

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 6, 23.2.2018

1. Esitä perustelu integraalin

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx$$

suppenemiselle ja laske integraalin arvo.

Vastaus: Kun $x \geq 1$, on

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 6} \leq \frac{1}{x^2}$$

ja näin ollen integrandilla on majorantti, jonka integraali suppenee. Integraalin arvon laskemiseksi etsitään osamurtohajotelma

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x + 3},$$

josta voidaan laskea integraali

$$\int_1^M \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx = \int_1^M \ln \frac{x+2}{x+3} = \ln \frac{M+2}{M+3} - \ln \frac{3}{4} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \ln \frac{4}{3}.$$

2. Suppeneeko integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx ?$$

Vastaus: Integraalissa esiintyy epäoleellisuus sekä ala- että ylärajalla. Integraalissa

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx \tag{1}$$

voidaan arvioida integrandia seuraavasti:

$$\frac{1}{\sqrt{x} + x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Koska $\frac{1}{2} < 1$, integraali $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ suppenee ja näin ollen myös (1) suppenee.

Toisaalta integraalissa

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx \tag{2}$$

voidaan integrandia arvioida seuraavasti:

$$\frac{1}{\sqrt{x} + x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Koska $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ suppenee, myös (2) suppenee. Näin ollen tehtävän integraali kokonaisuudessaan suppenee.

3. Suppeneeko integraali

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx ?$$

Jos suppenee, laske sen arvo.

Vastaus:

$$\int_2^M \frac{1}{x \ln x} dx = \int_2^M \ln \ln x = \ln \ln M - \ln \ln 2 \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \infty,$$

joten integraali hajaantuu.

4. Suppeneeko integraali

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx ?$$

Jos suppenee, laske sen arvo.

Vastaus:

$$\int_2^M \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \left/ -\frac{1}{\ln x} \right|_2^M = -\frac{1}{\ln M} + \frac{1}{\ln 2} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln 2}.$$

5. Suppeneeko integraali

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx ?$$

Vastaus: Integraalissa esiintyy epäoleellisuus kohdassa $x = 0$, joten tarkastellaan osia $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx$ ja $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$. Näistä jälkimmäinen voidaan huomata välittömästi hajaantuvaksi, sillä eksponentti $2 > 1$. Näin ollen integraali hajaantuu.

6. Millä s :n arvoilla integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s \sqrt{(1-x)^{4s-1}}} dx$$

suppenee?

Vastaus: Jos $s < 0$, ei integraalissa ole lainkaan epäoleellisuutta, joten jatkossa voidaan olettaa, että $s > 0$. Tällöin integraalissa esiintyy epäoleellisuus sekä alaa- että ylärajalla, joten jaetaan tarkastelu kahteen osaan. Ensimmäisen osan

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^s \sqrt{(1-x)^{4s-1}}} dx \tag{3}$$

integrandia voidaan välillä $[0, \frac{1}{2}]$ arvioida seuraavasti (jos $4s - 1 > 0$):

$$\frac{1}{x^s} \leq \frac{1}{x^s \sqrt{(1-x)^{4s-1}}} \leq \frac{1}{x^s} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^{4s-1}}}}_{\text{vakio}}$$

Jos $4s - 1 < 0$, saadaan samankaltainen arvio, jossa vakio esiintyy epäyhtälöketjun vasemmalla puolella. Tapaus $4s - 1 = 0$ on yksinkertainen. Joka tapauksessa nähdään, että integraali (3) suppenee tarkalleen silloin kun $s < 1$.

Toisessa osassa

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^s \sqrt{(1-x)^{4s-1}}} dx \tag{4}$$

integrandia voidaan puolestaan arvioida seuraavasti:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x)^{4s-1}}} \leq \frac{1}{x^s \sqrt{(1-x)^{4s-1}}} \leq \frac{1}{(\frac{1}{2})^s \sqrt{(1-x)^{4s-1}}},$$

joten (4) suppenee tarkalleen silloin kun

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x)^{4s-1}}} dx$$

suppenee. Koska

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x)^{4s-1}}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{4s-1}{2}}},$$

näin käy kun $\frac{4s-1}{2} < 1 \Leftrightarrow s < \frac{3}{4}$.

Kokonaisuudessaan integraali siis suppenee, kun $s < \frac{3}{4}$.

7. Esitä perustelu integraalin

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx$$

suppenemiselle.

Ohje: Alarajalla voi käyttää kurssin Analyysi I (2017) demojen 11 tehtävässä 2 esiintynyttä arviota. Etsi myös sopiva majorantti ylärajalle.

Vastaus: Integraalissa on epäoleellisuus sekä ylä- että alarajalla. Ylärajaa varten voidaan arvioida esimerkiksi seuraavasti: Koska eksponenttifunktio kasvaa polynomifunktioita voimakkaammin, on $e^x > x^4 + 1$, kunhan x on riittävän suuri. Näillä x :n arvoilla siis

$$\frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} < \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2},$$

joten ylärajan integraali suppenee majoranttiperiaatteen nojalla.

Alarajaa varten voidaan käyttää kurssin Analyysi I arviota $\ln(1+x) \leq x$, mikä on ekvivalentti epäyhtälön $x \leq e^x - 1$ kanssa. Näin ollen

$$\frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

mistä seuraa että myös integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx$$

suppenee.

8. Laske integraalin

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx$$

arvo.

Ohje: Tee sopiva sijoitus ja hyödynnä luentomonisteen esimerkkiä 3.37.

Vastaus: Sijoitetaan $x = \ln(t^2 + 1) \Leftrightarrow t = \sqrt{e^x - 1}$, jolloin $\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{t^2 + 1}$ ja rajat ovat seuraavat: kun $x = 0$, on $t = 0$ ja kun $x \rightarrow \infty$, myös $t \rightarrow \infty$. Näin ollen

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt = \pi.$$

Viimeisin yhtäsuuruus perustuu luentomonisteen esimerkkiin.