

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 1, 19.1.2018

Demoryhmäjako ilmoitetaan kurssin nettisivulla. Tarkista ennen ensimmäisiä demoja mihin demoryhmään kuulut.

Määritä seuraavat antiderivaatat:

1. $\int (\sin(4x) + \cos(3x) + (x-1)^2) dx.$

Vastaus:

$$\int (\sin(4x) + \cos(3x) + (x-1)^2) dx = -\frac{1}{4} \cos(4x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{3}(x-1)^3 + C.$$

2. $\int x^2(x^3+1)^2 dx.$

Vastaus:

$$\int x^2(x^3+1)^2 dx = \int (x^3+1)^3 \frac{d}{dx} \frac{1}{3} x^3 dx = \frac{1}{9}(x^3+1)^3 + C.$$

3. $\int \sin 2x \sin 3x dx.$ Ohje: Käytä trigonometrian kaavoja.

Vastaus:

$$\int \sin 2x \sin 3x dx = \int \frac{1}{2} (\cos x - \cos 5x) dx = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + C.$$

4. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$ Ohje: Suorita ensin jakolasku.

Vastaus:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = x - \arctan x + C.$$

5. $\int (\sin x)^2 \cos x dx.$

Vastaus:

$$\int (\sin x)^2 \cos x dx = \int (\sin x)^2 \frac{d}{dx} \sin x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

6. $\int \cot x dx.$ Älä käytä valmista kaavaa vaan selvitä miten sellainen seuraa esityksestä $\cot x = (\sin x)^{-1} \cos x.$

Vastaus:

$$\int \cot x dx = \int \frac{1}{\sin x} \frac{d}{dx} \sin x dx = \ln |\sin x| + C.$$

7. $\int x^2 \ln x dx.$

Vastaus:

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x dx &= \int \frac{d}{dx} \frac{1}{3} x^3 \cdot \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C. \end{aligned}$$

8. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$. Ohje: $\frac{1}{x \ln x} = (\ln x)^{-1} \frac{d}{dx} \ln x$.

Vastaus:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int (\ln x)^{-1} \frac{d}{dx} \ln x dx = \ln \ln x + C$$

9. $\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$.

Vastaus:

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int (\ln x)^{-2} \frac{d}{dx} \ln x dx = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

10. $\int x \arctan x dx$. Ohje: $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$.

Vastaus:

$$\begin{aligned} \int x \arctan x dx &= \int \frac{d}{dx} \frac{1}{2} x^2 \arctan x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C. \end{aligned}$$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Älä käytä valmiita kaavoja vaan etsi sopiva sijoitus.

Vastaus: Sijoittamalla $x = \sin t$ on $\frac{dx}{dt} = \cos t$ ja siis

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \int 1 dt = t + C = \arcsin x + C.$$

12. $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx$. Ohje: sijoitus $x = -\ln t$ voi olla käyttökelpoinen.

Vastaus: Sijoituksen mukaisesti on $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t}$ ja

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t^{-2}-1}} \left(-\frac{1}{t}\right) dt \\ &= - \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\arcsin t + C = -\arcsin e^{-x} + C. \end{aligned}$$

Vastaus voidaan esittää myös muodossa

$$\arctan \sqrt{e^{2x}-1} + C.$$

Edellämainitut esitykset ovat samat, mikä nähdään seuraavasti: Olkoon $x \geq 1$, jolloin $y = \arctan \sqrt{x^2-1}$ on määritelty ja $y \in [0, \frac{\pi}{2})$. Tällöin

$$\tan y = \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{\sin y}{\cos y} = \sqrt{x^2-1}.$$

Koska $y \in [0, \frac{\pi}{2})$, on $\sin y \geq 0$ ja siis $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$. Merkitsemällä $z = \cos y$ saadaan ylläoleva yhtälö muotoon

$$\frac{1-z^2}{z^2} = x^2-1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{x},$$

siis $\cos y = \frac{1}{x}$, josta $y = \arccos \frac{1}{x}$. Näin ollen

$$\arctan \sqrt{x^2-1} = \arccos \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{x}.$$