Siinä ‘koordinaattiakselit’ on piirretty pinnan osaa ympäröivän 3-ulotteisen laatikon särmille, joten ne eivät leikkaa origossa. Sekä x - että y -koordinaatin vaihteluväli on $[-1, 1]$. Huomaamme, että pinnassa on selkeä laskos suoran $y = 0$ yläpuolella, mutta pinta ‘siliää hetkellisesti’ origon lähistöllä.

Esimerkki 6.8. Piste $Q = (2, 3, 6)$ on funktion $f(x, y) = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ kuvaajalla (=ylempi puolikas origokeskisestä 7-säteisestä pallosta, ks. Kuva 6.3). Määrää kyseisen pallopinnan pisteeseen Q piirretyn tangenttitason yhtälö.



Kuva 6.3: Funktio $f(x, y) = \sqrt{49 - x^2 - y^2}$ kuvaajan pisteeseen $Q = (2, 3, 6)$ piirretty tangenttitaso.

Ratkaisu. Koska pisteen $P = (2, 3)$ lähellä neliöjuuren alla oleva lauseke on positiivinen, on funktiolla f jossakin pisteen P ympäristössä jatkuvat osittaisderivaatat, ja voimme käyttää Lauseen 6.5 tulosta. Nyt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{49 - x^2 - y^2}} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{49 - x^2 - y^2}},$$

joten $f_x(2, 3) = -2/6 = -1/3$ ja $f_y(2, 3) = -3/6 = -1/2$. Tangenttitason yhtälöksi saadaan siten

$$T : z - 6 = -\frac{1}{3}(x - 2) - \frac{1}{2}(y - 3) \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z = 49.$$

Kuvassa 6.3 on tangenttitaso piirretty läpikuultavana ristikkona. Pallopintaa on siinä hahmoteltu ‘leveyspiirien’ ja ‘pituuspiirien’ avulla.

Yhden muuttujan funktion tapauksessa arvioimme differentiaalien avulla funktion arvon muutosta, kun muuttujan arvo muuttui vähän (tai virheanalyysissä kun muuttujan arvoa ei tunnettu tarkasti). Ideana oli, että funktion kuvaaja, ja tangenttisuora pysyivät lähellä toisiaan, kunhan muutos oli pieni. Kahden muuttujan funktion tapauksessa luonnollinen analogia on perustaa likiarvo siihen, että funktion kuvaaja pysyttelee tangenttitason läheisyydessä. Oletamme, että funktio f osittaisderivaattoineen on jatkuva. Määritellään funktion $f(x, y)$ ns. *kokonaisdifferentiaali* df pisteessä (x, y) seuraavasti

$$df = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy.$$

Jos tässä vertailupisteestä (x, y) siirrytään lähellä olevaan pisteeseen $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, niin funktion arvon muutosta

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

voidaan approksimoida kokonaisdifferentiaalin avulla

$$\Delta f \approx df = f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y,$$

sillä tällöin tehtävä virhe on $\Delta f - df = \eta(\Delta x, \Delta y)|(\Delta x, \Delta y)|$. Jos tässä ainakin toinen osittaisderivaatoista $\neq 0$, niin differentioituvuusoletuksen ($\eta(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$) seurauksena $|\Delta f - df|/|\Delta f| \rightarrow 0$, kun $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Kuten yhden muuttujan tapauksessa $\Delta x = dx, \Delta y = dy$.

Kokonaisdifferentiaali yleistyy suoraviivaisella tavalla kolmen tai useamman muuttujan funktiolle. Jos $f = f(x, y, z)$ on osittaisderivaattoineen jatkuva, määritellään

$$df = f_x(x, y, z) dx + f_y(x, y, z) dy + f_z(x, y, z) dz.$$

Kokonaisdifferentiaalia voidaan tällöin käyttää funktion arvon muutoksen arviointiin vastaavalla tavalla.

Esimerkki 6.9. Jos suorakulmaisen kolmion kateetit ovat pituuksiltaan x ja y , niin sen hypotenuusan pituus on Pythagoraan lauseen mukaisesti $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Kun $(x, y) = (8, 6)$ saadaan hypotenuusan pituudeksi $f(8, 6) = 10$. Arvioi kokonaisdifferentiaalin df avulla hypotenuusan pituuden muutosta, jos toinen kateetti kasvaa $8 \rightarrow 8,1$ ja toinen kateetti lyhenee $6 \rightarrow 5,8$. Vertaa tätä todelliseen hypotenuusan pituuden muutokseen Δf .

Ratkaisu. Nyt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Pisteessä $(x, y) = (8, 6)$ näillä on arvot $f_x(8, 6) = 8/10 = 4/5$ ja $f_y(8, 6) = 6/10 = 3/5$. Kokonaisdifferentiaalin avulla saadaan

$$df = \frac{4}{5} \cdot 0,1 + \frac{3}{5} \cdot (-0,2) = 0,08 - 0,12 = -0,04.$$

Tällä kertaa

$$\Delta f = f(8,1, 5,8) - f(8, 6) \approx 9,96423 - 10 = -0,03577.$$

Funktion arvon muutos arvioitiin siis noin 10% liian suureksi. Muutoksen arvion suhteellista tarkkuutta tällä kertaa heikensi se, että samaa suuruusluokkaa olevia termejä vähennettiin toisistaan.

Suhteelliselle virheelle $\Delta f/f$ saadaan vastaavat arviot logaritmistä derivointia käyttäen:

$$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{df}{f} = d(\ln f) = \frac{f_x}{f} dx + \frac{f_y}{f} dy.$$

Näitä menetelmiä mittaustuloksista riippuvien suureiden tarkkuutta analysoitaessa on muistettava, että yleensä mahdollisen virheen etumerkkiä ei tiedetä, ainoastaan yläraja sen suuruudelle. Tällöin on käytettävä itseisarvoja ja kolmioepäyhtälöä kokonaisdifferentiaalin eri termejä yhdistettäessä.

Esimerkki 6.10. Kun sähkövastuksen (resistanssi R) läpi kulkee virta I , kulutetaan tehoa $P = I^2 R$. Millä tarkkuudella tehonkulutus saadaan laskettua, jos virta voidaan mitata 2% tarkkuudella, ja vastuksen valmistaja on taannut resistanssille tarkkuuden 5%?

Ratkaisu. Logaritmisella derivoinnilla saadaan

$$\frac{dP}{P} = d(\ln P) = d(2 \ln I + \ln R) = 2d(\ln I) + d(\ln R) = 2\frac{dI}{I} + \frac{dR}{R}.$$

Nyt $dR/R = \pm 5\%$ ja $dI/I = \pm 2\%$. Pahimmassa tapauksessa (johon meidän on varauduttava) näillä suhteellisilla virheillä on sama etumerkki, joten

$$\left| \frac{dP}{P} \right| \leq 2 \left| \frac{dI}{I} \right| + \left| \frac{dR}{R} \right| = 9\%.$$

6.3 Yhdistetyn funktion derivointi, kahden muuttujan funktion ketjusääntö

Yhden muuttujan funktiota $y = y(x)$, missä muuttuja $x = x(t)$, derivaatta muuttujan t suhteen saadaan ketjusäännön (Analyysi I) mukaan

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Kahden (tai useamman) muuttujan funktion tapauksessa tilanne on hiukan monimutkaisempi, sillä yleisemässä tilanteessa funktion $z = z(x, y)$ kumpikin muuttuja riippuu uudesta muuttujasta t , eli $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Lause 6.11. (Ketjusääntö) Oletetaan, että funktio $z(x, y)$ on tarkastelualueella osittaisderivaattoinen jatkuva, ja että $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ ovat muuttujan t vaihteluvälillä derivoituvia funktioita. Tällöin yhdistetty funktio $z = z(x(t), y(t)) = z(t)$ on derivoituva, ja sen derivaatta on

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Todistus. Täsmällinen todistus esitetään yleisessä tilanteessa kurssilla Usean muuttujan funktiot, joten tyydymme hieman epätäsmälliseen, kuvailevaan perusteluun.

Annetaan muuttujalle t muutos Δt ja merkitään vastaavia muuttujien x ja y muutoksia Δx ja Δy . Lauseen 6.5 mukaan tällöin

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \eta(\Delta x, \Delta y)|(\Delta x, \Delta y)|.$$

Jakamalla tämä puolittain muutoksella Δt saadaan

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \eta(\Delta x, \Delta y) \frac{|(\Delta x, \Delta y)|}{\Delta t}.$$

Kun sitten annamme $\Delta t \rightarrow 0$, niin $\Delta x/\Delta t \rightarrow dx/dt$ ja $\Delta y/\Delta t \rightarrow dy/dt$. Erityisesti siis $|(\Delta x, \Delta y)| \rightarrow 0$, ja $|(\Delta x, \Delta y)|/|\Delta t|$ pysyy rajoitettuna, joten funktiota η koskevan oletuksen nojalla yhtälön oikea puoli lähestyy raja-arvonaan lukua $(\partial z/\partial x)(dx/dt) + (\partial z/\partial y)(dy/dt)$. Väite seuraa. $\square$

Tämän seurauksena saamme seuraavan tuloksen, joka käsittelee sitä tilannetta, jossa sekä x että y riippuvatkin kahdesta uudesta muuttujasta u ja v .

Seuraus 6.12. (Ketjusääntö) Oletetaan, että funktio $z = z(x, y)$ on tarkastelualueella osittaisderivaattoinen jatkuva, ja samoin funktiot $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Tällöin yhdistetty funktio $z = z(x(u, v), y(u, v)) = z(u, v)$ on differentioituva, ja sen osittaisderivaatat saadaan lausekkeista

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.\end{aligned}$$

Todistus. Yhdistetyn funktion $z(u, v)$ osittaisderivaatta u :n suhteen saadaan pitämällä toista muuttujaa v vakiona. Tämä tilanne käsiteltiin ketjusäännön edellisessä versiossa. Osittaisderivaattojen lausekkeet saavat siten edellisen Lauseen seurauksena väitetyn muodon. Koska ne ovat oletusten mukaan jatkuvia funktioita, yhdistetyn funktion differentioituvuus seuraa Lauseesta 6.5. $\square$

Huomautus 6.13. Edellisen Seurauksen esittämät kaavat yhdistetyn funktion osittaisderivaatoille voidaan esittää myös matriisitulona

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Tässä muodossa ketjusääntö yleistyy kaikkein mukavimmin tutkittaessa useamman kuin kahden funktion yhdistettyä funktiota.

Esimerkki 6.14. Laske funktion $z(t) = t^t$ derivaatta dz/dt ketjusäännön avulla.

Ratkaisu. Havaitsemme, että $z(t)$ voidaan käsitellä yhdistettynä funktiona $z(x(t), y(t))$, missä $z(x, y) = x^y$, $x = x(t) = t$ ja $y = y(t) = t$. Tällöin

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \ln x \cdot x^y, \quad \text{ja} \quad dx/dt = dy/dt = 1.$$

Ketjusäännön mukaan sitten

$$\frac{dz}{dt} = z_x(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + z_y(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt} = t \cdot t^{t-1} + \ln t \cdot t^t = t^t(1 + \ln t).$$

Kurssilla Analyysi I määritimme tämän derivaatan toisin käyttäen logaritmista derivointia.

Esimerkki 6.15. Tunturin (huippu origossa) korkeus (kilometreinä) pisteessä (x, y) on

$$h(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + xy + y^2}.$$

Tunturia kiertää vaellusreitti $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, missä $x = x(t) = \cos t$, $y = y(t) = \sin t$ ja $t \in [0, 2\pi]$. Etsi reitin korkein ja matalin kohta.

Ratkaisu. Haluamme selvittää yhdistetyn funktion $h(\gamma(t)) = h(x(t), y(t))$ derivaatan nollakohdat. Nyt

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{2x + y}{(1 + x^2 + xy + y^2)^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{x + 2y}{(1 + x^2 + xy + y^2)^2}.$$

Nimittäjässä esiintyvä lauseke $q(x, y) = 1 + x^2 + xy + y^2$ saa pisteessä $\gamma(t)$ arvon

$$q(t) = q(\cos t, \sin t) = 1 + \cos^2 t + \cos t \sin t + \sin^2 t = 2 + \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Derivaataksi tulee siten

$$\frac{dh}{dt} = h_x(\gamma(t))(-\sin t) + h_y(\gamma(t)) \cos t = \frac{(2 \cos t + \sin t) \sin t - (\cos t + 2 \sin t) \cos t}{q(t)^2} = -\frac{\cos 2t}{(2 + \frac{1}{2} \sin 2t)^2}.$$

Nähdään, että $dh/dt = 0 \Leftrightarrow \cos 2t = 0$ eli kun $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ tai $7\pi/4$. Sijoittamalla nämä arvot saadaan $h(\gamma(\pi/4)) = h(\gamma(5\pi/4)) = 1/(2 + \frac{1}{2}) = 2/5$ ja $h(\gamma(3\pi/4)) = h(\gamma(7\pi/4)) = 1/(2 - \frac{1}{2}) = 2/3$. Koska $h(\gamma(0)) = h(\gamma(2\pi)) = 1/2$ nähdään, että reitin korkeimmat kohdat ovat korkeudella $2/3$ vastaten parametrin t arvoja $t_1 = 3\pi/4$ ja $t_2 = 7\pi/4$, ja reitin matalimmat kohdat ovat korkeudella $2/5$ vastaten parametrin arvoja $t_3 = \pi/4$ ja $t_4 = 5\pi/4$.

Tämä tehtävä voitaisiin ratkaista myös suoremmin etsimällä parametrin t funktion $h(\gamma(t))$ suurin ja pienin arvo välillä $t \in [0, 2\pi]$ kurssin Analyysi I menetelmin.

Huomautus 6.16. Ketjusääntö yleistyy luonnollisella tavalla kolmen tai useamman muuttujan funktion tapaukseen. Jos esimerkiksi $F(x, y, z)$ on muuttujien xyz funktio, ja kukin näistä muuttujista on uuden muuttujan u funktio: $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$, niin yhdistettynä funktiona saadun funktion $G(u) = F(x(u), y(u), z(u))$ derivaatalle saadaan lauseke

$$\frac{dG}{du} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{du} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{du}.$$

Tällä ketjusäännöllä on seuraava tulkinta. Funktion $G(u)$ arvo muuttuu muuttujan u arvon muuttuessa kolmesta eri syystä: funktion $F(x, y, z)$ arvo muuttuu, koska sen jokaisen muuttujan x, y, z arvot muuttuvat u :n muutoksen seurauksena. Esitetty ketjusääntö yksinkertaisesti laskee näiden muutosten yhteisvaikutuksen.

6.4 Implisiittisesti määritelty pinta avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Kurssilla Analyysi I tutkimme implisiittisesti määrättyä tasokäyrää eli käyrää, joka määräytyi yhtälön $F(x, y) = 0$ ratkaisujoukkona. Silloin *implisiittifunktiolause* tarjosi työkalun määrätä tällaisen käyrän annettuun pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin (eli laskea implisiittisesti määritellyn funktion derivaatta). Sama työkalu on tarjolla 3-ulotteisessa avaruudessa. Tulemme näkemään implisiittifunktiolauseesta kaksi versiota. Tässä pykälässä käsittelemme yhden yhtälön määräämän pistejoukon *pinnan* tapausta, ja myöhemmässä pykälässä yhtälöparin määräämän *käyrän* tapausta.

Lause 6.17. (*Implisiittifunktiolause*) Oletetaan, että funktio $F(x, y, z)$ on osittaisderivaattoineen jatkuva tarkastelualueella, ja oletetaan, että funktio F häviää pisteessä $P = (x_0, y_0, z_0)$. Jos lisäksi $\partial F / \partial z(P) \neq 0$, niin on olemassa sellaiset positiiviset luvut $\delta_x, \delta_y, \delta_z$, ja sellainen joukossa $S = (x_0 - \delta_x, x_0 + \delta_x) \times (y_0 - \delta_y, y_0 + \delta_y)$ määritelty funktio $f = f(x, y) : S \rightarrow (z_0 - \delta_z, z_0 + \delta_z)$, että

- joukossa $S \times (z_0 - \delta_z, z_0 + \delta_z)$ on voimassa

$$F(x, y, z) = 0 \iff z = f(x, y),$$

eli kutakin joukon S pistettä (x, y) kohti yhtälöllä $F(x, y, z) = 0$ on yksi ja vain yksi ratkaisu $z = f(x, y)$ välillä $z \in (z_0 - \delta_z, z_0 + \delta_z)$,

- funktiolla $f(x, y)$ on joukossa S jatkuvat osittaisderivaatat, ja niiden arvot pisteessä (x_0, y_0) saadaan lausekkeista

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}.$$

Todistus. Esitetään myöhemmillä kursseilla. Huomataan kuitenkin, että jos funktio $f(x, y)$ toteuttaa kaikille $(x, y) \in S$ yhtälön

$$F(x, y, f(x, y)) = 0,$$

niin osittaisderivoimalla tämä yhtälö puolittain muuttujan x suhteen saadaan ketjusäännön seurauksena pisteessä (x_0, y_0)

$$F_x(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \cdot 1 + F_y(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \cdot 0 + F_z(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \cdot f_x(x_0, y_0) = 0,$$

mistä osittaisderivaatalle $f_x(x_0, y_0)$ saadaan väitetty lauseke. Osittaisderivoimalla muuttujan y suhteen saadaan vastaavasti osittaisderivaatta $f_y(x_0, y_0)$ ratkaistua esitetyssä muodossa. $\square$

Esimerkki 6.18. Piste $P = (1, 0, 1)$ on yhtälön

$$F(x, y, z) = 2xy + yz + xz^2 - 1 = 0$$

määräämällä pinnalla. Nyt $F_z = y + 2xz$, joten $F_z(P) = 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \neq 0$, ja implisiittifunktiolauseen nojalla tämä pinta on pisteen P sopivassa ympäristössä erään funktion $f(x, y)$ kuvaaja. Koska $F_x = 2y + z^2$ ja $F_y = 2x + z$, funktion f osittaisderivaatoiksi saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = -\frac{F_y(P)}{F_z(P)} = -\frac{3}{2}.$$

Huomautus 6.19. Jos meille on annettu osittaisderivaattoineen jatkuva funktio $f(x, y)$, niin soveltamalla implisiittifunktiolauseetta pisteessä $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ funktioon $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ saadaan tietenkin ratkaisuksi alkuperäinen funktio $f(x, y)$. Derivaatatkin ovat samat, sillä tällöin $F_x = -f_x$, $F_y = -f_y$, $F_z = 1$.

Huomautus 6.20. Implisiittisesti määritellyn pinnan $F(x, y, z) = 0$ pisteeseen $P = (x_0, y_0, z_0)$ piirretyn tangenttitason normaalivektoriksi saadaan

$$\mathbf{n} = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1) = \left(\frac{F_x(P)}{F_z(P)}, \frac{F_y(P)}{F_z(P)}, 1 \right).$$

Koska oletuksemme oli, että $F_z(P) \neq 0$, näemme, että vektori $\mathbf{n}$ on yhdensuuntainen funktion F pisteessä P lasketun ns. *gradientin*

$$\text{grad } F(P) = (F_x(P), F_y(P), F_z(P)) \in \mathbf{R}^3$$

kanssa, sillä selvästi $\text{grad } F(P) = F_z(P)\mathbf{n}$. Itse asiassa gradientti on luontevampi valinta pinnan $F(x, y, z) = 0$ tangenttitason normaaliksi. Tämä siitä syystä, että kunhan $\text{grad } F(P) \neq (0, 0, 0)$, niin se antaa halutun normaalin, vaikka olisikin $F_z(P) = 0$. Kunhan jokin osittaisderivaatoista ei häviä pisteessä P , niin implisiittifunktiolauseen mukaan kyseinen koordinaatti voidaan sopivassa ympäristössä ratkaista kahden muun differentioituvana funktiona, jolloin tangenttitaso voidaan muodostaa (muuttujien roolien vaihtaminen ei tietenkään vaikuta). Vertaa tilannetta siihen tasokäyrien implisiittisessä derivoinnissa vastaan tulleeeseen tilanteeseen, jossa pystysuoran tangenttisuoran tapauksessa vaihdettiin koordinaattien roolit (x olikin y :n funktio, eikä päin vastoin kuten yleensä). Gradientille käytetään usein myös merkintää $\nabla F(P)$.

Huomautus 6.21. Implisiittifunktiolauseen eri muodoille on yhteistä se, että ne yleistävät lineaarialgebran kurssilla esitettyä lineaaris(t)en yhtälö(ryhmie)n ratkaisujen teoriaa. Jos $F(x, y, z)$ onkin lineaarinen funktio, niin yhtälö $F(x, y, z) = 0$ on muotoa

$$F(x, y, z) = ax + by + cz - d = 0.$$

Jos tässä $c = F_z \neq 0$, niin yhtälöstä voidaan (tällä kertaa jopa rajoittumatta pieneen laatikkoon) ratkaista muuttuja z muiden funktiona:

$$z = f(x, y) = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y.$$

Tässä $F_x = a$, $F_y = b$ ja selvästi $f_x = -a/c = -F_x/F_z$, $f_y = -b/c = -F_y/F_z$.

Esimerkki 6.22. Ratkaistaan uudestaan Esimerkin 6.8 tehtävä gradienttia käyttäen.

Ratkaisu. Kyseinen pallopinta voidaan implisiittisesti esittää yhtälön

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 49 = 0$$

ratkaisujen joukkona. Nyt

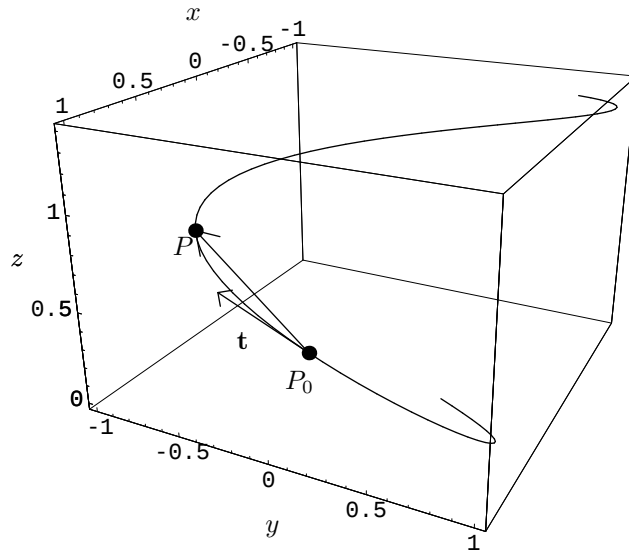
$$\text{grad } F = (2x, 2y, 2z),$$

joten pisteessä $P = (2, 3, 6)$ laskettu gradientti $\text{grad } F(P)$ on yhdensuuntainen vektorin $(2, 3, 6)$ kanssa. Näin ollen tangenttitason yhtälöksi tulee

$$2(x - 2) + 3(y - 3) + 6(z - 6) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z = 49.$$

6.5 Käyristä avaruudessa $\mathbf{R}^3$

Käsitlemme ensin parametrimuodossa annettua käyrää. Tällöin jokainen kolmesta koordinaatista annetaan parametrin t funktiona: $P = (x, y, z)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Usein parametrin t arvojoukko rajataan



Kuva 6.4: Käyrän pisteeseen P_0 piirretyn tangentin $\mathbf{t}$ suunta saadaan vektorin $\overrightarrow{P_0P}/\Delta t$ raja-arvona.

sopivaksi väliksi. Kiinnitetään parametrille arvo $t = t_0$, ja sitä vastaava piste $P_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. Olkoon P sitten mielivaltainen piste, joka saadaan, kun $t = t_0 + \Delta t$. Tällöin erotusosamäärävektori

$$\frac{\overrightarrow{P_0P}}{\Delta t} = \frac{(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), z(t_0 + \Delta t)) - (x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{\Delta t}$$

on vektorin $\overrightarrow{P_0P}$ suuntainen, ja kääntyy käyrän pisteeseen P_0 piirretyn tangentin suuntaiseksi, kun $\Delta t \rightarrow 0$ (vertaa Kuvaan 6.4).

Kun oletamme, että funktiot $x(t), y(t), z(t)$ ovat kaikki derivoituvia, niin erotusosamäärävektorin raja-arvosta saadaan tangentin suuntavektoriksi

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), z(t_0 + \Delta t)) - (x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{\Delta t} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Näin ollen käyrän tangenttisuoran yhtälöksi saadaan

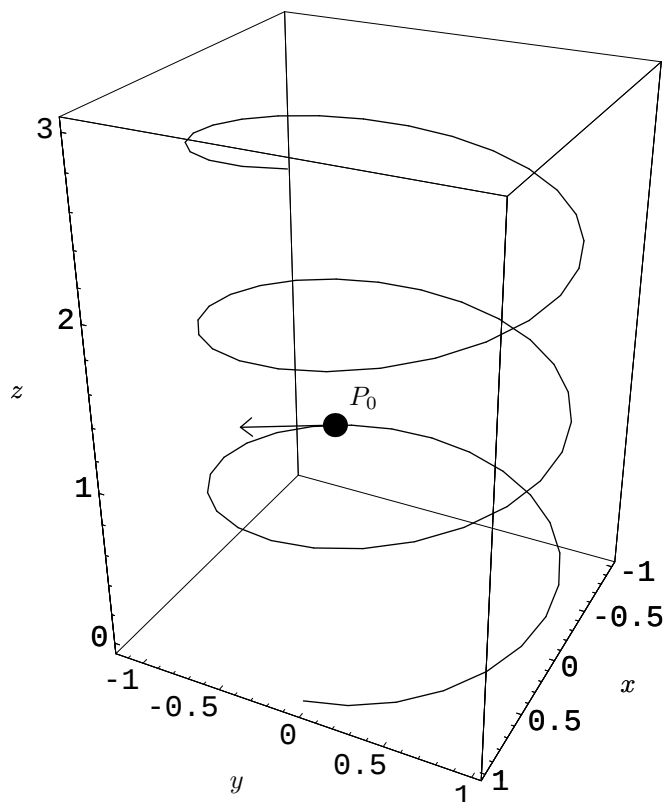
$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Huomautus 6.23. Kuten aina 3-ulotteisen avaruuden suoran yhtälön tapauksessa, jos jokin suuntavektorin komponenteista häviää, niin kyseinen koordinaatti pysyy vakiona. Jos siis esimerkiksi $z'(t_0) = 0$, niin tangenttisuoran yhtälöksi tuleekin $\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}, z = z(t_0)$.

Tangentin määrittämisen kannalta pulmallinen tilanne syntyy, jos kohdassa $t = t_0$ kaikkien koordinaattien derivaatat häviävät: $x'(t_0) = y'(t_0) = z'(t_0) = 0$. Tilanne voi korjautua vaihtamalla toiseen parametriin, mutta voi olla myös, että käyrällä on kyseisessä pisteessä kärki tai jokin muu epäsäännöllisyys.

Esimerkki 6.24. Niin sanotulle *helix-käyrällä* eli *ruuvikierteellä* (ks. Kuva 6.5) on parametrisointi

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = z/2\pi.$$



Kuva 6.5: Helix-käyrä

Määrittää tämän käyrän pisteeseen $P_0 = P(t = 5\pi/4)$ piirretyn tangentin suuntavektori.

Ratkaisu. Suoraan derivoimalla saadaan

$$\mathbf{t} = (-\sin t, \cos t, 1/2\pi) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1/2\pi).$$

Tämä vastaa Kuvasta 6.5 saatavaa mielikuvaa, jonka mukaan liikuttaessa ruuvikäyrää parametrin t kasvavaan suuntaan pisteessä P_0 mennään hieman ylöspäin $z'(5\pi/4) > 0$, hieman vasemmalle $y'(5\pi/4) < 0$ ja kohti katsojaa $x'(5\pi/4) > 0$ (kuvan koordinaattiakselien asentoja mukaillen).

Joskus käyrä annetaan siten, että yksi koordinaateista xyz hoitaa parametrin roolin. Esimerkiksi käyrä määräytyy, kun tiedetään, että $y = y(x)$ ja $z = z(x)$. Oletetaan, että nämä funktiot ovat derivoituvia. Tällöin arvoa $x = x_0$ vastaavaan käyrän pisteeseen piirretyn tangentin suuntavektoriksi tulee

$$\mathbf{t} = (1, \frac{dy}{dx}(x_0), \frac{dz}{dx}(x_0)).$$

Samaan tulokseen päädytään myös toista kautta. Jos kohdassa $t = t_0$ on $x'(t_0) \neq 0$, ja $x(t)$ on jatkuvasti derivoituva, niin käänteisfunktioilauseen nojalla pisteen t_0 sopivassa ympäristössä voidaan yhtälö $x = x(t)$

ratkaista muotoon $t = t(x)$. Tällöin $dt/dx = 1/x'(t)$ ja ottamalla x -koordinaatti uudeksi parametriksi saadaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{ja} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z'(t)}{x'(t)}.$$

Pisteissä $x = x_0 = x(t_0), t = t_0$ laskettujen tangenttivektorien välillä on yhteys

$$(1, \frac{dy}{dx}(x_0), \frac{dz}{dx}(x_0)) = \frac{1}{x'(t_0)}(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)),$$

eli ne ovat yhdensuuntaisia (mikä riittääkin). Muukin (bijektiivinen) parametrin vaihto johtaa samaan tulokseen. Vertaa tätä tarkastelua myös siihen, mikä tehtiin kurssilla Analyysi I, kun parametrimuodossa annetun tasokäyrän derivaatan lauseke perusteltiin samanhenkisesti käyttäen funktion $x(t)$ käänteisfunktion derivaatan kaavaa.

Tarkastelemme seuraavaksi tapausta, missä käyrä on määritelty kahden implisiittisesti määritellyn pinnan $F(x, y, z) = 0$ ja $G(x, y, z) = 0$ leikkauksena. Jotta muodostuva pistejoukko olisi käyrä, eivät nämä kaksi pintaa saa olla toisiinsa nähden aivan missä asennossa tahansa. Taaskaan emme pysty tällä kurssilla todistamaan sopivaa implisiittifunktiolauseen muotoa, vaan tyydymme tuloksen kuvailuun ja muutamaan valaisevaan esimerkkiin.

Mielikuvan saamiseksi tarkastelemme ensin kahden tason leikkausta eli yhtälöparin

$$\begin{cases} F(x, y, z) = F_1x + F_2y + F_3z + F_0 = 0, \\ G(x, y, z) = G_1x + G_2y + G_3z + G_0 = 0. \end{cases} \quad (*)$$

ratkaisujen joukkoa (kerraten Lineaarialgebran kurssin materiaalia tältä osin). Jos tässä normaalivektorit $\mathbf{n}_F = (F_1, F_2, F_3)$ ja $\mathbf{n}_G = (G_1, G_2, G_3)$ ovat yhdensuuntaisia, niin tilanne on poikkeuksellinen: tasot ovat yhdensuuntaisia, jolloin ne joko yhtyvät täysin tai niiden leikkausjoukko on tyhjä. Tyypillisemmin normaalit eivät ole yhdensuuntaisia, ja tällöin tasojen leikkausjoukko on eräs suora. Kyseisen suoran suuntavektori $\mathbf{t}$ on tällöin kohtisuorassa kummankin leikkaavan tason normaalia vastaan. Näin ollen se on yhdensuuntainen niiden ristitulon kanssa:

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}_F \times \mathbf{n}_G = (F_2G_3 - G_2F_3, F_3G_1 - F_1G_3, F_1G_2 - F_2G_1).$$

Lineaaristen yhtälöryhmien teoriaa tunteville lukijoille voidaan selittää myös, miten ristitulon kertoimet näkyvät yhtälöparin (*) ratkaisussa. Oletetaan, että $F_2G_3 - G_2F_3 \neq 0$. Tällöin matriisi

$$A = \begin{pmatrix} F_2 & F_3 \\ G_2 & G_3 \end{pmatrix}$$

on säännöllinen, eli sille löytyy käänteismatriisi

$$A^{-1} = \frac{1}{F_2G_3 - F_3G_2} \begin{pmatrix} G_3 & -F_3 \\ -G_2 & F_2 \end{pmatrix}.$$

Yhtälöpari (*) voidaan esittää matriisiyhtälönä

$$A \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1x + F_0 \\ G_1x + G_0 \end{pmatrix}.$$

Näin ollen ehdolla $F_2G_3 - F_3G_2 = \det A \neq 0$ voidaan yhtälöparista (*) ratkaista y ja z muuttujan x funktiona seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = -A^{-1} \begin{pmatrix} F_1x + F_0 \\ G_1x + G_0 \end{pmatrix},$$

eli

$$\begin{cases} y &= -\frac{(F_1G_3 - F_3G_1)x + (F_0G_3 - F_3G_0)}{F_2G_3 - F_3G_2}, \\ z &= -\frac{(F_2G_1 - F_1G_2)x + (F_2G_0 - F_0G_2)}{F_2G_3 - F_3G_2}. \end{cases}$$

Yleisempien pintojen tapauksessa implisiittifunktiolause sanoo sitten samaa, kunhan tason normaali korvataan leikkauspisteessä lasketulla gradientilla. Todistus sivuutetaan.

Lause 6.25. (Implisiittifunktiolause) Oletetaan, että funktiot $F(x, y, z)$ ja $G(x, y, z)$ ovat osittaisderivoituneita jatkuvia tarkastelualueella, ja oletetaan, että funktiot F ja G häviävät pisteessä $P = (x_0, y_0, z_0)$. Merkitään

$$\text{grad } F(P) = (F_1, F_2, F_3), \quad \text{grad } G(P) = (G_1, G_2, G_3).$$

Jos ristitulon $(F_1, F_2, F_3) \times (G_1, G_2, G_3)$ ensimmäinen komponentti $F_2G_3 - F_3G_2 \neq 0$, niin on olemassa sellaiset positiiviset luvut $\delta_x, \delta_y, \delta_z$, ja sellaiset välillä $I = (x_0 - \delta_x, x_0 + \delta_x)$ määritellyt funktiot $f_2(x) : I \rightarrow (y_0 - \delta_y, y_0 + \delta_y)$, $f_3(x) : I \rightarrow (z_0 - \delta_z, z_0 + \delta_z)$, että

- joukon $(x_0 - \delta_x, x_0 + \delta_x) \times (y_0 - \delta_y, y_0 + \delta_y) \times (z_0 - \delta_z, z_0 + \delta_z)$ piste $P' = (x, y, z)$ on yhtälöparin $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$ ratkaisu silloin ja vain silloin, kun $y = f_2(x)$ ja $z = f_3(x)$,
- funktiot $f_2(x)$ ja $f_3(x)$ ovat välillä I derivoituvia, ja pisteessä (x_0) derivaatoilla on lausekkeet

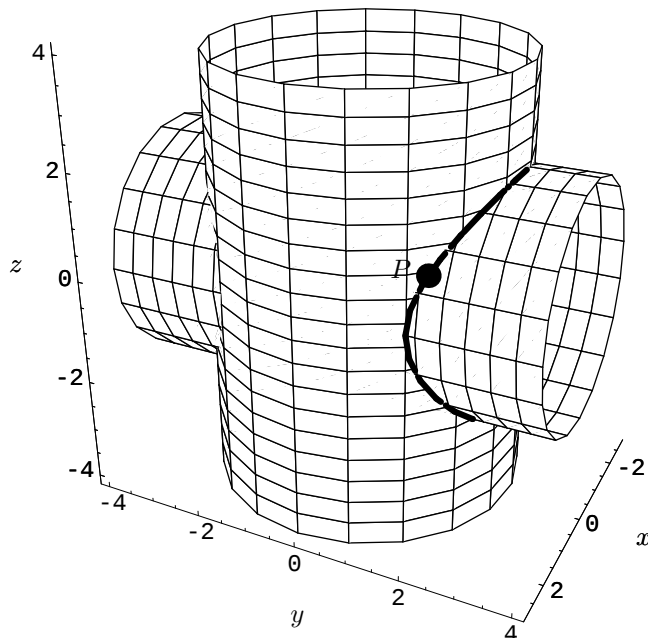
$$\begin{cases} f_2'(x_0) &= -\frac{F_1G_3 - F_3G_1}{F_2G_3 - F_3G_2}, \\ f_3'(x_0) &= -\frac{F_2G_1 - F_1G_2}{F_2G_3 - F_3G_2}. \end{cases}$$

Huomautus 6.26. Kuten implisiittifunktiolauseen aikaisemmissakin versioissa, tässä voidaan muuttujien roolia vaihtaa. Jos siis gradienttien ristitulon toinen (vast. kolmas) komponentti $\neq 0$, niin muut kaksi koordinaattia voidaan ratkaista toisen (vast. kolmannen) derivoituvina funktioina, kunhan tarkastelu rajataan annetun ratkaisupisteen P tarpeeksi pieneen ympäristöön.

Esimerkki 6.27. Lieriöpinnat $x^2 + y^2 = 8$ ja $x^2 + z^2 = 5$ leikkaavat toisensa pisteessä $P = (2, 2, 1)$. Totea implisiittifunktiolauseen avulla, että pisteen P lähellä leikkausjoukko on käyrä (tämä on ilmeistä Kuvan 6.6 perusteella), ja määrää kyseisen käyrän pisteeseen P piirretyn tangentin suunta.

Ratkaisu. Tällä kertaa $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 8$ ja $G(x, y, z) = x^2 + z^2 - 5$. Piste P on yhtälöparin

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8 &= 0 \\ x^2 + z^2 - 5 &= 0 \end{cases}$$



Kuva 6.6: Lieriöiden $x^2 + y^2 = 8$ ja $x^2 + z^2 = 5$ leikkauskäyrä ja sen piste $P = (2, 2, 1)$

ratkaisu, sillä $F(2, 2, 1) = 2^2 + 2^2 - 8 = 0$ ja $G(2, 2, 1) = 2^2 + 1^2 - 5 = 0$, joten se kuuluu leikkausjoukkoon. Osittaisderivoimalla saadaan, että $\text{grad } F = (2x, 2y, 0)$, $\text{grad } G = (2x, 0, 2z)$, joten pisteessä P

$$\nabla F(P) \times \nabla G(P) = (4, 4, 0) \times (4, 0, 2) = (8, -8, -16) = -8(-1, 1, 2).$$

Koska tämä ei ollut nollavektori (tai ekvivalentisti pisteessä P lasketut gradientit eivät olleet yhdensuuntaisia), niin implisiittifunktiolauseen mukaan leikkausjoukko on pisteen P sopivassa ympäristössä Y käyrä. Tällä kertaa gradienttien ristitulon kaikki komponentit ovat nolasta eroavia, joten mitkä tahansa kaksi koordinaateista xyz voidaan esittää kolmannen derivoituvina funktioina ympäristössä Y .

Pisteeseen P piirretty tangentti on vektorin $\mathbf{t} = (-1, 1, 2)$ suuntainen. Tämä on tulkittavissa Kuvassa 6.6 siten, että liikuttaessa leikkauskäyrää kuvassa ylöspäin (kasvavan z -koordinaatin suuntaan) siirrytään samalla hieman oikealle (tangentin y -komponentti on > 0) ja hieman pois päin katsojasta (tangentin x -komponentti on < 0).

Esimerkki 6.28. Pallopinta $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ ja taso $G(x, y, z) = z - 1 = 0$ leikkaavat ‘pohjoisnavalla’ $P = (0, 0, 1)$. Itse asiassa P on leikkausjoukon ainoa piste. Tämä ei ole ristiriidassa implisiittifunktiolauseen kanssa, sillä $\nabla F(P) = (2x, 2y, 2z)(P) = (0, 0, 2)$ ja $\nabla G(P) = (0, 0, 1)$. Koska nämä kaksi gradienttia ovat keskenään yhdensuuntaisia, niiden ristitulo häviää, eikä implisiittifunktiolause täten lupakaan meille leikkauskäyrää.

6.6 Parametrisoitu pinta avaruudessa $\mathbf{R}^3$

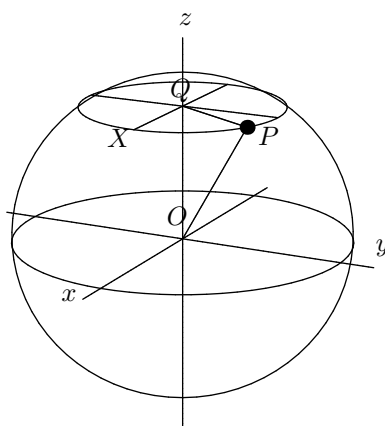
Kuten käyrä, myös pinta voidaan antaa parametriesityksen avulla. Koska pinta on 2-ulotteinen rakenne, tarvitsemme kaksi parametria (esimerkiksi u ja v). Jokainen kolmesta koordinaatista on tällöin kummankin parametrin funktio: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. Antamalla kummallekin parametrille jokin arvo, ja laskemalla näiden kolmen funktion arvot, saadaan pinnan pisteitä. Usein parametripari (u, v) rajataan sopivan joukon alkioksi.

Esimerkki 6.29. Lieriöpinta $x^2 + y^2 = \rho^2$, (ρ jokin vakio) voidaan parametrisoida käyttämällä yhtenä parametrina xy -tason ympyrän suuntakulmaa φ sekä toisena parametrina z -koordinaattia (jota kyseinen yhtälö ei sido lainkaan). Parametrisoinniksi tulee tällöin

$$\begin{cases} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= z. \end{cases}$$

Rajaamalla parametri φ välille $[0, 2\pi)$ (tai jollekin muulle puoliavoinnalle välille, jonka pituus on 2π), ja antamalla parametrin z saada kaikki reaaliset arvot, saadaan lieriöpinnan jokainen piste tasan yhden kerran.

Esimerkki 6.30. Johda pallopinnan $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($R > 0$ vakio) parametrisointi kahden kulmamuu-
tujan avulla esitettynä.



Kuva 6.7: Pallopinnan parametrisointi: $\varphi = \angle PQX$, $\theta = \angle QOP$

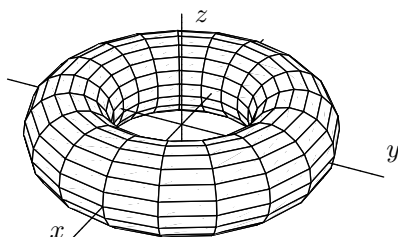
Ratkaisu. Olkoon $P = (x, y, z)$ pallopinnan jokin piste, O origo, ja θ vektorin $\overrightarrow{OP}$ ja positiivisen z -akselin välinen kulma. Tällöin $Q = (0, 0, R \cos \theta)$ on pisteen P projektio z -akselille, eli $z = R \cos \theta$. Valitsemme kulman $\theta \in [0, \pi]$ toiseksi parametriksi.

Piste $X = (R \sin \theta, 0, R \cos \theta)$ on sekä pallopinnalla että pisteen P kautta kulkevalla xy -tason suuntaisella tasolla $T : z = R \cos \theta$. Pallopinnan ja tason T leikkauskäyrä on ympyrä, jonka keskipiste on Q ja säde $R \sin \theta \geq 0$. Pisteet X ja P ovat molemmat tällä ympyrällä. Otamme siten toiseksi parametriksi suuntakulman $\varphi = \angle PQX \in (-\pi, \pi]$, jolloin kyseinen suuntakulma yksikäsitteisesti määrää kehäpisteen P . Vektori $\overrightarrow{QP} = R \sin \theta (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$. Kulmien θ ja φ funktiona saadaan lopulta $(x, y, z) = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$, eli

$$\begin{cases} x &= x(\varphi, \theta) &= R \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= y(\varphi, \theta) &= R \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= z(\varphi, \theta) &= R \cos \theta. \end{cases}$$

Karttapallon koordinaatteihin verrattuna θ kertoo paikkakunnan P leveyspiirin. Kuitenkin siten, että $\theta = 0$ vastaa pohjoisnapaa ($=90^\circ$ pohjoista leveyttä), $\theta = \pi/2$ vastaa päiväntasaajaa, ja $\theta = \pi$ etelänapaa. Kulma φ puolestaan kertoo pituuspiirin eli meridiaanin kunhan 'läntistä pituutta' olevat pituuspiirit tulkitaan miinusmerkkisinä. Usein myös rajataan φ välille $[0, 2\pi)$, jolloin läntiset pituuspiirit ovatkin välillä $[\pi, 2\pi)$.

Tällä parametrisoinnilla on sellainen pieni heikkous, ettei se ole bijektio pallopinnan pisteiden ja parametriparien $(\varphi, \theta) \in (-\pi, \pi] \times [0, \pi]$ välillä. Jos nimittäin $\theta = 0$ tai $\theta = \pi$, niin $\sin \theta = 0$ eikä piste (x, y, z) lainkaan riipu toisen parametrin φ arvosta. Nämä parametrin θ arvot vastaavat karttapallon napoja. Navoilahan kaikki meridiaanit yhtyvät, ja näin pituuspiiri menettää merkityksensä.



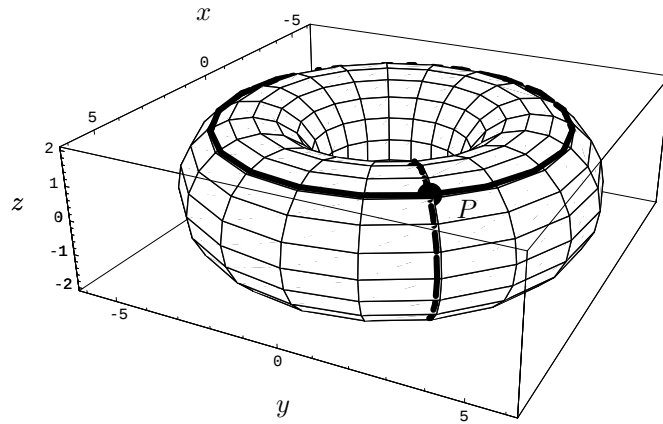
Kuva 6.8: Toruspinta: ympyrä $(x - a)^2 + z^2 = b^2$, $0 < b < a$ pyörähtää z -akselin ympäri

Esimerkki 6.31. Oletetaan, että $a > b > 0$, jolloin xz -tason ympyrä $Y : (x - a)^2 + z^2 = b^2$ on kokonaisuudessaan z -akselin oikealla puolella. Pyörähtäessään z -akselin ympäri kyseinen käyrä piirtää ns. toruspinnan (Kuva 6.8). Käyttämällä parametria $u \in [0, 2\pi)$ valitsemaan piste ympyrän Y kehältä ja toista parametria $v \in [0, 2\pi)$ kertomaan kuinka suuren kulman Y on pyörähtänyt z -akselin ympäri päädymme parametrisointiin

$$\begin{cases} x &= (a + b \cos u) \cos v, \\ y &= (a + b \cos u) \sin v, \\ z &= b \sin u. \end{cases}$$

Parametrimuodossa annetun pinnan S pisteeseen $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ piirretyt tangenttitason löydämme seuraavalla tavalla. Jos kiinnitämme toiselle parametrille arvon $u = u_0$, mutta annamme toisen muuttua, muodostuu parametrisoitu käyrä $C_v : x = x(u_0, v), y = y(u_0, v), z = z(u_0, v)$, joka sisältyy pintaan S . Kuvasta katsoen on tällöin ilmeistä, että käyrän C_v pisteeseen P_0 piirretty tangentti, suunta $\mathbf{t}_v$, on koko pinnan tangenttitason T suuntainen. Näin ollen $\mathbf{t}_v$ on kohtisuorassa tason T normaalia $\mathbf{n}_T$ vastaan. Vastaavasti asettamalla $v = v_0$ saadaan pisteen P_0 kautta kulkeva pintaan S sisältyvä käyrä $C_u : x = x(u, v_0), y = y(u, v_0), z = z(u, v_0)$. Sen pisteeseen P_0 piirretty tangentti $\mathbf{t}_u$ on sek in $\perp \mathbf{n}_T$. Voidaan osoittaa, että tietyin säännöllisyysoletuksin (poikkeuksina juuri esimerkiksi pallon napojen tapaiset pisteet) tangentit $\mathbf{t}_v$ ja $\mathbf{t}_u$ eivät ole yhdensuuntaisia, ja tällöin käyrien tangentteja koskevien tarkastelujemme ja lineaarialgebran tietojen perusteella:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_u &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \\ \mathbf{t}_v &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right), \\ \mathbf{n}_T &\parallel \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v. \end{cases}$$



Kuva 6.9: Toruspinnan piste P ja sen kautta kulkevat 2 vakioparametrikäyrää C_u ja C_v

Esimerkki 6.32. Piste $P = (4, 3, \sqrt{3})$ on toruspinnalla $(a = 4, b = 2)$, jolla on parametrisointi

$$\begin{cases} x &= (4 + 2 \cos u) \cos v, \\ y &= (4 + 2 \cos u) \sin v, \\ z &= 2 \sin u, \end{cases}$$

kun $u = u_0 = \pi/3$ ja $v = v_0$ on ensimmäisen neljänneksen kulma, jolle $\cos v_0 = 4/5, \sin v_0 = 3/5$. Etsi jokin tätä toruspintaa pisteessä P sivuavan tangenttitason normaali.

Ratkaisu. Kuvassa 6.9 on kuvattu kyseinen toruspinta, piste P ja sen kautta kulkevat vakioparametrikäyrät C_u ja C_v . Käyrän C_u parametriesitys on siis

$$C_u : x = \frac{4}{5} (4 + 2 \cos u), \quad y = \frac{3}{5} (4 + 2 \cos u), \quad z = 2 \sin u.$$

Koska $\cos u_0 = 1/2$, $\sin u_0 = \sqrt{3}/2$, niin tämän käyrän tangentti, kun $u = u_0$ on siten

$$\mathbf{t}_u = \left(-\frac{8 \sin u_0}{5}, -\frac{6 \sin u_0}{5}, 2 \cos u_0 \right) = \left(-\frac{4\sqrt{3}}{5}, -\frac{3\sqrt{3}}{5}, 1 \right).$$

Vastaavasti

$$C_v : x = 5 \cos v, \quad y = 5 \sin v, \quad z = \sqrt{3},$$

ja tämän käyrän tangentti kohdassa $v = v_0$ siten

$$\mathbf{t}_v = (-3, 4, 0).$$

Näiden ristitulo

$$\mathbf{t}_v \times \mathbf{t}_u = (4, 3, 5\sqrt{3}),$$

antaa tangenttitason normaalin suunnan.

Tehtävä voidaan ratkaista myös gradientin avulla, sillä harjoitustehtävän voit osoittaa, että kyseinen toruspinta on yhtälön

$$F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 - 4 = 0$$

ratkaisujen joukko. Funktion F gradientti on

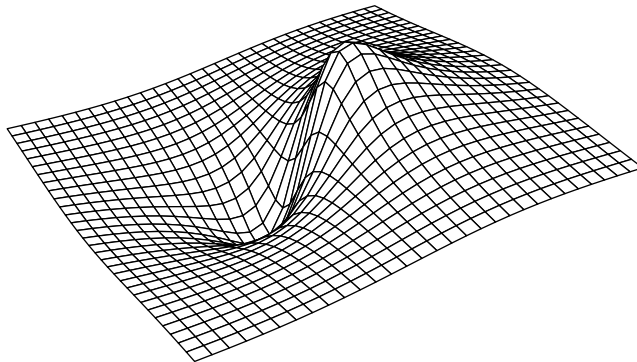
$$\nabla F = \left(\frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - 4)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - 4)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z \right),$$

mikä pisteessä P saa arvon $\text{grad } F(P) = (8/5, 6/5, 2\sqrt{3})$. Tämä vektori on $2/5$ kertaa aiemmin laskettu ristitulo, joten tarkistuksena näemme, että $\text{grad } F(P)$ ja $\mathbf{t}_v \times \mathbf{t}_u$ todella ovat yhdensuuntaisia vektoreita.

6.7 Kahden muuttujan funktion ääriarvoista

Jos funktion $f(x, y)$ arvo pisteessä $P = (a, b)$ on pienempi tai yhtäsuuri kuin tämän pisteen jossakin ympäristössä $Y(P; \delta)$, niin sanotaan, että piste P on funktion *paikallinen* eli *lokaali minimikohta* ja $f(a, b)$ *minimiarvo*. Vastaavasti määritellään *maksimikohta* ja *maksimiarvo*. Näistä käytetään yhteisnimitystä *ääriarvokohdat* ja *ääriarvot*.

Oletetaan seuraavaksi, että funktiolla f on tarkastelualueella osittaisderivaatat. Jos $P = (a, b)$ on lokaali ääriarvokohta, sanokaamme lokaali minimikohta, niin tällöin $x = a$ on yhden muuttujan funktion $g(x) = f(x, b)$ lokaali minimikohta. Kurssin Analyysi I tulosten perusteella tiedämme, että tällöin on oltava $f_x(a, b) = g'(a) = 0$, koska funktio $g(x)$ on derivoituva pisteessä $x = a$. Vastaavasti $y = b$ on funktion $h(y) = f(a, y)$ lokaali minimikohta, joten on oltava myös $f_y(a, b) = h'(b) = 0$. Kirjaamme nämä havainnot ylös seuraavassa lauseessa.



Kuva 6.10: Lokaali minimikohta ja lokaali maksimikohta

Lause 6.33. *Funktion $f(x, y)$ lokaalit ääriarvokohdat ovat niiden pisteiden P joukossa, joissa $f_x(P) = f_y(P) = 0$ tai joissa jompaakumpaa osittaisderivaattaa ei ole olemassa. Ensimmäisessä tapauksessa sanomme, että P on funktion f kriittinen piste.*

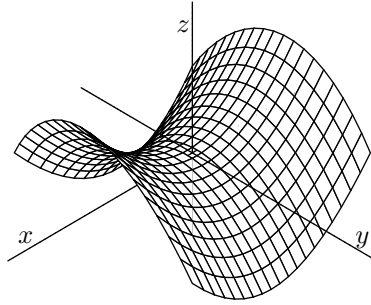
Jos lisäksi osittaisderivaatat f_x ja f_y ovat tarkastelualueella jatkuvia, niin f on differentioituva kaikkialla, ja sille voidaan sen kuvaajapinnan pisteeseen $(x(P), y(P), f(P))$ piirtää tangenttitaso, ja tangenttitason normaalivektori on $\mathbf{n} = (-f_x(P), -f_y(P), 1)$. Lokaalissa ääriarvokohdassa $\mathbf{n}$ on z -akselin suuntainen, eli tangenttitaso on vaakasuora (eli xy -tason suuntainen). Kuvan 6.10 funktiolla on yksi lokaali minimikohta (kuopan pohjalla) ja yksi lokaali maksimikohta (kukkulan laella).

Yhden muuttujan funktion tapauksessakaan ei derivaatan häviäminen takaa ääriarvoa (tarvitaan esimerkiksi matalimman kertaluvun nolasta eroavan derivaatan tutkimista), mutta seuraava esimerkki osoittaa, että kahden muuttujan funktion tapauksessa tilanne on oleellisesti mutkikkaampi, koska tasolla voidaan pisteen P ympäristössä liikkua monipuolisemmin kuin suoralla.

Esimerkki 6.34. Funktiolla $f(x, y) = x^2 - y^2$ on kaikkialla jatkuvat osittaisderivaatat $f_x = 2x$ ja $f_y = -2y$. Origossa $O = (0, 0)$ ne häviävät: $f_x(O) = f_y(O) = 0$, mutta kyseessä ei ole lokaali ääriarvokohta. Tämä seuraa esimerkiksi siitä, että kohdassa $x = 0$ funktiolla $g(x) = f(x, 0) = x^2$ on lokaali minimi, mutta funktiolla $h(y) = f(0, y) = -y^2$ onkin kohdassa $y = 0$ lokaali maksimi (ks. Kuva 6.11).

Yhden muuttujan funktion ääriarvon tapauksessa toisen derivaatan merkin avulla pystytään päättämään ääriarvon luonne mikäli $f''(a) \neq 0$. Tälle on olemassa analoginen, kahden muuttujan funktiota koskeva tulos, joka ilmaistaan toisen kertaluvun osittaisderivaattojen f_{xx} , $f_{xy} = f_{yx}$, f_{yy} avulla (oletamme nämä jatkuviksi, joten sekaderivaatat yhtyvät). Tämänkään tuloksen todistus ei kuulu tälle kurssille.

Yhden muuttujan funktion tapauksissa toisen derivaatan käyttöä koskeva sääntö on helppo palauttaa



Kuva 6.11: Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ osittaisderivaatat häviävät origossa, mutta origo ei ole lokaali ääriarvokohta vaan satulapiste

mieleen ajattelemalla ylöspäin tai alaspäin aukeavaa paraabelia. Toisen asteen polynomin tapauksessa toinen derivaatta vakio K . Jos $K > 0$, niin kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, ja sen huipussa oleva ääriarvokohta selkeästi lokaali minimi, kun taas tapauksessa $K < 0$, kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, ja kyseessä on lokaali maksimi. Teemme seuraavaksi vastaavan tarkastelun kahden muuttujan *neliömuodolle*

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2),$$

jonka osittaisderivaatat Q_x ja Q_y häviävät origossa.

Lemma 6.35. *Olkoon $Q(x, y) = \frac{1}{2} (Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)$ ja merkitään $D = AC - B^2$. Jos tässä*

- (i) $D > 0$ ja $A > 0$, *niin origossa on funktion $Q(x, y)$ lokaali minimikohta,*
- (ii) $D > 0$ ja $A < 0$, *niin origossa on funktion $Q(x, y)$ lokaali maksimikohta,*
- (iii) $D < 0$, *niin origossa on funktion $Q(x, y)$ satulapiste, eli on olemassa sellaiset origon kautta kulkevat xy -tason suorat L_1 ja L_2 , että rajoitettuna suoralle L_1 on funktiolla Q origossa lokaali maksimi, kun taas rajoitettuna suoralle L_2 on sillä origossa lokaali minimi.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $A \neq 0$. Tällöin voimme kirjoittaa neliöksi täydentämällä

$$Q(x, y) = \frac{A}{2} \left[\left(x + \frac{B}{A} y \right)^2 + \left(\frac{AC - B^2}{A^2} \right) y^2 \right].$$

Tämä on lineaarikombinaatio lukujen $z_1 = (x + (B/A)y)$ ja $z_2 = y$ neliöistä $Q(x, y) = K_1 z_1^2 + K_2 z_2^2$, missä $K_1 = A/2$ ja $K_2 = D/2A$. Lisäksi $z_1 = z_2 = 0$, silloin ja vain silloin, kun $x = y = 0$. Jos sekä $A > 0$ että

$D > 0$, niin $K_1 > 0$ ja $K_2 > 0$. Tässä tapauksessa $Q(x, y) > 0$ aina, kun $(x, y) \neq (0, 0)$, joten kyseessä on lokaali minimi. Jos taas $A < 0$ ja $D > 0$, niin $K_1 < 0$ ja $K_2 < 0$, ja $Q(x, y) < 0$ aina, kun $(x, y) \neq (0, 0)$.

Oletetaan sitten, että $D < 0$. Tällöin K_1 ja K_2 ovat erimerkkisiä. Eräällä suoralla on $z_1 = 0$, ja tällä suoralla K_2 määrää funktion Q etumerkin. Eräällä toisella suoralla taas $z_2 = 0$ jolloin K_1 määrää funktion Q etumerkin.

Lopuksi jos $B < 0$ ja $A = 0$, niin $D = -B^2 < 0$ ja $Q(x, y) = \frac{y}{2}(2Bx + Cy)$. Nyt $B \neq 0$, joten tekijöiden y ja $2Bx + Cy$ merkit voidaan valita toisistaan riippumattomasti. Näin ollen funktio $Q(x, y)$ saa origon läheisyydessä erimerkkisiä arvoja, eikä origo näin ole ääriarvokohta. $\square$

Huomautus 6.36. Kolmannen kohdan kaksi suoraa eivät välttämättä yhdy koordinaattiakseleihin kuten Esimerkissä 6.34. Neliömuotojen teorian avulla (lineaarialgebra ja algebran peruskurssit) voidaan osoittaa, että suorat L_1 ja L_2 voidaan tässä valita siten, että ne ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

Huomautus 6.37. Lineaarialgebran menetelmiä käyttäen Lemman 6.35 tulos voidaan perustella myös *diagonalisoimalla* neliömuoto $Q(x, y)$. Tällöin on luonnollista ilmaista tulos neliömuotoa esittävän matriisin

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

ominaisarvojen etumerkkien avulla. Jos matriisin M ominaisarvot ovat plusmerkkisiä, on kyseessä minimi, jos taas miinusmerkkisiä, niin kyseessä on maksimi. Jos ominaisarvot ovat erimerkkisiä, on kyseessä satulapiste. Jos jompikumpi ominaisarvoista $= 0$, niin tilanne on hieman poikkeuksellinen (eikä ole käyttökelpoinen ääriarvojen tutkimisessa). Tämä muotoilu yleistyy useamman kuin kahden muuttujan funktion tapaukseen.

Esimerkki 6.38. Neliömuoto $Q(x, y) = xy$ saa negatiivisia arvoja suoralla $L_1 : y = -x$ ja positiivisia arvoja suoralla $L_2 : y = x$. Näin ollen origo on tämän neliömuodon satulapiste. Samaan tulokseen päädymme myös Lemman 6.35 avulla, koska nyt $A = C = 0$ ja $B = 1$, joten $D = AC - B^2 = -1 < 0$.

Yllä olevan neliömuodon $Q(x, y)$ toisen kertaluvun osittaisderivaatat origossa ovat

$$A = Q_{xx}(0, 0), \quad B = Q_{xy}(0, 0) = Q_{yx}(0, 0), \quad C = Q_{yy}(0, 0).$$

Näin ollen seuraava tulos ei ole enää yllätys.

Lause 6.39. Oletetaan, että funktion $f(x, y)$ toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, ja että pisteessä $P = (a, b)$

$$f_x(P) = f_y(P) = 0.$$

Merkitään $A = f_{xx}(P)$, $B = f_{xy}(P)$, $C = f_{yy}(P)$, $D = AC - B^2$. Tällöin

(i) jos $D > 0$ ja $A > 0$, niin pisteessä P on funktion $f(x, y)$ lokaali minimikohta,

(ii) jos $D > 0$ ja $A < 0$, niin pisteessä P on funktion $f(x, y)$ lokaali maksimikohta,

(iii) jos $D < 0$, niin pisteessä P ei ole funktion $f(x, y)$ ääriarvokohtaa (vaan satulapiste),

(iv) jos $D = 0$, niin emme voi sanoa mitään siitä, onko pisteessä P lokaali ääriarvokohta.

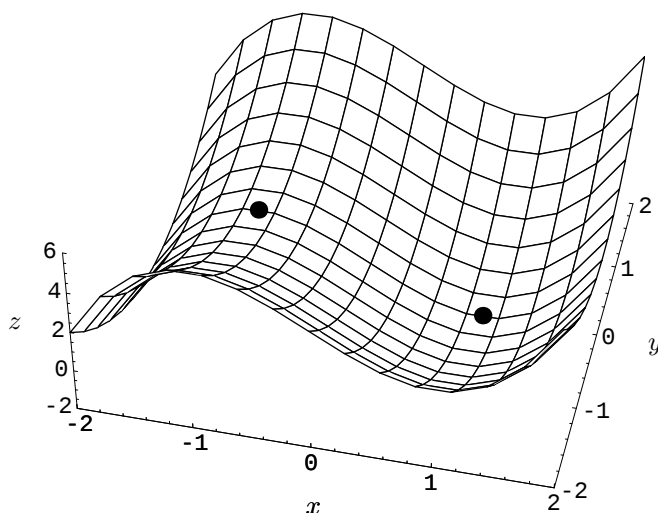
Todistus. Sivutetaan.

□

Esimerkki 6.40. Etsi funktion

$$f(x, y) = y^2 + x^3 - 3x$$

kriittiset pisteet, ja jos mahdollista, selvitä niiden luonne Lauseen 6.39 avulla.



Kuva 6.12: Funktion $f(x, y) = y^2 + x^3 - 3x$ kuvaaja ja kriittiset pisteet. Tällä kertaa kuvaajapinta on esitetty läpinäkyvänä, jotta lokaali minimipiste ei jäisi näkymättömiin.

Ratkaisu. Nyt $f_x = 3x^2 - 3$ ja $f_y = 2y$, joten $f_x = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ ja $f_y = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Kriittisiä pisteitä on siis kaksi $P_1 = (1, 0)$ ja $P_2 = (-1, 0)$. Laskemme toisen kertaluvun osittaisderivaatat

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 2.$$

Näin ollen $A = 6x$ ja $D = (6x) \cdot 2 = 12x$. Pisteessä P_1 on siis $A = 6$ ja $D = 12$, joten kyseessä on lokaali minimikohta. Pisteessä P_2 on $D = -12$, joten kyseessä on satulapiste.

Kyseisen funktion kuvaaja on hahmoteltu Kuvassa 6.12.

Usein törmätään sellaiseen ääriarvotehtävään, jossa pistettä $P = (x, y)$ ei voida valita vapaasti, vaan sitä rajoittaa yksi (tai korkeampiulotteisissa tapauksessa useampi) *side-ehto*. Lokaali tarkastelu tehdään tällöin

tutkittavan pisteen P ympäristön ja side-ehdon ratkaisujoukon leikkauksessa, ja puhutaan *sidotusta (lokaalis- ta) ääriarvosta* pisteessä P . Tarkastelemme tässä yhteydessä vain yksinkertaisia menetelmiä. Ensin tapausta, jossa side-ehto voidaan hyödyntää toisen muuttujan eliminoinnin kautta, ja sitten implisiittifunktiolauseeseen perustuvaa tekniikkaa, joka myöhemmillä kursseilla yleistyy *Lagrangen kertoimien menetelmäksi*.

Esimerkki 6.41. Määrää suurin ja pienin funktion $f(x, y) = y^2 + x^3 - 3x$ ympyrällä $x^2 + y^2 = 4$ saamista arvoista.

Ratkaisu. Tällä kertaa side-ehdosta voidaan ratkaista $y^2 = 4 - x^2$. Lisäksi teemme havainnon, että side-ehdon seurauksena $x \in [-2, 2]$. Näin ollen tehtävä muuntuu muotoon: etsi suurin ja pienin funktion $g(x) = f(x, \pm\sqrt{4 - x^2}) = x^3 - x^2 - 3x + 4$ välillä $x \in [-2, 2]$ saama arvo. Nyt

$$g'(x) = 3x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 36}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Derivaatan nollakohdat ovat siis molemmat välillä $[-2, 2]$. Riittää siis laskea funktion $g(x)$ arvot näissä pisteissä, ja lisäksi välin päätepisteissä $x = \pm 2$. Tällä kertaa $g(2) = 2$, $g(-2) = -2$, $g((1 + \sqrt{10})/3) = (79 - 20\sqrt{10})/27$ ja $g((1 - \sqrt{10})/3) = (79 + 20\sqrt{10})/27$. Näistä on $g(-2) = f(-2, 0) = -2$ pienin, ja $g((1 - \sqrt{10})/3) = f((1 - \sqrt{10})/3, \pm(\sqrt{25 + 2\sqrt{10}})/3) = (79 + 20\sqrt{10})/27$ suurin.

Yleisemmin side-ehto $g(x, y) = 0$ määrää tason pistejoukon

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid g(x, y) = 0\},$$

ja tehtävänä on etsiä sellainen piste $P = (a, b) \in S$, jossa osittaisderivaattoineen jatkuva funktio $f(x, y)$ saavuttaa (ainakin lokaalisti) suurimman tai pienimmän arvon. Oletetaan, että funktiolla g on kaikkialla jatkuvat osittaisderivaatat, ja että osittaisderivaatta $g_y(P) \neq 0$. Tällöin implisiittifunktiolauseen mukaan pisteen P eräässä ympäristössä side-ehto voidaan 'ratkaista', ja ratkaisu esittää muodossa $y = h(x)$, missä $h(a) = b$ ja $h'(a) = -g_x(a, b)/g_y(a, b)$. Oletuksistamme seuraa, että yhdistetty funktio $s(x) = f(x, h(x))$ on derivoituva kohdassa $x = a$. Jos piste P on sidotun ääriarvotehtävän ratkaisu, on oltava (ketjusääntö)

$$0 = s'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(P) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)h'(a).$$

Ottamalla huomioon derivaatan $h'(a)$ lauseke muuntuu tämä yhtälö ekvivalenttiin muotoon

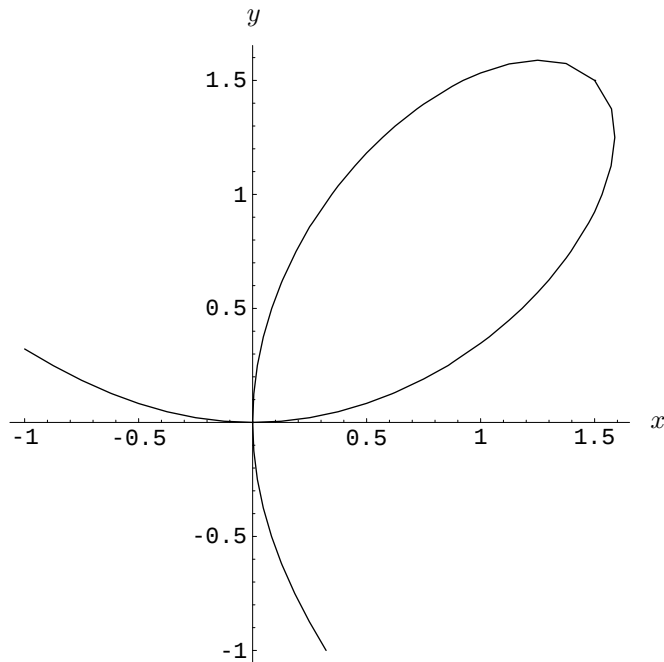
$$f_x(P)g_y(P) = f_y(P)g_x(P). \quad (*)$$

Myös siinä tapauksessa, jossa $g_y(P) = 0$, mutta $g_x(P) \neq 0$ päädytään yhtälöön $(*)$ käyttämällä implisiittifunktiolauseesta sellaista muotoa, jossa x ratkaistaan y :n funktiona (harjoitustehtävä).

Esimerkki 6.42. Kartesiuksen lehti on tasokäyrä, joka muodostuu side-ehdon

$$g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

ratkaisuihin. Millä tämän käyrän pisteistä funktiolla $f(x, y) = x + y$ on mahdollinen lokaali ääriarvo?



Kuva 6.13: Funktion $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ nollakohdista muodostuva *Kartesiuksen lehti*

Ratkaisu. Osittaisderivaatat ovat $g_x = 3x^2 - 3y$, $g_y = 3y^2 - 3x$, $f_x = f_y = 1$, joten yhtälö (*) saa muodon

$$3x^2 - 3y = 3y^2 - 3x \Leftrightarrow x^2 - y^2 = y - x \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 1) = 0.$$

Suora $x + y + 1 = 0$ ei leikkaa Kartesiuksen lehteä lainkaan, sillä jos $y = -1 - x$, niin $g(x, y) = g(x, -1 - x) = x^3 - 1 - 3x - 3x^2 - x^3 + 3x + 3x^2 = -1 \neq 0$. Näin ollen yhtälö (*) voi pitää paikkansa vain, kun $x - y = 0$ eli $x = y$. Koska $g(x, x) = 2x^3 - 3x^2 = 0$ silloin ja vain silloin, kun $x = 0$ tai $x = 3/2$, niin yhtälö (*) toteutuu ainoastaan pisteissä $(x, y) = (0, 0)$ ja $(x, y) = (3/2, 3/2)$. Koska funktion $f(x, y)$ arvot kasvavat pisteen (x, y) siirtyessä oikealle yläviistoon, on Kuvasta 6.13 katsoen ilmeistä, että pisteessä $(3/2, 3/2)$ on lokaali (itse asiassa globaali) maksimikohta, mutta pisteessä $O = (0, 0)$ ei ole lokaalia ääriarvoa lainkaan. Origo esiintyykin yhtälön (*) ratkaisuna vain sen vuoksi, että $g_x(O) = g_y(O) = 0$. Implisiittifunktiolausetta ei täten voida soveltaa origossa, ja kuten näemme, käyrä leikkaakin origossa itsensä. Sitovampi perustelu sille, ettei origossa ole sidottua ääriarvoa, saadaan esimerkiksi Kartesiuksen lehden parametrimuotoisesta esityksestä: $x = x(t) = 3t/(1 + t^3)$, $y = y(t) = 3t^2/(1 + t^3)$. Origoa lähestytään, kun $t \rightarrow \pm\infty$ sekä silloin, kun $t \rightarrow 0$. Jätämme yksityiskohdat harjoitustehtäväksi.

Huomaa, että tällä sidotulla ääriarvotehtävällä ei ole lainkaan lokaaleja minimikohtia. Käyttäen parametrisointia voit harjoitustehtävänä todistaa, että aina $f(x(t), y(t)) > -1$, ja että $\lim_{t \rightarrow -1} f(x(t), y(t)) = -1$. Tämä tarkoittaa sitä, että olipa $\varepsilon > 0$ miten pieni positiivinen reaaliluku tahansa, niin funktio f saa käyrällä $g(x, y) = 0$ arvoja väliltä $(-1, -1 + \varepsilon)$, mutta ei saa lainkaan arvoja $\in (-\infty, -1]$. Pienintä arvoa ei siis saavuteta missään.

Yleisemminkin on syytä huomauttaa, että side-ehtofunktion $g(x, y)$ kriittiset pisteet aina ovat myös yhtälön (*) ratkaisuja. Ne on tutkittava erikseen, koska implisiittifunktiolauseeseen perustuva menetelmä ei sano mitään tällaisessa pisteessä mahdollisesti olevasta sidotusta ääriarvosta.

Tarkastellaan lopuksi sellaista ääriarvotehtävyyppiä, jonka ratkaisemiseksi joudumme yhdistelemään kaikkia opittuja tekniikoita. Oletetaan, että piste (x, y) on rajoitettu tason joukkoon S , jolla on seuraavan kaltainen rakenne (täsmällinen kuvailu esitetään kurssilla Usean muuttujan funktiot)

- (i) Joukko S on *rajoitettu*, eli on olemassa sellainen reaaliluku $R > 0$, että $x^2 + y^2 \leq R^2$ aina, kun $(x, y) \in S$.
- (ii) Joukon S reunakäyrä voidaan jakaa osiin $C_1, C_2, \dots, C_m$ siten, että kullakin osalla on voimassa jokin side-ehto: $(x, y) \in C_i \Rightarrow g_i(x, y) = 0$, missä funktiot g_i ovat osittaisderivaattoineen jatkuvia.
- (iii) Edellisessä kohdassa kuvatut reunakäyrät $C_i, i = 1, 2, \dots, m$, sisältyvät joukkoon S .

Voidaan todistaa, että tällaisessa joukossa S jatkuva funktio f aina saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa, toisin sanoen on olemassa sellaiset pisteet $P_{\max} \in S$ ja $P_{\min} \in S$, että aina, kun $P \in S$, niin epäyhtälöt $f(P_{\min}) \leq f(P) \leq f(P_{\max})$ ovat voimassa. Tämä on 2-ulotteinen vastine kurssilla Analyysi I esitetylle tulokselle ‘suljetulla välillä jatkuva funktio saavuttaa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa’. Jos näillä edellytyksillä tehtävänä on etsiä jotkin nämä ehdot toteuttavat pisteet $P_{\max}$ ja $P_{\min}$ (ne eivät välttämättä ole yksikäsitteisiä), niin tehtävä jakaantuu osiin seuraavasti:

- (i) Etsi funktion $f(x, y)$ joukkoon S kuuluvat kriittiset pisteet sekä pisteet, joissa f ei ole differentioituva.
- (ii) Ratkaise kullakin reunakäyrän osalla $C_i, i = 1, 2, \dots, m$ vastaava sidottu ääriarvotehtävä.
- (iii) Selvitä reunakäyrien joukkoon S kuuluvat leikkauspisteet.
- (iv) Laske funktion f arvot edellisissä vaiheissa löydettyissä pisteissä ja valitse niiden joukosta suurin ja pienin.

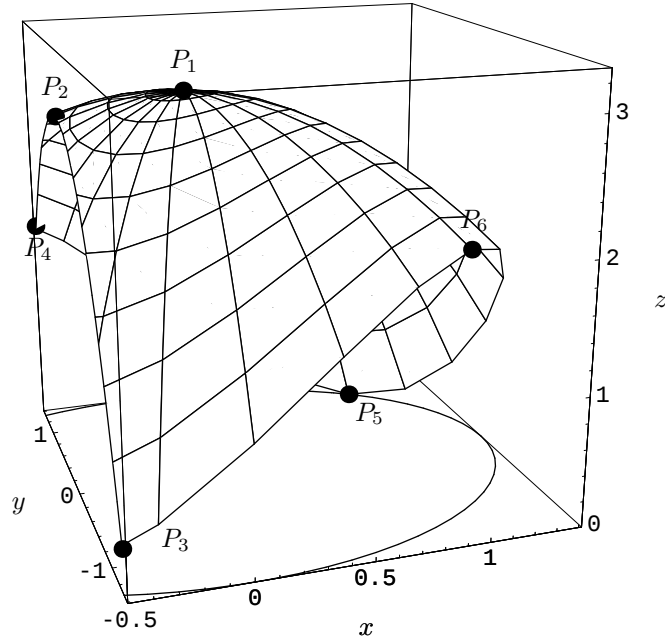
Viimeinen vaihe tässä on analoginen yhden muuttujan funktion tapauksessa sovellettuun menettelyyn: laske suljetulla välillä I derivoituvan funktion $f(x)$ arvot derivaatan $f'(x)$ väliin I kuuluvissa nollakohdissa sekä välin I päätepisteissä — näiden joukossa on suurin ja pienin funktio f välillä I saamista arvoista.

Esimerkki 6.43. Olkoon S epäyhtälön $x \geq -1/2$ origokeskisestä $\sqrt{2}$ -säteisestä ympyrälevystä rajaama alue

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq -1/2, x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Etsi funktion $f(x, y) = 3 - (x^2 + xy + y^2)$ tässä joukossa saamista arvoista suurin ja pienin.

Ratkaisu. Joukko S ja funktion f kuvaaja on esitetty Kuvassa 6.14. Joukko S on vaadittua muotoa. Sen reunoina esiintyvät C_1 : osa suorasta $x = -1/2$, ja C_2 : osa ympyrästä $x^2 + y^2 = 2$. Suorasta C_1 kuuluvat



Kuva 6.14: Esimerkin 6.43 funktion kuvaaja joukossa S . Joukon S reuna on piirretty xy -tasoon. Kuvassa merkittyinä ratkaisumenetelmän tuottamat kandidaatit minimi- ja maksimikohdiksi.

joukkoon S ne pisteet, joiden y -koordinaatti toteuttaa epäyhtälön $|y| \leq \sqrt{7}/2$. Ympyrästä C_2 kuuluvat joukkoon S ne pisteet, joiden x -koordinaatti toteuttaa epäyhtälön $x \geq -1/2$.

Määrätään ensin funktion f mahdolliset kriittiset pisteet. Osittaisderivaatat ovat $f_x = -2x - y$ ja $f_y = -x - 2y$. Helposti nähdään, että origo on ainoa piste, jossa $f_x = f_y = 0$. Koska origo kuuluu joukkoon S , se on eräs kandidaateista $P_1 = (0, 0)$. Toteamme, että $f(P_1) = 3$.

Suoralla C_1 saa funktio arvoja $h(y) = f(x, y) = f(-1/2, y) = 11/4 + y/2 - y^2$. Tässä $dh/dy = 1/2 - 2y$ häviää kohdassa $y = 1/4$. Tästä saamme toisen kandidaattipisteen $P_2 = (-1/2, 1/4)$. Tässä pisteessä funktio f saa arvon $f(P_2) = 45/16 < 3$. Koska y on rajoitettu välille $y \in [-\sqrt{7}/2, \sqrt{7}/2]$, saamme myös kandidaattipisteet $P_3 = (-1/2, -\sqrt{7}/2)$ ja $P_4 = (-1/2, \sqrt{7}/2)$. Funktion arvot näissä pisteissä ovat $f(P_3) = 1 - \sqrt{7}/4$ ja $f(P_4) = 1 + \sqrt{7}/4$. Koska $\sqrt{7} < 4$ toteamme, että $0 < f(P_3) < 1$ ja $1 < f(P_4) < 2$.

Käyrällä C_2 ratkaisemme sidotun ääriarvotehtävän, jossa side-ehtona on $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$. Nyt $(g_x, g_y) = (2x, 2y)$ ja $(f_x, f_y) = (-2x - y, -x - 2y)$, joten implisiittifunktiolauseen seurauksena saatu yhtälö (*) saa muodon $(2x + y)2y = (x + 2y)2x$, mikä sievenee muotoon $x^2 = y^2$. Tässä vaiheessa etsittävät kandidaattipisteet ovat käyrällä $x^2 + y^2 = 2$, joten ottamalla huomioon molemmat yhtälöt saadaan $x^2 = y^2 = 1$, joten yhtälö (*) toteutuu ympyrän $x^2 + y^2 = 2$ pisteissä $P_5 = (x, y) = (1, 1)$, $P_6 = (x, y) = (1, -1)$, $P_7 = (-1, 1)$ ja $P_8 = (-1, -1)$. Näistä P_7 ja P_8 eivät kuulu joukkoon S , joten riittää laskea $f(P_5) = 0$ ja $f(P_6) = 2$.

Käyräen C_1 ja C_2 leikkauspisteet käsiteltiin jo käyrän C_1 yhteydessä. Kaikki kandidaattipisteet on nyt

käsitelty, joten vastaukseksi saamme, että suurin joukossa S saaduista arvoista on $f(0,0) = 3$ ja pienin on $f(1,1) = 0$. Kuvassa 6.14 on pisteet $(x(P_i), y(P_i), f(P_i)), i = 1, 2, \dots, 6$ merkitty mustilla täplillä.

Luku 7

Kahden muuttujan funktion integraaleista

7.1 Pintaintegraali ja sen laskeminen iteroituna integraalina

Kahden muuttujan funktiosta $f(x, y)$ lähtien voidaan muodostaa useita erilaisia integraaleja. Ensimmäisenä tulee ehkä mieleesi matkia osittaisderivaattoja muodostettaessa käytettyä menettelyä: ajatellaan, että toiselle muuttujasta on annettu jokin kiinteä arvo ja toinen on edelleen ‘vapaa muuttuja’. Tällöin on alkuperäinen funktio mielletävissä yhden muuttujan funktioksi ja voimme muodostaa määrättyt integraalit

$$\int_{x=a}^b f(x, y) dx, \quad \int_{y=c}^d f(x, y) dy,$$

joista ensimmäisessä on ajateltu, että y :llä on kiinteä arvo, ja jälkimmäisessä puolestaan x :llä. Se muuttuja, jonka suhteen integrointi tehdään, nähdään merkinnässä esiintyvistä differentiaalista (dx tai dy). Tätä voi vielä korostaa kirjoittamalla kyseinen muuttuja näkyviin integroimisalarajan yhteyteen. Kaikissa lähdekirjoissa tätä lisäselvennystä ei käytetä, joten kannattaa opetella kiinnittämään huomiota integroitavan funktion yhteydessä esiintyvään differentiaaliin.

Mikäli tällainen integraali ylipäätään on olemassa niin sen arvo tietenkin riippuu toisen muuttujan arvosta, joten integraalien arvot määrittelevät jäljelle jääneen muuttujan funktion.

Esimerkki 7.1.

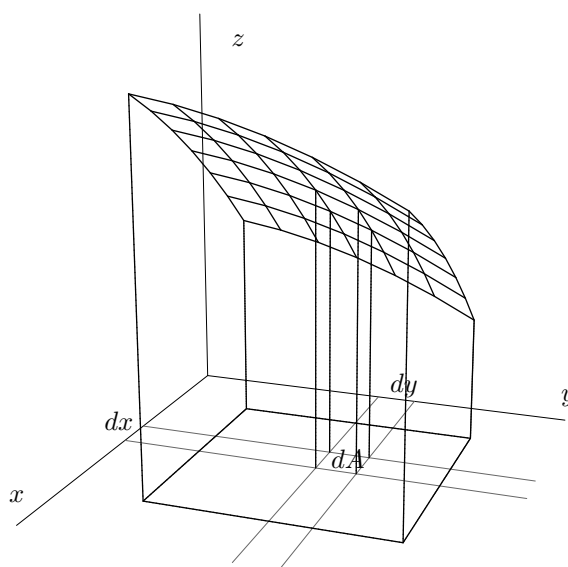
$$\int_{y=0}^1 (x^2 y + xy^2) dy = \left| \left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right) \right|_{y=0}^1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}.$$

Mikään ei määrättyä integraalia laskettaessa estä sitä, että integroimisrajat riippuvat jostakin muusta muuttujasta kuin integroismuuttujasta itsestään.

Esimerkki 7.2. Oletetaan, että $x \in [0, 1]$. Tällöin $x^2 \leq \sqrt{x}$, ja

$$\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 y + xy^2) dy = \left| \left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right) \right|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2 \sqrt{x}}{3} - \frac{x^6}{2} - \frac{x^7}{3}.$$

Mielenkiintoisempia sovelluksia esiintyy, kun integroidaan yli molempien muuttujien. Tarkastellaan ensin yksinkertaisinta perustapausta, jossa muuttujan x vaihteluväli on $[a, b]$ ja muuttujan y vaihteluväli $[c, d]$. Olkoon $f(x, y)$ jatkuva funktio, joka on määritelty kaikissa suorakaiteeseen $S = [a, b] \times [c, d]$ kuuluvissa pisteissä (x, y) . Haluamme määrittellä funktion f määrätyn integraalin yli suorakaiteen S $\int_S f$. Siinä tapauksessa, että funktio f saa joukossa S vain ei-negatiivisia arvoja otamme analogisesti yhden muuttujan tapauksen kanssa mielikuvaksi funktion kuvaajan $z = f(x, y)$ ja xy -tason väliin joukon S 'päällä' jäävän kappaleen tilavuuden laskemisen (ks. Kuva 7.1).



Kuva 7.1: Määrätty integraali yli suorakaiteen muotoisen alueen

Kun yhden muuttujan tapauksessa approksimoimme pinta-alaa äärellisen monen suorakaiteen avulla, niin nyt approksimoimme tilavuutta äärellisen monen 3-ulotteisen pylvään avulla. Jaamme siis välin $[a, b]$ osaväleihin käyttäen joitakin jakopisteitä, ja samoin välin $[c, d]$. Näiden karteesisina tuloina saamme suorakaiteen S jaon D äärelliseen moneen pieneen suorakaiteeseen $A_1, A_2, \dots, A_n$. Olkoot niiden pinta-alat $\Delta_i A, i = 1, \dots, n$. Kuten aikaisemminkin määrittelemme ylä- ja alasummat kaavoilla

$$s_D(f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i A, \quad S_D(f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i A,$$

missä

$$m_i = \inf_{(x,y) \in A_i} f(x, y), \quad M_i = \sup_{(x,y) \in A_i} f(x, y).$$

Ideana on tilavuuslaskun kannalta se, että pylväs, jonka pohjan ala on $\Delta_i A$ ja korkeus m_i , mahtuu kokonaisuudessaan tutkittavaan kappaleeseen, joten tällaisten pylväiden yhteenlaskettu tilavuus $s_D(f)$ on alaraja määrättävälle tilavuudelle. Vastaavasti pylväät, joiden pohjina ovat pienet suorakaiteet A_i ja korkeuksina

luvut M_i ‘peittävät koko kappaleen’, joten niiden yhteenlaskettu tilavuus $S_D(f)$ on yläraja määrättävälle tilavuudelle. Jälleen kerran idea on, että jakoa tihentämällä yläraja ja alaraja lähestyvät toisiaan.

Yläsummien infimumina ja alasummien supremumina saadaan ylä- ja alaintegraalit, ja sitten niiden mahdollisena yhteisenä arvona funktion f (pinta)integraali yli suorakaiteen S . Yksityiskohdat todistuksineen käsitellään myöhemmillä kursseilla. Toteamme tässä yhteydessä, että jatkuvan funktion tapauksessa ongelmia ei esiinny ja voimme määritellä

$$\int_S f = \inf_D S_D(f) = \sup_D s_D(f).$$

Kun esittelemme tällaisen integraalin merkinnässä myös muuttujat x ja y , niin liitämme mukaan myös vastaavan differentiaalalin. Yleisesti pintaintegraalin tapauksessa differentiaalina käytetään ns. ‘pinta-alkiota’ dA , joka mielletään pienen pylvään pohjan alaksi. Kun A_i on (kuten äsken) pienten osavälien $\Delta_j x$ ja $\Delta_k y$ karteesinen tulo, niin $\Delta_i A = \Delta_j x \cdot \Delta_k y$, ja on perusteltua käyttää tulomerkintää $dA = dx dy$. Käytössä esiintyy siten mm. ainakin seuraavia merkintöjä

$$\int_S f = \int_S f(x, y) dx dy = \int_S f(x, y) dA = \iint_S f(x, y) dA.$$

Kaksinkertaisen integraalimerkin käytön tässä yhteydessä motivoi seuraava *Fubinin lause*, joka antaa meille myös työkalun laskea pintaintegraalin arvo *iteroituna integraalina*.

Lause 7.3. (*Fubinin lause*) Oletetaan, että $f(x, y)$ on jatkuva joukossa $S = [a, b] \times [c, d]$. Tällöin

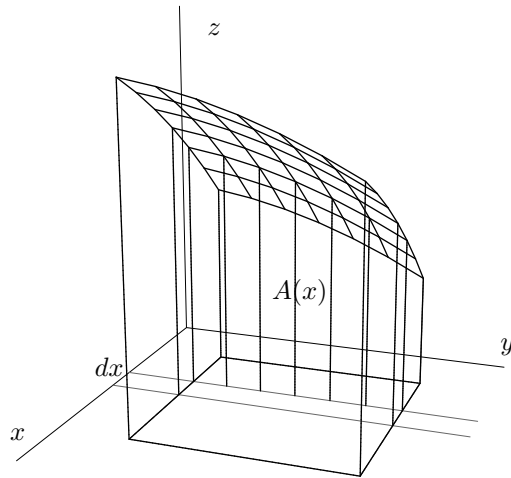
$$\int_S f(x, y) dA = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) dy \right) dx = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Huomautus 7.4. Fubinin lauseen kaavoista ensimmäisessä ensin integroidaan muuttujan y suhteen sen vaihteluvälin yli. Näin saadaan tulokseksi muuttujan x funktio $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$. Seuraavaksi sitten lasketaan tämän funktion määrätty integraali yli välin $[a, b]$. Jälkimmäisessä kaavassa periaate on samanlainen, mutta ensin suoritetaan x -integrointi, ja sitten integroidaan näin saatu y :n funktio.

Todistus. Täsmällinen todistus on syytä siirtää myöhemmille kursseille. Esitämme kuitenkin visuaaliseen havaintoon pohjautuvan perustelun kummallekin kaavalle. Nämä toivottavasti oikeuttavat lukijalle iteroitujen integraalien käytön, ja valaisevat sitä seikkaa, että eri iteroidut integraalit vastaavat lähinnä sitä, että ylä- ja alasummat muodostetaan yksinkertaisesti hieman eri tavalla pylväitä ryhmitellen. Oletetaan visualisointimme yksinkertaistamiseksi, että $f(x, y) \geq 0$ aina, kun $(x, y) \in S$, jolloin integraali $\int_S f$ laskee Kuvan 7.1 kappaleen tilavuuden V .

Ensimmäinen iteroitu integraali vastaa sellaista tapaa laskea V , jossa kyseinen kappale jaetaan ohuiksi siivuiksi yz -tason suuntaisilla tasoilla (kullakin tasolla siis x -koordinaatti on vakio). Kuvassa 7.2 on kuvattu yksi tällainen siivu. Tällaisen ohuen siivun tilavuus $dV = A(x) dx$, missä $A(x)$ on poikkipinnan ala ja dx on siivun paksuus. Poikkipinnan ala $A(x)$ riippuu tietenkin leikkauskohdasta x . Kuvasta 7.2 on ilmeistä, että tässä poikkipinnan (= kuvan pystyviivoitettu alue) ala saadaan määrätystä integraalista

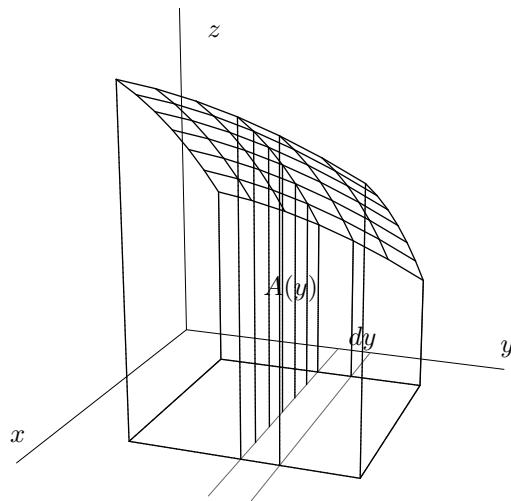
$$A(x) = \int_{y=c}^d f(x, y) dy.$$



Kuva 7.2: Tilavuus siivujen $dV = A(x) dx$ summana

Koko kappaleen tilavuus saadaan siivujen tilavuuksien summana, eli menemällä rajalle (=mielivaltaisen monta mielivaltaisen ohutta siivua)

$$V = \int_{x=a}^b dV = \int_{x=a}^b A(x) dx = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) dy \right) dx.$$



Kuva 7.3: Tilavuus siivujen $dV = A(y) dy$ summana

Jälkimmäinen iteroitu integraali vastaa sellaista tapaa laskea V , jossa kyseinen kappale jaetaan ohuiksi siivuiksi xz -tason suuntaisilla tasoilla (kullakin tasolla siis y -koordinaatti on vakio). Kuvassa 7.3 on kuvattu yksi tällainen siivu. Tällaisen ohuen siivun tilavuus $dV = A(y) dy$, missä $A(y)$ on poikkipinnan ala ja dy on siivun paksuus. Poikkipinnan ala $A(y)$ riippuu tietenkin leikkauskohdasta y . Kuvasta 7.3 on ilmeistä, että

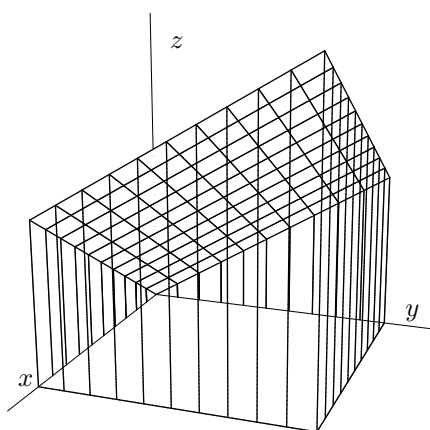
tässä poikkipinnan (= kuvan pystyviivoitettu alue) ala saadaan määrätystä integraalista

$$A(y) = \int_{x=a}^b f(x, y) dx.$$

Koko kappaleen tilavuus saadaan siivujen tilavuuksien summana, eli menemällä rajalle (=mielivaltaisen monta mielivaltaisen ohutta siivua)

$$V = \int_{y=c}^d dV = \int_{y=c}^d A(y) dy = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Tavalliseen tapaan tässä ei yksittäisen ‘makroskooppisen siivun’ tilavuus tietenkään ole tarkalleen = poikkipinnan ala $\times$ siivun paksuus, koska poikkipinnan ala muuttuu vähitellen. Integraalin ajatellaan tällaisessa tapauksessa olevan raja-arvo sellaisista siivujen tilavuuksien summista, jossa siivut ohenevat rajatta, ja niiden lukumäärä vastaavasti kasvaa rajatta. Esiitetty perustelu ei ole todistus, koska emme määritelleet emmekä käsitelleet raja-arvoprosesseja täsmällisesti. $\square$



Kuva 7.4: Tasojen $z = 0$ ja $z = x + y$ väliin neliön $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ yläpuolelle jäävä kappale

Esimerkki 7.5. Hirrestä (asetetaan z -akselin suuntaan), jonka poikkileikkaus on yksikköneliö $S = [0, 1] \times [0, 1]$, sahataan tasojen $z = 0$ ja $z = x + y$ rajaama kappale (ks. Kuva 7.4). Laske sen tilavuus.

Ratkaisu. Nyt $f(x, y) = x + y$, joten yz -tason suuntaisen siivun poikkipinnan ala on

$$A(x) = \int_{y=0}^1 (x + y) dy = \left|_{y=0}^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) = x + \frac{1}{2}.$$

Tilavuus saadaan sitten laskemalla siivujen tilavuudet $dV = A(x) dx$ yhteen

$$V = \int_{x=0}^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left|_{x=0}^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right) = 1.$$

Esimerkki 7.6. Olkoon $S = [0, 1] \times [0, 1]$. Osoita laskemalla, että kumpikin iteroitu integraali antaa saman arvon integraalille

$$I = \int_S (xy + x^2) dx dy.$$

Ratkaisu. Integroimalle ensin y :n ja sitten x :n suhteen saadaan

$$I = \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 (x^2 + xy) dy \right) dx = \int_{x=0}^1 \left(x^2 + \frac{x}{2} \right) dx = \left| \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right|_{x=0}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Jos taas integroidaan ensin x :n ja sitten y :n suhteen saadaan

$$I = \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 (x^2 + xy) dx \right) dy = \int_{y=0}^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2} \right) dy = \left| \frac{y}{3} + \frac{y^2}{4} \right|_{y=0}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Pintaintegraali yli suorakaiteen muotoisen alueen on sekin vielä liian rajoittunut käsite useimpiin soveluksiin. Ei ole mahdollista määritellä funktion f pintaintegraalia yli minkä tahansa xy -tason $\mathbf{R}^2$ osajoukon S , mutta jos joukon S rajaa riittävän säännöllinen käyrä reunana (käsite, joka määritellään kurssilla Usean muuttujan funktiot), niin pintaintegraali voidaan määritellä. Tekniikkana on silloin, että valitaan riittävän iso suorakaide T , joka sisältää joukon S , ja määritellään $\int_S f = \int_T g$, missä funktio $g : T \rightarrow \mathbf{R}$ määritellään asettamalla $g(x, y) = f(x, y)$, jos $(x, y) \in S$ ja $g(x, y) = 0$ muulloin. Tällöin aiheutamme epäjatkuvuutta joukon S reunalla. Kyseiseltä reunalta on silloin vaadittava tiettyjä ominaisuuksia, jotta voitaisiin varmistua funktion g integroituvuudesta, eikä meillä tällä kurssilla ole käytössä tarvittavaa koneistoa. Tyydymme käsittelemään sellaisia tapauksia, joissa pintaintegraalin voi laskea sopivana iteroituna integraalina ja joiden laskutavan voi perustella Lauseen 7.3 ‘todistuksen’ viipalointiteknikalla. Tällöin ainoana muutoksena on, että viipaleissa poikkipinta-alan antavan ‘sisemmän integraalin’ integroimisraajat eivät olekaan vakioita vaan ‘ulomman integraalin’ integroimismuuttujan derivoituvia funktioita.

Lause 7.7. Oletetaan, että funktio $f(x, y)$ on jatkuva xy -tason $\mathbf{R}^2$ osajoukon S jokaisessa pisteessä. Oletetaan, että xy -tason alueen S määräävät epäyhtälöt

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\},$$

missä $c(x)$ ja $d(x)$ ovat välillä $[a, b]$ jatkuvia funktioita, ja $c(x) \leq d(x)$ aina, kun $x \in [a, b]$. Tällöin f on integroituva yli joukon S , ja integraali $\int_S f$ voidaan laskea iteroituna integraalina

$$\int_S f(x, y) dA = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

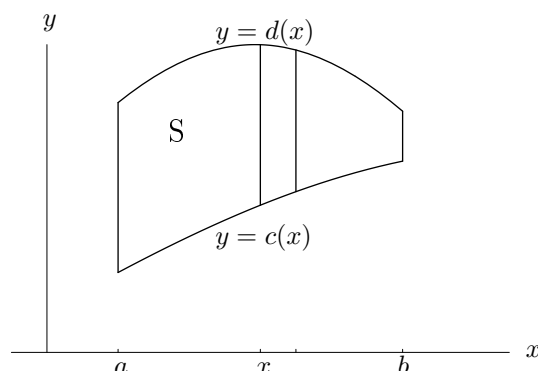
Jos taas alueen S määräävät epäyhtälöt

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\},$$

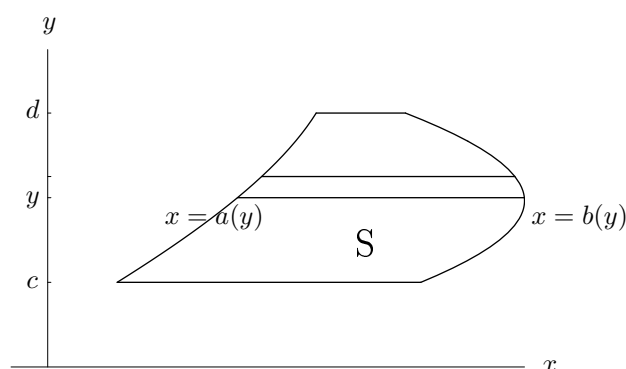
missä funktiot $a(y)$ ja $b(y)$ ovat välillä $[c, d]$ jatkuvia funktioita, ja $a(y) \leq b(y)$ aina, kun $y \in [c, d]$, niin tällöinkin f on integroituva yli joukon S , ja

$$\int_S f(x, y) dA = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Todistus. Sivuutetaan. □



Kuva 7.5: Käyrien $y = c(x)$ ja $y = d(x)$ välinen integroimisalue S voidaan käsitellä pystyraidoittain



Kuva 7.6: Käyrien $x = a(y)$ ja $x = b(y)$ välinen integroimisalue S voidaan käsitellä vaakaraidoittain

Huomautus 7.8. Voidaan ajatella, että ensimmäisessä tapauksessa integroimisalue S käydään läpi ‘pystyraitia kerrallaan’ (vrt. Luku 3, jossa pystyraitoja kutsuttiin pylväiksi), sillä sisäintegraalihan laskee yhden dx :n levyisen pystyraidan kontribuution (ks. Kuva 7.5). Vastaavasti jälkimmäisessä tapauksessa integroimisalue S käydään läpi ‘vaakaraita kerrallaan’, ja sisäintegraali laskee yhden dy :n korkuisen vaakaraidan kontribuution (ks. Kuva 7.6).

Joskus alue S voidaan käsitellä molemmilla mainituista tavoista. Näin käy esimerkiksi silloin, kun funktiot $c(x)$ ja $d(x)$ ovat molemmat aidosti kasvavia (tai molemmat väheneviä), ja niiden arvot yhtyvät välin päätepisteissä $x = a$ ja $x = b$.

Esimerkki 7.9. Käyrät $y = \sqrt{x}$ ja $y = x^2$ leikkaavat toisensa pisteissä $(0, 0)$ ja $(1, 1)$. Olkoon S käyrien näiden pisteiden välillä olevien osien rajaama alue (vrt. Kuva 3.2). Laske pintaintegraali

$$\int_S (1 + x + y^2) dA$$

molemmilla tavoilla iteroituna integraalina.

Ratkaisu. Joukko S voidaan ensin ajatella määritellyksi seuraavasti

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Näin ollen integraali voidaan käsitellä iteroituna integraalina, jossa sisäintegraali laskee yhden pystyraidan osuuden

$$\begin{aligned} \int_S (1 + x + y^2) dA &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 + x + y^2) dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left(\left[y + xy + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left(x^{1/2} + \frac{4}{3} x^{3/2} - x^2 - x^3 - \frac{x^6}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{8}{15} x^{5/2} - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{21} x^7 \right]_{x=0}^1 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{8}{15} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{21} = \frac{239}{420}. \end{aligned}$$

Toisaalta joukko S voidaan kuvata myös epäyhtälöillä

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

Tällöin sisäintegraali laskeekin vaakaraidan osuuden, ja iteroitu integraali saa arvon

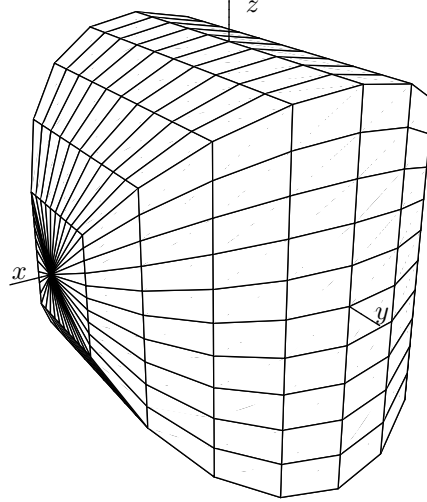
$$\begin{aligned} \int_S (1 + x + y^2) dA &= \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=y^2}^{\sqrt{y}} (1 + x + y^2) dx \right) dy \\ &= \int_{y=0}^1 \left(\left[x + \frac{1}{2} x^2 + xy^2 \right]_{x=y^2}^{\sqrt{y}} \right) dy \\ &= \int_{y=0}^1 \left(y^{1/2} + \frac{y}{2} + y^{5/2} - y^2 - \frac{3}{2} y^4 \right) dy \\ &= \left[\frac{2}{3} y^{3/2} + \frac{1}{4} y^2 + \frac{2}{7} y^{7/2} - \frac{y^3}{3} - \frac{3}{10} y^5 \right]_{y=0}^1 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{7} - \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{239}{420}. \end{aligned}$$

Esimerkki 7.10. Lieriöpinnat (äärettömän pitkiä putkia) $x^2 + z^2 = a^2$ ja $x^2 + y^2 = a^2$ rajaavat yhdessä kappaleen (ks. Kuva 7.7). Laske sen tilavuus.

Ratkaisu. Symmetrioiden vuoksi kyseisestä kappaleesta yksi kahdeksasosa on ns. ensimmäisessä oktantissa, eli alueessa, jossa $x \geq 0, y \geq 0$ ja $z \geq 0$. Tämä osa K on origokeskeisen a -säteisen ympyrän ensimmäisessä neljänneksessä olevan alueen

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

yläpuolella, koska kappale on lieriön $x^2 + y^2 = a^2$ sisällä. Koska K on myös putken $x^2 + z^2 = a^2$ sisällä, sen korkeus pisteessä $(x, y) \in S$ on $z = z(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Myös Kuvasta 7.7 näet, että kappaleen korkeus



Kuva 7.7: Lieriöpintojen $x^2 + z^2 = a^2$ ja $x^2 + y^2 = a^2$ rajaama kappale

pisteessä (x, y) riippuu vain x -koordinaatista. Näin ollen ensimmäisen oktantin osan K tilavuus saadaan integraalista

$$\begin{aligned} V(K) &= \int_S z \, dA = \int_{x=0}^a \left(\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} \, dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^a \left(\left| \sqrt{a^2-x^2} \right|_{y=0} y \sqrt{a^2-x^2} \right) dx \\ &= \int_{x=0}^a (a^2 - x^2) \, dx \\ &= \left| a^2x - \frac{x^3}{3} \right|_{x=0}^a = \frac{2a^3}{3}. \end{aligned}$$

Kysytty tilavuus on siten $V = 8V(K) = 16a^3/3$.

Tarkistuksena toteamme, että kyseistä kappaletta ympäröi kuutio, jonka särmän pituus on $2a$. Tämän kuution tilavuus on $(2a)^3 = 8a^3$, mikä on suurempi kuin V , mutta ei liian paljon suurempi kuin V . Koska kuution tilavuudesta merkittävä osa on näiden lieriöpintojen sisällä, niin tämä tarkastelu sopii yhteen laskumme tuloksen kanssa. Vastauksena saatu luku on siis uskottava.

7.2 Sijoitus pintaintegraaliin

Yhden muuttujan funktion tapauksessa sijoitus tarkoitti sitä, että muuttuja x korvattiin muuttujalla $x = g(t)$, integroimisväli $I_x = [a, b]$ korvattiin välillä $I_t = [\alpha, \beta]$, missä jatkuvasti derivoituva kuvaus g oli bijektio $g : I_t \rightarrow I_x$. Lisäksi ‘pylvään kantana’ esiintyvä ‘infinitesimaalinen jana’ dx korvattiin t -vastineellaan $g'(t) \, dt$.

Selitys tälle viimeiselle seikalle oli, että funktio g kuvaa välin I_t osavälin $[t, t+dt]$ välin I_x osaväliksi $[g(t), g(t+dt)]$, ja ‘infinitesimaalisella rajalla’ $g(t+dt) = g(t) + g'(t) dt$, joten viimeksi mainitun osavälin pituus on juuri $g'(t) dt$.

Analogiana pintaintegraalien puolella on, että muuttujat x ja y korvataan kahden uuden muuttujan u ja v funktioilla $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, missä funktiot $x(u, v)$ ja $y(u, v)$ ovat osittaisderivaattoineen jatkuvia, ja kun piste (u, v) käy läpi joukon S' , niin $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ käy läpi joukon S , ja vastaavuus $(u, v) \leftrightarrow (x, y)$ on ‘melkein bijektio’ (sallimme bijektiivisyydestä poikkeaman joukon S' reunalla). Pulmana on, että millä ‘infinitesimaalisen pylvään pohjana’ esiintyvä pinta-alkio $dA = dx dy$ tulee korvata? Yksiulotteisessa tapauksessa siihen tuli tekijäksi ‘infinitesimaalisten janojen venytyskerroin’ $g'(t)$, joten odotamme kaksiulotteisessa tapauksessakin tekijää, joka riippuu sijoitusfunktioiden osittaisderivaatoista x_u, x_v, y_u, y_v .

Lemma 7.11. *Oletetaan, että tason $\mathbf{R}^2$ vektorit $\mathbf{u} = (a, b)$ ja $\mathbf{v} = (c, d)$ ovat erään suunnikkaan S samasta kärjestä lähtevät sivut. Tällöin suunnikkaan S pinta-ala A saadaan kaavasta*

$$A = |ad - bc|.$$

Determinanttien (lineaarialgebran) kielellä ilmaistuna sama voidaan sanoa muodossa

$$A = \left| \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \right|.$$

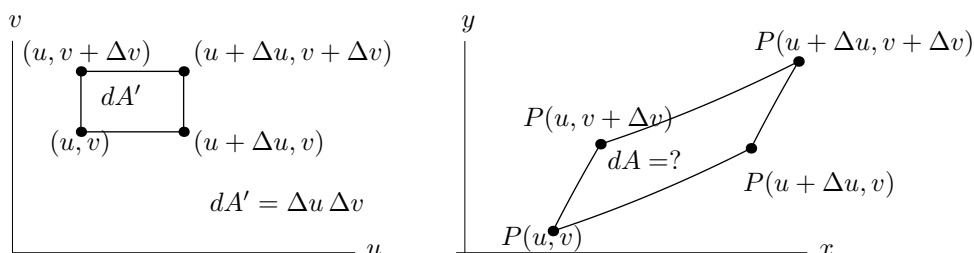
Todistus. Valitaan kyseisen suunnikkaan kannaksi vektori $\mathbf{u}$, jolloin sen pituus on $|\mathbf{u}|$. Sitä vastaan kohtisuoran korkeusjanan pituus on $|\mathbf{v}| \sin \alpha$, missä α on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$ välinen kulma. Samaistetaan vektorit 3-ulotteisten vektorien kanssa: $\mathbf{u} = (a, b, 0)$, $\mathbf{v} = (c, d, 0)$. Suunnikkaan pinta-ala on ristitulon perusominaisuuksien nojalla

$$A = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \alpha = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|.$$

Tässä

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0, 0, ad - bc),$$

joten $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |ad - bc|$. □



Kuva 7.8: Pinta-alkion muuttuminen sijoituksessa $(x, y) = P(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$

Lause 7.12. Oletetaan, että vastaavuus $(u, v) \leftrightarrow (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ on bijektio uv -tason joukolta S' xy -tason joukolle S (sallimme poikkeaman bijektiivisyydestä joukon S' reunalla). Oletetaan, että funktio $f(x, y)$ on jatkuva joukossa S , ja että funktiot $u(x, y), v(x, y)$ ovat osittaisderivaattoineen jatkuvia joukossa S' . Tällöin

$$\int_{(x,y) \in S} f(x, y) dx dy = \int_{(u,v) \in S'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

missä itseisarvomerkkiseen sisällä esiintyvä Jacobin funktionaalideterminantti on

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = x_u y_v - x_v y_u.$$

Todistus. Esitetään myöhemmällä kurssilla. Perustelemme tämän kuitenkin differentiaalien avulla seuraavalla löyhähköllä, osin geometriseen havaintoon pohjautuvalla ajatuskululla. Tutkitaan uv -tasossa joukkoon S' sisältyvää suorakaidetta, jonka kärkinä ovat pisteet (u, v) , $(u + \Delta u, v)$, $(u + \Delta u, v + \Delta v)$ ja $(u, v + \Delta v)$ (Kuvan 7.8 vasen puolikas). Tämän pinta-alkion pinta-ala on selvästi $dA' = \Delta u \Delta v$. Kuvauksessa $P : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ tämä suorakaide kuvautuu likimain suunnikkaan muotoiseksi alueeksi (Kuvan 7.8 oikea puolikas), jonka kärkinä ovat pisteet $P_0 = P(u, v)$, $P_1 = P(u + \Delta u, v)$, $P_2 = P(u + \Delta u, v + \Delta v)$ ja $P_3 = P(u, v + \Delta v)$. Tämä seuraa funktioiden $x(u, v)$ ja $y(u, v)$ differentioituvuudesta (emme perustele sitä tarkasti).

Edelleen näiden funktioiden differentioituvuudesta seuraa, että

$$P(u + \Delta u, v) = (x(u + \Delta u, v), y(u + \Delta u, v)) \approx (x(u, v) + \Delta u \cdot x_u(u, v), y(u, v) + \Delta u \cdot y_u(u, v)),$$

eli suuntajana $\overline{P_0 P_1} \approx (x_u, y_u) \cdot \Delta u$, ja tämä approksimaatio on sitä tarkempi, mitä pienempi Δu on. Raja-arvonahan saadaan

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\overline{P_0 P_1}}{\Delta u} = (x_u, y_u).$$

Vastaavasti

$$P(u, v + \Delta v) = (x(u, v + \Delta v), y(u, v + \Delta v)) \approx (x(u, v) + \Delta v \cdot x_v(u, v), y(u, v) + \Delta v \cdot y_v(u, v)),$$

eli suuntajana $\overline{P_0 P_3} \approx (x_v, y_v) \cdot \Delta v$. Voimme siis ‘infinitesimaalisella rajalla’ pitää xy -tason vastinaluetta suunnikkaana, jonka pisteestä $P_0 = P(u, v)$ lähtevinä sivuina ovat vektorit $(x_u, y_u) du$ ja $(x_v, y_v) dv$. Näin ollen vastinalueen pinta-alalle saadaan edellisen Lemman mukaisesti

$$dA = |x_u y_v - x_v y_u| \cdot |du dv|.$$

Kun sitten muodostamme pintaintegraaliin $\int_S f(x, y) dx dy$ liittyvät ylä- ja alasummat käyttäenkin sellaisia pylviä, joiden pohjina esiintyvät tavallisten suorakaiteiden asemesta tällaiset suunnikasmaiset vastinalueet, näemme, että nämä ylä- ja alasummat vastaavat pintaintegraalin

$$\int_{S'} f(x(u, v), y(u, v)) |\partial(x, y) / \partial(u, v)| du dv$$

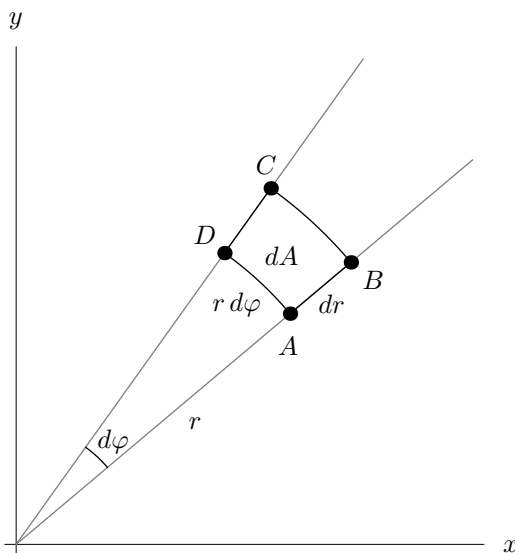
ylä- ja alasummaa. Tarkempi raja-arvotarkastelu johtaa lopulta väiteyhdistelmään. $\square$

Tämän kurssin kannalta käytännössä ainoa tarvittava Jacobin funktionaalideterminantti liittyy napakoordinaattien käyttöön. Tällöin uusina muuttujina esiintyvät r ja φ , ja koordinaattimuunnoksen välittävät sijoitusfunktiot

$$\begin{cases} x = x(r, \varphi) &= r \cos \varphi, \\ y = y(r, \varphi) &= r \sin \varphi. \end{cases}$$

Jacobin funktionaalideterminantti saa tällöin arvon

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r.$$



Kuva 7.9: Pinta-alkio napakoordinaatteja käytettäessä

Tässä tapauksessa Jacobin funktionaalideterminantin vaikutus pinta-ala-alkioon on helposti varmistettavissa tutkimalla Kuvaa 7.9. Siellä pinta-alkio on pisteitä A, B, C, D yhdistävien käyrien rajaama alue, jonka sisällä olevan pisteen etäisyys origosta on välillä $(r, r + dr)$ ja vaihekulma välillä $(\varphi, \varphi + d\varphi)$, missä (r, φ) ovat pisteen A napakoordinaatit. Näin pisteet A ja D ovat origokeskisen r -säteisen ympyrän kaarella, joten niitä yhdistävän kaaren pituus on $r d\varphi$. Janat AB ja DC ovat molemmat pituudeltaan dr . Kun pidämme pisteen A paikallaan, mutta $dr \rightarrow 0$, $d\varphi \rightarrow 0$, niin kuvio $ABCD$ on oleellisesti suorakaide, jonka yksi sivu on pituudeltaan $r d\varphi$ ja toinen dr . Näin ollen sen pinta-ala on

$$dA = r dr d\varphi.$$

Napakoordinaattien tapauksessa Jacobin funktionaalideterminantti $\partial(x, y)/\partial(r, \varphi) = r$ ilmaisee tarkasti juuri sen, että Kuvan 7.9 kaltaisen alueen $ABCD$ pinta-ala riippuu paitsi koordinaattien vaihteluvälien

pituuksista dr ja $d\varphi$ myös infinitesimaalisen suorakaiteen etäisyydestä origosta: kaukana origosta pienikin vaihekulman muutos $d\varphi$ liikuttaa pistettä merkittävästi ja pinta-alkiokin on suuri. Toisen ääripään muodostaa origo, jossa funktionaalideterminantti häviää. Tämä kuvastaa muun muassa sitä, että origossa ei kuvaus karteesisen ja napakoordinaattien välillä ole bijektio. Kun $r = 0$, niin pisteen xy -koordinaatit eivät lainkaan riipu vaihekulmasta φ . Lausetta 7.12 voidaan silti käyttää. Poikkeamat bijektiivisyydestä koskee vain $r\varphi$ -koordinaattien vaihtelualueen ($r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi]$) reunoja: $r = 0$ vastaa origoa kaikilla φ :n arvoilla, ja vaihekulmat $\varphi = 0$ ja $\varphi = 2\pi$ vastaavat samaa pistettä (kullekin kiinteälle r :n arvolle).

Napakoordinaattimuunnoksen yleisyys ja käyttökelpoisuus johtuvat siitä, että usein tarkasteltava alue ja/tai integroitava funktio on yksinkertaisemmin kuvattavissa napakoordinaatteja käyttäen, jolloin laskut yksinkertaistuvat.

Esimerkki 7.13. Suoran ympyräkartion korkeus on h ja pohjaympyrän säde R . Tarkista sen tilavuuden kaava

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

pintaintegraalin avulla.

Ratkaisu. Sijoitetaan kartio siten, että sen pohjaympyrä on xy -tason ympyrä $x^2 + y^2 = R^2$, ja huippu pisteessä $(x = 0, y = 0, z = h)$. Pisteessä $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ kartion vaippa on korkeudella $f(r) = h(1 - r/R)$, sillä korkeus pienenee säteittäin lineaarisesti arvosta $f(0) = h$ arvoon $f(R) = 0$. Napakoordinaateissa ilmaistuna pohjaympyrä Y on pistejoukko

$$Y = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Näin ollen tilavuus saadaan iteroituna integraalina

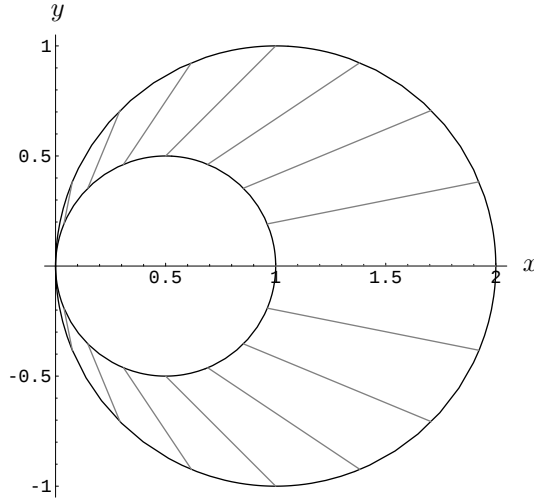
$$\begin{aligned} V &= \int_Y f \, dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R f(r) r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^R h \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R} \right) dr \right) d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{hR^2}{6} d\varphi = \frac{\pi h R^2}{3}. \end{aligned}$$

Tällä kertaa ulompi φ -integrointi oli erityisen mukava, koska integrandina oli vakiofunktio.

Esimerkki 7.14. Voidaan osoittaa (harjoitustehtävä), että välillä $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ napakoordinaattiyhtälön $r = \cos \varphi$ antama käyrä on origon kautta kulkeva ympyrä, jonka keskipiste $= (1/2, 0)$ ja säde siis $= 1/2$. Laske pintaintegraali

$$\int_S x \, dA,$$

missä S on ympyrien $r = \cos \varphi$ ja $r = 2 \cos \varphi$ väliin jäävä alue.



Kuva 7.10: Esimerkin 7.14 integroimisalue harmailla säteillä korostettuna

Ratkaisu. Alue S on napakoordinaattien avulla esitettynä (ks. Kuva 7.10)

$$S = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mid \cos \varphi \leq r \leq 2 \cos \varphi, -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2\}.$$

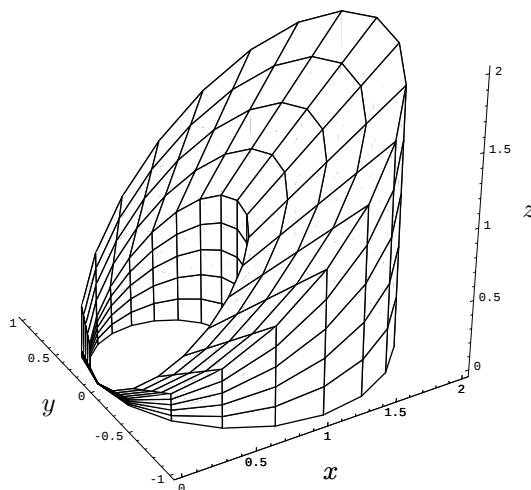
Otetaan lisäksi huomioon, että $dA = r dr d\varphi$, ja että $f(r, \varphi) = x = r \cos \varphi$. Näin ollen kysytty integraali on esitettävissä iteroituna integraalina

$$\begin{aligned} \int_S x dA &= \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{r=\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} (r \cos \varphi) r dr \right) d\varphi \\ &= \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \left(\left[\cos \varphi \frac{r^3}{3} \right]_{r=\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \right) d\varphi \\ &= \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{7 \cos^4 \varphi}{3} d\varphi \\ &= \frac{14}{3} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi \\ &= \frac{14}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{8}, \end{aligned}$$

missä kahdessa viimeisessä vaiheessa on käytetty φ -integrandin parillisuutta ja Esimerkin 2.34 kaavaa (katso myös Esimerkkiä 2.38).

Tämä pintaintegraali laski myös Kuvan 7.11 tilavuuden. Koska kyseinen kappale on selkeästi tilavuudeltaan alle puolet sellaisen suoran ympyrälieriön tilavuudesta, jonka pohjan ala on π ja korkeus 2, niin tarkistuksena toteamme, että integraalin arvo on (vähän) $< \pi$. Jos pienempi ympyrä ei tekisi reikää, niin kappale olisi tasan puolet kyseisestä lieriöstä.

Seuraava esimerkki käsittelee erästä yhden muuttujan funktion epäoleellista integraalia, johon olet luultavasti törmännyt todennäköisyyslaskennassa normaalijakauman yhteydessä. Yllättävää tässä on, että inte-



Kuva 7.11: Esimerkin 7.14 kappale

graaali, jota emme pysty laskemaan yhden muuttujan funktion teorian avulla, onkin laskettavissa pintaintegraalien avulla.

Esimerkki 7.15. Osoita, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Ratkaisu. Aina, kun $x \geq 1$, niin $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Koska integraali $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ suppenee (Esimerkki 3.21), niin majoranttiperiaatteen nojalla integraali $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ sekin suppenee. Koska integrandi on parillinen, niin myös $\int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2} dx$ suppenee. Näin ollen tutkittava epäoleellinen integraali suppenee. Merkitään raja-arvoa

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-x^2} dx.$$

Olkoon $c > 0$ reaalinen parametri. Merkitään edelleen $F(c) = \int_0^c e^{-x^2} dx$. Käytetään ensimmäisen neljänneksen neliöstä merkintää

$$N(c) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq c, 0 \leq y \leq c\},$$

ja neljännesympyrästä merkintää.

$$Y(c) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq c^2\}.$$

Tällöin vakuutut helposti siitä, että nämä joukot toteuttavat sisältymisrelaatiot

$$Y(c) \subset N(c) \subset Y(\sqrt{2}c).$$

Tutkitaan funktion $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ pintaintegraaleja. Koska $f(x, y) = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$, niin Lauseen 7.3 mukaan funktion f integraali yli joukon $N(c)$ on

$$\begin{aligned}\int_{N(c)} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{y=0}^c \left(e^{-y^2} \int_{x=0}^c e^{-x^2} \, dx \right) dy \\ &= \int_{y=0}^c F(c) e^{-y^2} \, dy = F(c)^2.\end{aligned}$$

Ratkaiseva havainto on, että osaamme laskea funktion f pintaintegraalin yli joukon $Y(c)$, sillä napakoordinaateissa ilmaistuna

$$Y(c) = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq r \leq c, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}.$$

Koska $f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = e^{-r^2}$, niin Lauseen 7.12 mukaan

$$\begin{aligned}\int_{Y(c)} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^c r e^{-r^2} \, dr \right) d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\left| -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right|_{r=0}^c \right) d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-c^2} \right) d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-c^2} \right),\end{aligned}$$

sillä $D e^{-x^2} = -2x e^{-x^2}$, ja siis $\int r e^{-r^2} \, dr = (-1/2) e^{-r^2}$. Erityisesti saamme, että

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{Y(c)} f \, dA = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-c^2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Toisaalta funktio $f(x, y)$ on koko tasossa positiivinen, joten (ajattele vastaavien kappaleiden tilavuuksia)

$$\int_{Y(c)} f \, dA \leq \int_{N(c)} f \, dA \leq \int_{Y(\sqrt{2}c)} f \, dA.$$

Tästä seuraa sandwich-periaatteen mukaan, että

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{N(c)} f \, dA = \lim_{c \rightarrow \infty} F(c)^2 = I^2.$$

Koska $I > 0$, niin $I = \sqrt{\pi}/2$. Integrandin parillisuuden nojalla lopulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = 2I = \sqrt{\pi}.$$

Luku 8

Differentiaaliyhtälöiden alkeita

Analyysin sovelluksissa *differentiaaliyhtälöt* on ehkä käytettyin työkalu. Melkein kaikkia muutosprosesseja mallinnetaan differentiaaliyhtälöiden avulla: talouden syklejä, kaikkia mekaniikan tehtäviä, kemiallisen reaktion etenemistä, aaltoliikkeitä, populaation koon muutosta jne. Tällä kurssilla esittelemme vain aivan peruskäsitteitä. Differentiaaliyhtälöitä varten on omistettu erillinen vuosittain järjestettävä kurssi. Lisäksi hieman harvemmin järjestetään osittaisdifferentiaaliyhtälöiden erikoiskurssi sekä numeerisen analyysin kurssi, jonka osana käsitellään differentiaaliyhtälöiden likimääräiseen ratkaisemiseen käytettäviä algoritmeja. Viimeksi mainitulla kurssilla edellytetään ohjelmointitaitoa, jotta voit toteuttaa siellä esiteltävät algoritmit tietokoneharjoituksin.

Differentiaaliyhtälöt (=DY:t) ovat yhtälöitä, joissa esiintyy tuntematon *funktio* (ei siis tuntematon luku, kuten tavallisissa yhtälöissä) ja ainakin yksi sen derivaatta. Tällä kurssilla usein $y = y(x)$ on etsittävä tuntematon funktio. Esimerkkejä DY:stä ovat

$$y' + 2xy = x^2, \quad y'' + 2y' + 3y = \cos x.$$

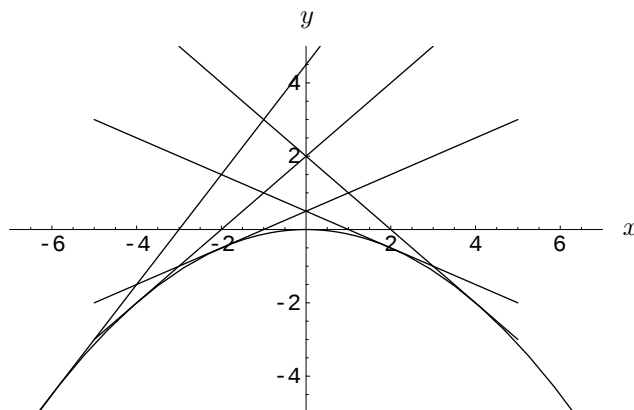
DY on n :nnen *kertaluvun* DY, jos se on muotoa $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$, eli korkein yhtälössä esiintyvä tuntemattoman funktion y derivaatta on kertalukua n . Yllä esiintyneistä esimerkkiyhtälöistä vasemmanpuoleinen on siis ensimmäisen kertaluvun ja jälkimmäinen toisen kertaluvun DY.

Sangen yleisessä tilanteessa (tarkempi esittely myöhemmillä kursseilla) kertalukua n olevan DY:n ratkaisufunktiot muodostavat joukon, jossa on n kappaletta vapaasti valittavia reaalisia parametreja. Esimerkiksi soveltamalla integraalilaskennan peruslausetta kahdesti näemme, että DY:n

$$y'' = 6x$$

kaikki ratkaisut ovat muotoa $y(x) = x^3 + C_1x + C_2$, missä vakiot C_1 ja C_2 voidaan valita vapaasti. Koska kyseessä oli toisen kertaluvun DY, vapaasti valittavia parametreja oli kaksi. Tällaisen funktiojoukon geometrinen vastine on *käyräparvi* — kutakin parametrien yhdistelmää kohti saadaan yksi käyrä = kyseisen ratkaisufunktion kuvaaja. Käyräparven lisäksi DY:llä voi olla ns. *erikoisratkaisuja*, jotka ovat ratkaisuja siinä, missä muutkin, mutta eivät kuulu käyräparveen. Erikoisratkaisu voi syntyä esimerkiksi parven käyrien

niin sanottuna *verhokäyränä*, kuten seuraavassa esimerkissä.



Kuva 8.1: Paraabeli $y = -x^2/8$ ja sen tangentit ovat kaikki DY:n $2y'^2 + xy' - y = 0$ ratkaisuja

Esimerkki 8.1. DY:n

$$2y'^2 + xy' - y = 0$$

ratkaisuina ovat kaikki parven $y = Cx + 2C^2$ suorat (tarkista derivoimalla!), missä C on vapaasti valittava vakio. Toisaalta paraabelin $y = -x^2/8$ pisteeseen $(x_0, y_0) = (x_0, -x_0^2/8)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $-x_0/4$, ja tangentin yhtälö siis

$$y + \frac{x_0^2}{8} = -\frac{x_0}{4}(x - x_0) \Leftrightarrow y = \left(\frac{-x_0}{4}\right)x + 2\left(\frac{-x_0}{4}\right)^2,$$

eli kyseessä on mainitun suoraparven suora: $C = -x_0/4$. Parven suorat siis kaikki sivuavat tätä paraabelia. Lisäksi funktion $y = -x^2/8$ derivaatta on $y' = -x/4$, ja

$$2y'^2 + xy' - y = 2(-x/4)^2 + x(-x/4) - (-x^2/8) = \frac{x^2}{8} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8} = 0.$$

Tämä paraabeli on siis sekin DY:n ratkaisu. Kuvassa 8.1 on esitetty muutama parven suora sekä niiden verhokäyränä muodostuva paraabeli.

Usein ongelma, jota DY kuvaa, tarjoaa varsinaisen differentiaaliyhtälön lisäksi *alkuehtoja*, joita käytetään valitsemaan haluttu ratkaisu käyräparven joukosta.

Käsitlemme ilman todistuksia muutamia alkeellisia DY-tyyppejä sekä menetelmiä niiden ratkaisemiseksi. Menetelmien toimivuus voidaan aina lopuksi varmistaa sijoittamalla ratkaisuna saatu funktio derivaattoineen alkuperäiseen differentiaaliyhtälöön. Tällöin teoriaan jää looginen aukko siitä syystä, ettemme voi olla varmoja siitä, että olemme löytäneet *kaikki* ratkaisut. On olemassa laajoja DY:n ja alkuarvotehtävän luokkia, joille voidaan todistaa, että niiden ratkaisu on yksikäsitteisenä olemassa, mutta tarvittava koneisto on liian syvällistä tälle kurssille.

8.1 Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöistä

Muotoa

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (*)$$

olevaa DY:tä kutsutaan *separoituvaksi*. Käsittelemällä differentiaaleja ‘totuttuun epätäsmälliseen tapaan’ voidaan tämä DY kirjoittaa muodossa $dy/g(y) = f(x) dx$. Tämä voidaan tällöin integroida puolittain, jolloin saadaan

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx. \quad (**)$$

Jos tässä vasemman puolen määräämättömänä integraalina saatavalla funktiolla on helposti ilmaistava käänteisfunktio, niin saadusta yhtälöstä voidaan ratkaista $y = y(x)$. Mukaan saadaan yksi parametri (vastaten sitä, että DY on ensimmäistä kertalukua) sitä kautta, että määräämättömällä integraalilla on vapaasti valittava integroimisvakio. Menetelmän oikeutus voidaan perustella sijoittamalla yhtälön (**) vasemman puolen määräämättömään integraaliin hypoteettinen ratkaisu $y = y(x)$, jolloin sijoituksen seurauksena saadaan yhtälön (**) oikean puolen määräämätön integraali, kun otamme huomioon DY:n (*).

Esimerkki 8.2. Ratkaistaan DY $(x^2 + 1)y' = e^{-y}$.

Ratkaisu.

$$\begin{aligned} (x^2 + 1) \frac{dy}{dx} &= e^{-y} \\ \Leftrightarrow e^y dy &= \frac{dx}{x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow \int e^y dy &= \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow e^y &= \arctan x + C \\ \Leftrightarrow y &= \ln(\arctan x + C). \end{aligned}$$

Tässä integroimisvakio C on muutoin vapaasti valittava parametri, mutta on huolehdittava siitä, että funktio $\arctan x + C$ on tarkasteluvälillä > 0 .

Esimerkki 8.3. Oletetaan, että $n > 0$ on kokonaisluku, ja että A on jokin kemiallinen yhdiste. Jos A osallistuu kemialliseen reaktioon, niin sen konsentraatio c_A muuttuu ajan funktiona reaktion edetessä eli $c_A = c_A(t)$. Niin sanotussa n :nnen kertaluvun reaktiossa reaktion tapahtuminen edellyttää molekyyalitasolla, että n kappaletta yhdisteen A molekyyliä on riittävän lähellä toisiaan. Todennäköisyys tälle on verrannollinen konsentraation n :nteen potenssiin $c_A(t)^n$. Tämän seurauksena saadaan DY

$$-\frac{dc_A}{dt} = kc_A^n,$$

missä k on vakio, jonka arvo riippuu reaktion tarkemmista yksityiskohdista (voidaan arvioida koetulosten perusteella).

Tämä DY on separoituva, ja se voidaan kirjoittaa muodossa

$$-\frac{dc_A}{c_A^n} = k dt.$$

Tässä voidaan asettaa luonnollinen alkuehto, jonka mukaan konsentraatiolla on reaktion alkaessa hetkellä $t = 0$ jokin tunnettu arvo $c_A(0) = c_0$. Myöhemmällä hetkellä $t > 0$ saadaan integroimalla

$$-\int_{c_0}^{c_A(t)} \frac{dc_A}{c_A^n} = kt.$$

Jos tässä $n = 1$, niin ratkaisuksi saadaan

$$-\ln \frac{c_A(t)}{c_0} = kt \Leftrightarrow c_A(t) = c_0 e^{-kt}.$$

Jos taas $n > 1$, niin integroimalla saadaan

$$\frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{c_A(t)^{n-1}} - \frac{1}{c_0^{n-1}} \right) = kt,$$

mistä $c_A(t)$ voidaan ratkaista

$$\frac{1}{c_A(t)^{n-1}} = (n-1)kt + \frac{1}{c_0^{n-1}} \Rightarrow c_A(t) = \frac{c_0}{\sqrt[n-1]{1 + (n-1)c_0^{n-1}kt}}.$$

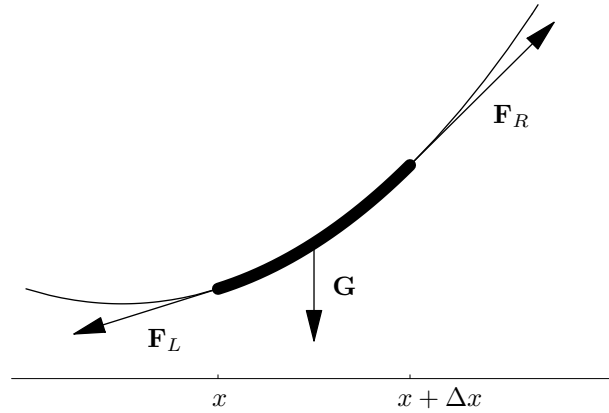
Esimerkki 8.4. Tasalaatuinen vaijeri (tai ketju) tuetaan päistään, ja asetetaan roikkumaan homogeeniseen painovoimakenttään, jolloin se asettuu funktion $y(x)$ kuvaajan muotoon. Perustellaan, miksi tällöin funktio $y = y(x)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$y'' = K\sqrt{1+y'^2}, \quad \text{missä } K > 0 \text{ on vakio,}$$

ja osoitetaan, että tämän DY:n ratkaisuja ovat funktiot

$$y = \frac{1}{K} \cosh(Kx + C_1) + C_2.$$

Ratkaisu. Tarkastellaan pientä ketjun osaa, joka jää välille $[x, x + \Delta x]$ (ks. Kuva 8.2). Tähän ketjun osaan vaikuttaa 3 eri voimaa. Painovoima $\mathbf{G}$, siitä oikealle olevan ketjun osan sitä tukeva voima $\mathbf{F}_R$, ja siitä vasemmalle olevan ketjun osan sitä tukeva voima $\mathbf{F}_L$. Tasapainotilassa nämä toteuttavat vektoriyhtälön $\mathbf{G} + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R = (0, 0)$. Tässä vaijerin jännitystä kuvaavat voimat $\mathbf{F}_L$ ja $\mathbf{F}_R$ ovat käyrän tangentin suuntaisia, sillä tangenttia vastaan kohtisuora komponentti aiheuttaisi aaltoliikettä tai muuta häiriötä, mitä ei tasapainotilassa esiinny (jäykkä tanko olisi tässä suhteessa erilainen kuin vaijeri). Näin ollen on olemassa sellaiset vakiot $A > 0$ ja $B < 0$, että $\mathbf{F}_L = B(1, y'(x))$, ja $\mathbf{F}_R = A(1, y'(x + \Delta x))$. Painovoima suuntautuu suoraan alaspäin, ja vektorin $\mathbf{G}$ pituus on suoraan verrannollinen tämän pienen ketjun osan massa. Koska oletimme vaijerin tasalaatuiseksi, niin massa on suoraan verrannollinen tämän ketjun osan pituuteen $\sqrt{1 + y'(\xi)^2} \Delta x$, missä ξ on jokin luku väliltä $[x, x + \Delta x]$ (vertaa käyrän pituuden kaavan johtoon kolmannessa luvussa). Siis $\mathbf{G} = -C(0, \sqrt{1 + y'(\xi)^2} \Delta x)$.



Kuva 8.2: Ketjukäyrän differentiaaliyhtälön johto

Tasapainoyhtälö saa näin muodon

$$(0, 0) = \mathbf{G} + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R = (A + B, Ay'(x + \Delta x) + By'(x) - C\sqrt{1 + y'(\xi)^2}\Delta x).$$

Vertaamalla ensimmäisiä komponentteja ratkeaa $B = -A$. Jakamalla jälkimmäiset komponentit luvulla Δx saadaan yhtälö

$$A \frac{y'(x + \Delta x) - y'(x)}{\Delta x} = C\sqrt{1 + y'(\xi)^2}.$$

Kun tässä merkitään $K = C/A$, ja annetaan $\Delta x \rightarrow 0$, saadaan raja-arvona väitetty DY

$$y''(x) = K\sqrt{1 + y'(x)^2}.$$

Huomaamme, että itse asiassa kyseessä on funktion $z(x) = y'(x)$ ensimmäisen kertaluvun DY

$$z' = dz/dx = K\sqrt{1 + z^2}.$$

Tämä separoituu muotoon

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = K dx,$$

mistä puolittain integroimalla saadaan

$$\operatorname{arsinh} z = Kx + C_1 \Leftrightarrow z = \sinh(Kx + C_1).$$

Koska $y(x) = \int z(x) dx + C_2$, tulee ratkaisuparveksi

$$y(x) = \frac{1}{K} \cosh(Kx + C_1) + C_2.$$

Tässä vakiot C_1 ja C_2 kertovat lähinnä sen (reaalimaailman kokemuksen perusteella ilmeisen) seikan, että ketjua voidaan suuntaissiirtää sekä x - että y -akselin suuntaisesti sen muodon muuttumatta. Parametri K puolestaan riippuu ketjun materiaalista ja pituudesta.

Seuraavaksi tarkastellaan muotoa

$$y' + f(x)y = g(x) \quad (*)$$

olevaa DY:tä. Tämän DY:n vasen puoli on $L(y) = y' + f(x)y$, missä L on *lineaarinen operaattori* eli funktio, jonka muuttujana on C^∞ -funktio (= funktio, jolla on tarkasteluvälillä kaikkien kertalukujen derivaatat), ja jonka arvot ovat niin ikään C^∞ -funktioita, ja joka lisäksi toteuttaa seuraavan lineaarisuusehdon: Jos y_1 ja y_2 ovat C^∞ -funktioita, ja a_1, a_2 mielivaltaisia reaalisia vakioita, niin tällöin

$$L(a_1y_1 + a_2y_2) = a_1L(y_1) + a_2L(y_2).$$

Nyt käytetyn operaattorin $L(y) = y' + f(x)y$ lineaarisuus seuraa suoraan derivoinnin lineaarisuudesta.

Merkitään $F(x) = \int f(x) dx$. Ottaen huomioon DY (*) saadaan

$$\frac{d}{dx} (ye^{F(x)}) = y'e^{F(x)} + yf(x)e^{F(x)} = g(x)e^{F(x)}.$$

Integroimalla tämä puolittain ja jakamalla tulos funktiolla $e^{F(x)}$ saadaan vastaukseksi

$$y = e^{-F(x)} \int g(x)e^{F(x)} dx.$$

Tämän ratkaisukaavan käyttökelpoisuutta rajoittaa se, että siinä esiintyvä määräämätön integraali voidaan eksplisiittisesti laskea alkeisfunktioiden avulla vain suhteellisen yksinkertaisissa tapauksissa.

Esimerkki 8.5. Ratkaise DY

$$y' - y = x^2 + x.$$

Ratkaisu. Tällä kertaa $F(x) = \int (-1) dx = -x$. Sijoittamalla tämä yllä olevaan ratkaisukaavaan saadaan vastaukseksi osittaisintegroimalla

$$y = e^x \left(\int (x^2 + x)e^{-x} dx \right) = e^x (-e^{-x}(x^2 + 3x + 3) + C) = Ce^x - x^2 - 3x - 3.$$

Tarkastellaan jatkoa varten vielä Esimerkin 8.5 ratkaisua lineaarisen operaattorin $L(y) = y' - y$ kannalta. Nyt

$$L(-x^2 - 3x - 3) = D(-x^2 - 3x - 3) - (-x^2 - 3x - 3) = -2x - 3 + x^2 + 3x + 3 = x^2 + x,$$

ja

$$L(e^x) = D(e^x) - e^x = e^x - e^x = 0.$$

Tässä siis termi $y_1 = Ce^x$ on ratkaisu niin sanotulle *homogeeniselle differentiaaliyhtälölle* $L(y) = y' - y = 0$, sillä $L(Ce^x) = C \cdot L(e^x) = 0$. Toinen termi $y_2 = -x^2 - 3x - 3$ puolestaan on alkuperäisen yhtälön $L(y) = x^2 + x$

eräs ratkaisu (=yksityisratkaisu). Tästä saamme toisen perustelun sille, että näiden kahden termin summa $y_1 + y_2$ on alkuperäisen yhtälön ratkaisu: operaattorin L lineaarisuuden perusteella

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0 + x^2 + x = x^2 + x.$$

Seuraavassa pykälässä samanlainen ajattelu on keskeisessä roolissa.

Huomautamme, että *Lineaarialgebran* kurssilla yhtälö(ryhmä)n homogeenisuus tarkoitti sitä, että vakio-termit $= 0$. DY:ssä (*) on tuntemattomana y , ja $g(x)$ ajatellaan sen ‘vakiotermiksi’.

8.2 Toisen kertaluvun vakiokertoiminen lineaarinen DY

Olkoot a ja b reaalisia vakioita ja $f(x)$ jokin funktio. Otsikon mukainen DY on muotoa

$$y'' + ay' + by = f(x),$$

missä vasen puoli $L(y)$ saadaan funktiosta y soveltamalla siihen lineaarista operaattoria $L(y) = y'' + ay' + by$. Tämä DY on toista kertalukua, joten etsimme kaksiparametrin käyräparvea. Yleinen ratkaisumenetelmä on seuraava:

- (i) Etsitään homogeeniselle DY:lle $L(y) = 0$ kaksi sellaista ratkaisua $y = y_1(x)$ ja $y = y_2(x)$, että kumpakaan ei saada toisesta kertomalla sitä vakiolla (erityisesti kumpikaan ei siis saa olla triviaali ratkaisu $y = 0$).
- (ii) Etsitään epähomogeeniselle DY:lle $L(y) = f(x)$ jokin yksityisratkaisu $y = y_0(x)$. Tämä tehdään usein arvaamalla ratkaisun muoto, tekemällä sopiva yrite, jossa on mukana tuntemattomia kertoimia, ja ratkaisemalla tuntemattomat kertoimet yhtälöstä $L(y) = f(x)$.
- (iii) Todetaan, että alkuperäisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y = y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

missä parametrit $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$ voidaan valita vapaasti tai ratkaista mahdollisista alkuehdoista.

Tässä kohdassa (iii) esitetty funktio on aina alkuperäisen DY:n ratkaisu. Tämä seuraa operaattorin L lineaarisuudesta:

$$L(y) = L(y_0) + L(C_1 y_1 + C_2 y_2) = L(y_0) + C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) = f(x) + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = f(x).$$

Tarkastelemme vaiheita (i) ja (ii) kumpaakin erikseen. Voidaan todistaa, että jos löydämme homogeeniselle yhtälölle $L(y) = 0$ kaksi kohdan (i) ehdon toteuttavaa ratkaisua, niin kaikki homogeenisen yhtälön ratkaisut ovat tällöin muotoa $y = y_h = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Kutsumme tätä parvea silloin *homogeenisen yhtälön yleiseksi ratkaisuksi*. Kuvattu menetelmä tiivistetään usein muotoon ‘epähomogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu saadaan lisäämällä sen (mikä tahansa) yksityisratkaisu vastaavan homogeenisen yhtälön yleiseen ratkaisuun’. Sama periaate toimii myös lineaaristen yhtälöryhmien tapauksessa kurssilla *Lineaarialgebra*.

Ensimmäisen kertaluvun vakiokertoimisella homogeenisella DY:llä $y' + ay = 0$ on aikaisemmin esitetyn perusteella ratkaisu $y = e^{-\int a dx} = e^{-ax}$. Arvaamme, että toisen kertaluvun vakiokertoimisella homogeenisella DY:llä voisi olla samaa muotoa $y = e^{rx}$ oleva ratkaisu. Tässä r on reaalinen vakio. Käytämme tätä funktiota *yritteenä*, ja sijoitamme

$$L(e^{rx}) = D^2(e^{rx}) + aD(e^{rx}) + be^{rx} = (r^2 + ar + b)e^{rx}.$$

Täten yrite $y = e^{rx}$ on homogeenisen yhtälön $L(y) = 0$ ratkaisu silloin ja vain silloin, kun parametri r on niin sanotun *karakteristisen yhtälön*

$$r^2 + ar + b = 0$$

ratkaisu.

Käsittely jakaantuu karakteristisen yhtälön ratkaisujen luonteen perusteella kolmeen hieman erilaiseen tapaukseen:

1) Jos karakteristisella yhtälöllä on 2 eri reaalista ratkaisua $r = r_1$ ja $r = r_2 \neq r_1$, niin tällöin vastaavat yrittäet $y_1 = e^{r_1 x}$ ja $y_2 = e^{r_2 x}$ toteuttavat ehdon (i), sillä $y_1/y_2 = e^{(r_1 - r_2)x}$, mikä ei ole vakio, kun $r_1 - r_2 \neq 0$. Tässä tapauksessa homogeenisen DY:n yleinen ratkaisu on siis

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

2) Jos karakteristisella yhtälöllä on yksi kaksinkertainen juuri $r = r_1 = r_2$ (välttämättä reaalinen), niin yrite $y = e^{rx}$ antaa meille vain yhden käyttökelpoisen ratkaisun $y_1 = e^{r_1 x}$. Tällöin kuitenkin

$$r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = (r - r_1)^2 = r^2 - 2r_1 r + r_1^2,$$

joten $a = -2r_1$ ja $b = r_1^2$. Ehdon (i) toteuttavaksi toiseksi ratkaisuksi y_2 kelpaa nyt $y_2 = x e^{r_1 x}$, sillä derivoimalla saadaan $y_2' = (r_1 x + 1)e^{r_1 x}$ ja $y_2'' = (r_1^2 x + 2r_1)e^{r_1 x}$. Näiden seurauksena

$$L(y_2) = e^{r_1 x} (x[r_1^2 + ar_1 + b] + [a + 2r_1]) = 0,$$

sillä ensimmäinen hakasulkulauseke häviää, koska r_1 on karakteristisen yhtälön ratkaisu, ja jälkimmäinen hakasulkulauseke häviää, koska $a = -2r_1$. Nyt $y_2/y_1 = x$ ei ole vakio, joten ehto (i) on voimassa, ja yleinen ratkaisu siis

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}.$$

3) Jos karakteristisen yhtälön juuret r_1, r_2 eivät ole reaalisia, niin ne ovat toistensa kompleksikonjugaatteja, eli

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta,$$

missä α ja β ovat reaalisia. Tällöin $a = -r_1 - r_2 = -2\alpha$ ja $b = r_1 r_2 = \alpha^2 + \beta^2$. Sijoittamalla nähdään, että tässä tapauksessa $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ ja $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ ovat molemmat homogeenisen yhtälön ratkaisuja.

Tarkistamme tämän funktiolle y_1 (y_2 jätetään harjoitustehtäväksi). Derivoimalla saadaan ensin

$$y_1' = e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x),$$

sitten

$$y_1'' = e^{\alpha x}(\alpha^2 \cos \beta x - \alpha \beta \sin \beta x - \alpha \beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x) = e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2) \cos \beta x - 2\alpha \beta \sin \beta x],$$

ja lopulta

$$L(y_1) = e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b) \cos \beta x - (2\alpha\beta + a\beta) \sin \beta x] = 0,$$

sillä $\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b = \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha^2 + (\alpha^2 + \beta^2) = 0$, ja $2\alpha\beta + a\beta = (2\alpha + a)\beta = 0$. Yleinen ratkaisu on tässä tapauksessa siten muotoa

$$y_h = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Esimerkki 8.6. Homogeenisen vakiokertoimisen yhtälön

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

karakteristisella yhtälöllä $r^2 - 3r + 2 = 0$ on ratkaisut $r_1 = 1$ ja $r_2 = 2$. Sen yleinen ratkaisu on täten

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Esimerkki 8.7. Vakiokertoimisen DY:n

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

karakteristisella yhtälöllä $r^2 + 4r + 4 = 0$ on kaksinkertainen juuri $r_1 = r_2 = -2$. Sen yleinen ratkaisu on siis

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.$$

Esimerkki 8.8. DY:n

$$y'' + y = 0$$

karakteristinen yhtälö on $r^2 + 1 = 0$. Tämän nollakohdat ovat $r_1 = i$ ja $r_2 = -i$. Yleinen ratkaisu on siis

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Esimerkki 8.9. (Vaimenematon harmoninen liike.) Kappale, jonka massa on $m = 4$, liikkuu kitkatta pitkin s -akselia edestakaisin voiman $F = -16s$ vaikutuksesta (tämä tilanne saadaan aikaan esimerkiksi kiinnittämällä kappale jäykkyydeltään sopivaan jouseen). Muodostetaan liikkeelle $s = s(t)$ (muuttujana t on aika) DY ja ratkaistaan se, kun lisäksi tiedetään, että hetkellä $t = 0$ kappale on kohdassa $s = 1$ ja sillä on nopeus $v = ds/dt = -2\sqrt{3}$.

Ratkaisu. Lähtökohtana on liikelaki $F = ma$, missä a on kappaleen voiman F vaikutuksesta saama kiihtyvyys. Koska $a = dv/dt = d^2s/dt^2 = s''$, niin

$$F = ma \Leftrightarrow -16s = 4s'' \Leftrightarrow s'' + 4s = 0,$$

eli kyseessä on kappaleen paikan (ajan funktiona) vakiokertoiminen homogeeninen toisen kertaluvun lineaarinen DY. Karakteristisen yhtälön $r^2 + 4 = 0$ ratkaisuja ovat $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$, joten DY:n yleinen ratkaisu on

$$s(t) = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t.$$

Vakiot C_1 ja C_2 määräytyvät alkuehdoista. Koska $1 = s(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = C_2$, niin $C_2 = 1$. Koska $v(t) = s'(t) = 2C_1 \cos 2t - 2C_2 \sin 2t$, niin $v(0) = 2C_1$, ja toinen alkuehto siis $2C_1 = -2\sqrt{3}$. Tästä ratkeaa $C_1 = -\sqrt{3}$, ja lopulliseksi vastaukseksi saadaan

$$s(t) = \cos 2t - \sqrt{3} \sin 2t.$$

Esimerkki 8.10. (Vaimennettu harmoninen liike.) Muutetaan Esimerkin 8.9 tilannetta siten, että kappaleen massa on $m = 1$, harmoninen voima $F_1 = -13s$, ja lisäksi kappaleeseen vaikuttaa sen nopeudesta riippuva kitkavoima $F_2 = -6v$ (tällainen nopeuteen verrannollinen liikettä vastustava voima syntyy esimerkiksi, kun liike tapahtuu väliaineessa, esimerkiksi nesteessä). Muodostetaan vastaava DY, ja ratkaistaan se alkuehdoilla $s(t=0) = 1$, $v(t=0) = s'(t=0) = -1$.

Ratkaisu. Tällä kertaa liikeyhtälö on

$$F_1 + F_2 = ma \Leftrightarrow -13s - 6s' = s'' \Leftrightarrow s'' + 6s' + 13s = 0.$$

Karakteristisella yhtälöllä $r^2 + 6r + 13 = 0$ on ratkaisut $r_1 = -3 + 2i$ ja $r_2 = -3 - 2i$. Yleinen ratkaisu on siis

$$s(t) = e^{-3t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t),$$

josta derivoimalla saadaan

$$s'(t) = e^{-3t} ((2C_2 - 3C_1) \cos 2t + (-2C_1 - 3C_2) \sin 2t).$$

Alkuehtoja vastaa siten lineaarinen yhtälöpari

$$\begin{cases} C_1 &= 1, \\ 2C_2 - 3C_1 &= -1. \end{cases}$$

Tämän yhtälöparin ainoaksi ratkaisuksi nähdään heti $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, joten vastaukseksi saadaan

$$s(t) = e^{-3t} (\cos 2t + \sin 2t) = \sqrt{2} e^{-3t} \sin \left(2t + \frac{\pi}{4} \right).$$

Tutkitaan lopuksi, miten löydetään yleisen menetelmämme edellyttämä yksityisratkaisu epähomogeeniselle DY:lle

$$y'' + ay' + by = f(x),$$

missä a ja b ovat reaalisia vakioita. Menetelmämme perustuu tuntemattomia kertoimia sisältävän yritteen käyttöön. Arvaamme ratkaisun muodon, ja sijoittamalla sen ratkaistavaan yhtälöön saamme lineaarisia yhtälöitä, joista yritteen tuntemattomat kertoimet voidaan määrätä. Vaikeutena on löytää sopiva yrite. Seuraava taulukko kattaa tavallisimmat tapaukset. Taulukossa kertoimet $k, a, a_0, \dots, a_n$ ovat tunnettuja vakioita (osa DY:tä), ja $A, A_0, \dots$ ovat tuntemattomia kertoimia.

- Jos $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ on astetta n oleva polynomi, käytetään samaa muotoa olevaa yritettä $y = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$.
- Jos $f(x) = a e^{kx}$, käytetään yritettä $y(x) = A e^{kx}$.
- Jos $f(x) = a_1 \cos kx + a_2 \sin kx$, niin käytetään yritettä $y(x) = A_1 \cos kx + A_2 \sin kx$.
- Jos $f(x)$ on muotoa 'polynomi kertaa trigonometrinen funktio' tai 'polynomi kertaa eksponenttifunktio', niin yrite on samaa muotoa (yleistäen kahta edellistä sääntöä, joissa polynomi oli vakio).

Näiden lisäksi tarvitaan seuraavat säännöt monimutkaisempia tilanteita varten:

- Jos $f(x)$ on summa termejä, jotka ovat edellisen listan muotoa, niin lineaarisuuden seurauksena yritteeseen otetaan mukaan kutakin termiä edellyttävien funktioiden summa.
- Jos edellisten sääntöjen mukainen yrite sisältää termin, joka on muotoa $A_n x^n g(x)$, missä $g(x)$ on vastaavan homogeenisen DY:n ratkaisu, on yritteeseen otettava mukaan termi $A_{n+1} x^{n+1} g(x)$.

Esimerkki 8.11. Etsitään jokin yksityisratkaisu DY:lle

$$y'' + 3y' + 2y = x^2 + 1.$$

Ratkaisu. Taulukkoyrite on muotoa $y = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$. Tällöin $y' = 2A_2 x + A_1$ ja $y'' = 2A_2$, joten

$$y'' + 3y' + 2y = 2A_2 x^2 + (6A_2 + 2A_1)x + (2A_2 + 3A_1 + 2A_0) = x^2 + 1,$$

josta merkitsemällä termien $1, x, x^2$ vastinkertoimet yhtä suuriksi saamme lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} 2A_2 & = & 1 \\ 6A_2 + 2A_1 & = & 0 \\ 2A_2 + 3A_1 + 2A_0 & = & 1. \end{cases}$$

Tästä 'ketjureaktiona' ratkeaa $A_2 = 1/2, A_1 = -3/2, A_0 = 9/4$. Eräs yksityisratkaisu on siis

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{9}{4}.$$

Esimerkki 8.12. Etsi DY:n

$$y'' + 3y' + 2y = \sin x$$

jokin yksityisratkaisu.

Ratkaisu. Taulukkoyrite on

$$y = A_1 \cos x + A_2 \sin x.$$

Tällöin $y' = A_2 \cos x - A_1 \sin x$ ja $y'' = -A_1 \cos x - A_2 \sin x$. Vaadimme siis funktioiden välisen yhtälön

$$\sin x = y'' + 3y' + 2y = (-A_1 + 3A_2 + 2A_1) \cos x + (-A_2 - 3A_1 + 2A_2) \sin x = (A_1 + 3A_2) \cos x + (-3A_1 + A_2) \sin x,$$

mikä toteutuu, kunhan A_1 ja A_2 ovat yhtälöparin

$$\begin{cases} A_1 + 3A_2 = 0 \\ -3A_1 + A_2 = 1 \end{cases}$$

ratkaisu. Tämän ainoa ratkaisu on $A_1 = -3/10$, $A_2 = 1/10$, joten etsityksi yksityisratkaisuksi käy

$$y = \frac{1}{10} (\sin x - 3 \cos x).$$

Esimerkki 8.13. Määää DY:n

$$y'' + 3y' + 2y = \sinh x$$

yleinen ratkaisu.

Ratkaisu. Merkitään lineaarioperaattoria $L(y) = y'' + 3y' + 2y$. Homogeenisen DY:n $L(y) = 0$ karakteristisella yhtälöllä $r^2 + 3r + 2 = 0$ on juuret $r_1 = -1$ ja $r_2 = -2$, joten sen yleinen ratkaisu on muotoa

$$y = y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Tällä kertaa yhtälön oikea puoli on $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$. Käsittelemme nämä kaksi termiä erikseen.

Haemme ensin yksityisratkaisun DY:lle $L(y) = \frac{1}{2}e^x$. Standardiyrite on $y = A_1 e^x$, jolloin $y'' = y' = y = A_1 e^x$, ja siis $L(y) = 6A_1 e^x = e^x/2$, kunhan $A_1 = 1/12$. Toinen termi $-e^{-x}/2$ on pulmallisempi siitä syystä, että standardiyrite $y = A_2 e^{-x}$ on homogeenisen yhtälön $L(y) = 0$ ratkaisu, eikä näin auta meitä yksityisratkaisun etsimisessä. Turvaudutaan jälkimmäisen lisäsäännön apuun, ja kokeillaan yritettävä $y = A_2 x e^{-x}$. Tällöin $y' = A_2(-x + 1)e^{-x}$, $y'' = A_2(x - 2)e^{-x}$ ja lopulta

$$L(A_2 x e^{-x}) = A_2 e^{-x}(x - 2 + 3(-x + 1) + 2x) = A_2 e^{-x}.$$

Siis valinta $A_2 = -1/2$ toimii, ja $L(-\frac{1}{2}x e^{-x}) = -\frac{1}{2}e^{-x}$. Yksityisratkaisuksi saadaan siis

$$y = \frac{1}{12} e^x - \frac{1}{2} x e^{-x},$$

ja epähomogeenisen DY:n $L(y) = \sinh x$ yleinen ratkaisu on siten

$$y = \frac{1}{12} e^x - \frac{1}{2} x e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Tarkastellaan seuraavassa esimerkissä resonanssia, jossa harmoniseen värähtelijään vaikuttaa vielä samalla taajuudella oleva pakkovoima.

Esimerkki 8.14. Lisätään aikaisemmin käsitellyn harmonisen liikkeen Esimerkkiin 8.9

$$-16s = F = ma = 4s''$$

pakkovoima $f(t) = \sin 2t$, jolloin DY saa muodon

$$4s'' + 16s = f(t).$$

Määritetään tämän DY:n yleinen ratkaisu.

Ratkaisu. Nyt $\sin 2t$ ja $\cos 2t$ ovat homogeenisen yhtälön ratkaisuja, joten tehdään yrite

$$s = A_1 t \cos 2t + A_2 t \sin 2t.$$

Tällöin $s' = (A_1 + 2A_2 t) \cos 2t + (A_2 - 2A_1 t) \sin 2t$, $s'' = (4A_2 - 4A_1 t) \cos 2t + (-4A_1 - 4A_2 t) \sin 2t$ ja siis

$$4s'' + 16s = 16A_2 \cos 2t - 16A_1 \sin 2t.$$

Täten $A_2 = 0$ ja $A_1 = -1/16$, ja eräs yksityisratkaisu on

$$s(t) = -\frac{t}{16} \cos 2t.$$

Yleinen ratkaisu on siis

$$s(t) = \left(C_1 - \frac{t}{16} \right) \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Resonanssivaikutus näkyy tässä ratkaisussa muun muassa siinä, että funktio $s(t)$ ei ole rajoitettu millään parametrien C_1 ja C_2 arvoilla. Tästä syystä mekaanisissa (ja myös muissa) rakenteissa resonanssia tulee välttää. Ennakoimattoman resonanssin vaikutuksista löytää internetistä runsaasti videomateriaalia hakusanoilla ‘Tacoma Narrows Bridge’.

Lisäsääntöjä on käytettävä kahdesti, jos taulukkoyrite kerrottuna x :llä on sekin homogeenisen DY:n ratkaisu.

Esimerkki 8.15. Mikä DY:n

$$y'' - 2y' + y = 3e^x + x + 1$$

ratkaisusta toteuttaa alkuarvoehdot $y(0) = y'(0) = 2$.

Ratkaisu. Nyt $L(y) = y'' - 2y' + y$. Karakteristisella yhtälöllä $r^2 - 2r + 1 = 0$ on kaksinkertainen juuri $r = 1$, joten homogeenisen yhtälön $L(y) = 0$ yleinen ratkaisu on

$$y = y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^x.$$

Oikean puolen funktiossa on polynomitermi $x + 1$ ja eksponenttifunktiotermi $3e^x$. Käsittelemme nämä erikseen. Etsitään ensin yksityisratkaisu yhtälölle $L(y) = x + 1$. Nyt taulukkoysrite on muotoa $y_p = A_1x + A_0$. Tällöin $y'_p = A_1$ ja $y''_p = 0$, joten

$$L(y_p) = -2A_1 + (A_1x + A_0) = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 &= 1 \\ A_0 - 2A_1 &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 &= 1 \\ A_0 &= 3 \end{cases},$$

joten eräs yksityisratkaisu DY:lle $L(y) = x + 1$ on $y_p(x) = x + 3$.

Seuraavaksi etsimme yksityisratkaisun $y = y_e(x)$ yhtälölle $L(y) = 3e^x$. Kaikki muotoa $(A_2 + A_3x)e^x$ olevat yrittäet ovat homogeenisen DY:n $L(y) = 0$ ratkaisuja, joten ne eivät toimi yrittteenä. Lisäsääntö kehottaa tällöin kertomaan yrittteen funktiolla x , joten kokeillaan yritettä $y_e(x) = A_2x^2e^x$. Derivoimalla kahdesti saadaan $y'_e(x) = A_2(x^2 + 2x)e^x$ ja $y''_e(x) = A_2(x^2 + 4x + 2)e^x$. Näistä saadaan sitten

$$L(y_e) = A_2e^x((x^2 + 4x + 2) - 2(x^2 + 2x) + x^2) = 2A_2e^x.$$

Yhtälö $L(y_e) = 3e^x$ toteutuu ($A_2 = 3/2$), kun $y_e = \frac{3}{2}x^2e^x$.

Koska $L(y_e + y_p) = L(y_e) + L(y_p) = 3e^x + x + 1$, olemme löytäneet alkuperäiselle DY:lle yksityisratkaisun $y_0(x) = \frac{3}{2}x^2e^x + x + 3$. Sen yleinen ratkaisu on siis

$$y(x) = (C_1 + C_2x + \frac{3}{2}x^2)e^x + x + 3.$$

Tällöin $y'(x) = (C_1 + C_2 + (C_2 + 3)x + \frac{3}{2}x^2)e^x + 1$, joten alkuarvoehdot vastaavat yhtälöparia

$$\begin{cases} C_1 + 3 &= 2 \\ C_1 + C_2 + 1 &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 &= -1, \\ C_2 &= 2. \end{cases}$$

Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis

$$y = \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x - 1\right)e^x + x + 3.$$