

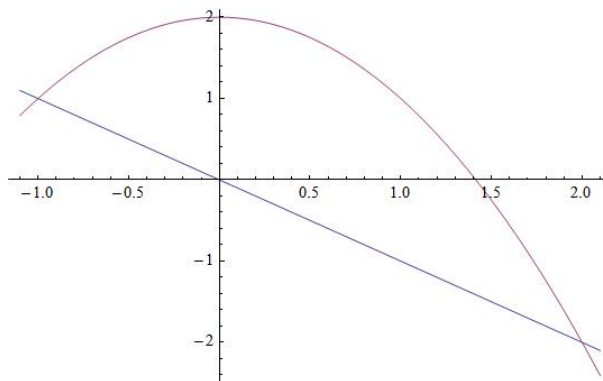
Analyyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 5, 16.2.2018

1. Määritä ala, jota rajoittavat suora $y = -x$ ja paraabeli $y = 2 - x^2$.

Vastaus: Käyrien leikkauspisteet saadaan yhtälöstä $-x = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 2\}$. Tällä välillä on $2 - x^2 \geq -x$, joten kysytty pinta-ala saadaan integraalina

$$\int_{-1}^2 (2 - x^2 - (-x)) dx = \int_{-1}^2 (2x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2) = \frac{9}{2}.$$



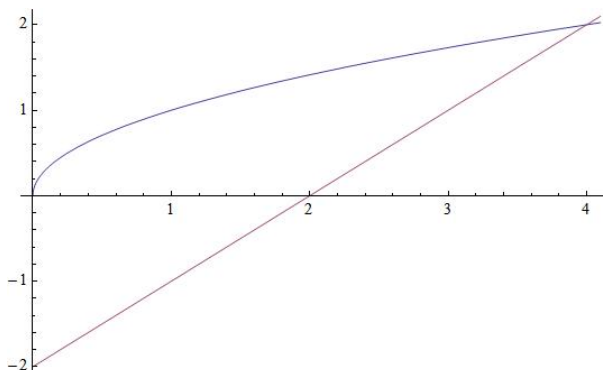
2. Määritä ala, jota rajoittavat käyrä $y = \sqrt{x}$, suora $y = x - 2$, sekä x -akseli. Ohje: Integrointi y :n suhteen on tässä tapauksessa yksinkertaisempaa.

Vastaus: Suoran ja käyrän leikkauspiste saadaan selville yhtälöstä $\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow x = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 4\}$. Näitä vain $x = 4$ on x -akselin yläpuolella molemmilla käyrillä. Tätä vastaa $y = 2$, joten pinta-ala saadaan integraalina

$$\int_0^2 (y + 2 - y^2) dy = \int_0^2 (\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3) = \frac{10}{3}.$$

Toisella tavalla pinta-ala voidaan laskea kahden integraalin summana:

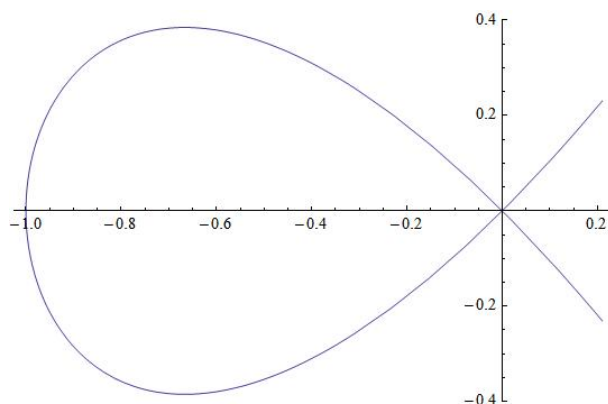
$$A = \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - (x - 2)) dx = \int_0^2 \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \int_2^4 (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 + 2x) = \frac{10}{3}.$$



3. Kurssin Analyysi I esimerkin 5.10 käyrä $(x, y) = (t^2 - 1, t^3 - t)$ (kts. <http://users.utu.fi/mikhirve/analyysi1617/AnalyysiI/AnalyysiI2013verkko.pdf>, s. 143–144) muodostaa origon vasemmalle puolelle jäävän silmukan. Laske tämän silmukan pinta-ala.

Vastaus: Mainitun esimerkin mukaisesti silmukka piirtyy kun $t \in [-1, 1]$ siten että origosta käyrälle piirretty vaihekulma suurenee. Näin ollen ala voidaan laskea kaavalla

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (xy' - yx') dt &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)(3t^2 - 1) - (t^3 - t)2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t^4 - 2t^2 + 1) dt = \int_0^1 (t^4 - 2t^2 + 1) dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t \right) dt = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$



Toisin: Välillä $[-1, 0]$ silmukkaa rajoittaa ylhäältä $y = t^3 - t$ ja alhaalta $-y$, joten pinta-ala saadaan integraalina

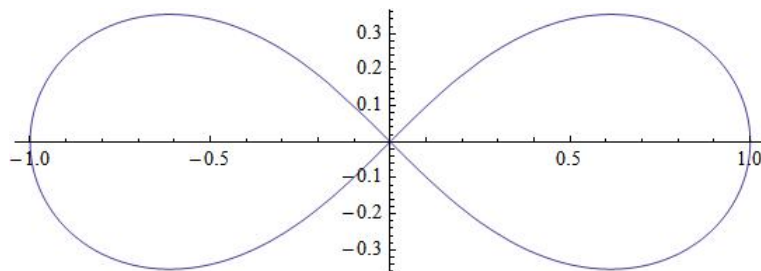
$$\int_{-1}^0 2y dx.$$

Nyt x saa arvon -1 kun $t = 0$ ja arvon 0 kun $t = -1$. Lisäksi $\frac{dx}{dt} = 2t$, joten pinta-ala saadaan seuraavasti:

$$\int_{-1}^0 2y dx = 2 \int_0^{-1} (t^3 - t) 2t dt = \frac{8}{15}.$$

4. Bernoullin lemniskaatta on käyrä, jolla on napakoordinaattiesitys $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ($a > 0$ on vakio). Hahmottele kuva (kun $a = 1$) ja laske lemniskaatan rajoittama ala. Tässä yhteydessä sovitaan että sellaisille θ :n arvoille, joille r ei ole reaalisenä määritelty, ei käyrä piirry näkyviin lainkaan.

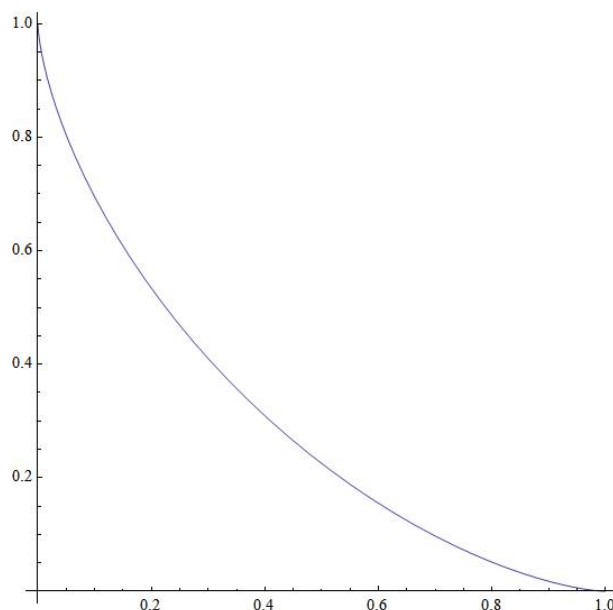
Vastaus: Kuvio piirtyy näkyviin sellaisilla kulman θ arvoilla, joilla $\cos 2\theta \geq 0$. Sellaisiksi voidaan valita väli $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ sekä $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.



Symmetrian vuoksi voidaan lemniskaatan rajoittama pinta-ala laskea oikeanpuoleisen osan perustella:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = 2a^2 \left/ \frac{1}{2} \sin 2\theta \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

5. Parametriesitys $\{(\cos^3 t, \sin^3 t) \mid t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$ määrittelee käyrän tason I neljänneksessä. Määritä koordinaattiakselien ja käyrän rajoittama pinta-ala.



Vastaus: Pinta-ala saadaan kaavalla

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (xy' - yx') dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 t \cdot 3 \sin^2 t \cdot \cos t - \sin^3 t \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin^2(2t) dt = \frac{3}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 4t) dt \\ &= \frac{3}{16} \left/ \left(t - \frac{1}{4} \sin(4t) \right) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{32} \end{aligned}$$

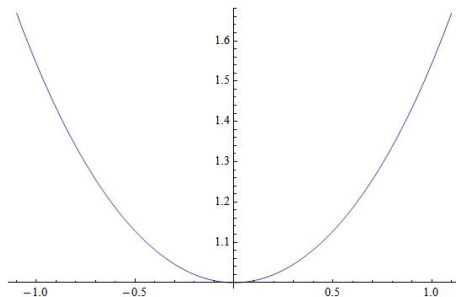
Toisin: Pinta-ala voidaan laskea myös integraalina

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t) dt \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t (1 - \sin^2 t) dt \\ &= 3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt \right) \\ &= 3 \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{32}. \end{aligned}$$

6. Määritä käyrän $y = \cosh x$ pituus välillä $-1 \leq x \leq 1$.

Vastaus:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\cosh^2 x} dx \\ &= \int_{-1}^1 \cosh x dx = 2 \int_0^1 \cosh x dx = 2 \left[\sinh x \right]_0^1 = 2 \sinh 1 = e^1 - e^{-1} \end{aligned}$$



7. Olkoon $M > 1$. Laske sen kappaleen tilavuus, joka syntyy kun välillä $[1, M]$ määritelty käyrä $y = \frac{1}{x}$ pyörähtää x -akselin ympäri. Miten tilavuus käyttäytyy kun $M \rightarrow \infty$?

Vastaus:

$$V = \pi \int_1^M \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^M = \pi \left(1 - \frac{1}{M}\right) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \pi.$$

8. Kirjoita integraalilauseke edellisen tehtävän kappaleen vaipan alalle. Miten vaipan ala käyttäytyy kun $M \rightarrow \infty$? Ohje: Hyödynnä edellisen demokerran arviota.

Vastaus:

$$A = 2\pi \int_1^M y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2\pi \int_1^M \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^M \frac{1}{x} dx = 2\pi \ln M.$$

Näin ollen $A \rightarrow \infty$ kun $M \rightarrow \infty$.