

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 9, 23.3.2018

1. Selvitä kaikki x :n arvot joille sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2n+3}$$

suppenee.

Vastaus: Osamäärätarkastimella voidaan tavoittaa lähes koko suppenemisalue:

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^{n+1}}{2(n+1)+3} : (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2n+3} \right| = \frac{2n+3}{2n+5} |x-2| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x-2|,$$

joten sarja suppenee kun $|x-2| < 1$ (kun $1 < x < 3$) ja hajaantuu kun $|x-2| > 1$ (kun $x < 1$ tai $x > 3$). Täten selvitettäväksi jää ainoastaan arvot $x = 3$ ja $x = 1$.

Arvolla $x = 3$ sarja saa muodon

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3},$$

mikä suppenee Leibnizin lauseen perusteella. Arvolla $x = 1$ taas saadaan sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{2n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1},$$

joka hajaantuu.

2. Osoita, että sarja

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ei suppene tasaisesti joukossa $[0, \infty)$. Ohje: Katkaise sarja jostain indeksistä M alkaen, ja osoita, että sarjan katkaistu loppuosaa tulee suureksi, jos x valitaan sopivalla tavalla.

Vastaus: Valitaan tasaisen suppenemisen kriteerissä esim. $\varepsilon = 1$ ja tarkastellaan katkaistun sarjan loppuosaa

$$\sum_{n=M}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^M}{M!}.$$

Jos nyt valitaan $x \geq M$, saadaan loppuosalle arvio

$$\sum_{n=M}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^M}{M!} \geq \frac{M^M}{M!} \geq \frac{M!}{M!} = 1.$$

Näin ollen sarjan loppuosaa ei voida saada pienemmäksi kuin $\varepsilon = 1$ x :n arvosta riippumatta.

3. Olkoon $S(x)$ demokerran 8 tehtävissä 6 ja 7 esiintyvä sarja. Mitä voit sanoa sarjan $S(x)$ derivoinnista termeittäin?

Vastaus: Muodollisesti derivoimalla saadaan

$$S'(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n 9^n \pi \sin(9^n \pi x) = -\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{27}{4}\right)^n \sin(9^n \pi x).$$

Voimakkaasti kasvavan kertoimen $\left(\frac{27}{4}\right)^n$ vuoksi sarjan suppeneminen näyttäisi olevan hyvin kyseenalaista joitakin harvoja pisteitä lukuunottamatta; tällaisia ovat esimerkiksi $x = 0$ tai $x = \frac{1}{9^k}$, jolloin sarjassa on vain äärellinen määrä nollasta poikkeavia termejä.

Samoin kuin edellisen demokerran tehtävässä 7 havaittiin, sarja hajaantuu ainakin arvolla $x = \frac{1}{2}$. Sarjan hajaantumista yleisesti (lukuunottamatta yllämainittuja poikkeuksia) on kuitenkin vaikea osoittaa kurssin Analyysi II tiedoilla, sillä ei ole selvää miten lähelle nollaa lauseke $\sin(9^n \pi x)$ voi käydä. Erityisesti ei ole selvää voiko kyseinen sinitermi kumota termin $\left(\frac{27}{4}\right)^n$ aiheuttaman eksponentiaalisen kasvun yllämainittuja x :n arvoja lukuunottamatta.

Yhteenvedo: Kurssin tiedoilla ei voida osoittaa, että derivoimalla saatu sarja suppenisi tasaisesti (tai ylipäänsä suppenisi) jollain välillä. Eksponentiaalisesti kasvavan termin vuoksi näyttää pikemminkin päinvastaiselta. Ei siis pystytä osoittamaan, että sarja voitaisiin derivoida termeittäin jollakin reaalilukuvälillä.

Huomautus: Karl Weierstrass osoitti vuonna 1872 että sarjan $S(x)$ määrittelemä kaikkialla jatkuva funktio ei ole derivoituva missään reaaliakselin pisteessä. Voidaan siis huomata, että vaikka muodollisesti saatu sarja $S'(x)$ suppenee joissakin harvoissa pisteissä (kuten $x = 0$ ja $x = \frac{1}{9^k}$), ei näin saatu suppeneva sarja kuitenkaan edusta funktion $S(x)$ derivaattaa.

4. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n}{3^n}$$

summa. Ohje: Aloita derivoimalla funktion $\frac{1}{1-x}$ geometrinen sarja termeittäin. Sijoita lopuksi sopiva arvo x :lle.

Vastaus: Derivoimalla termeittäin geometrinen sarja

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

saadaan

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1},$$

josta edelleen

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n. \quad (1)$$

Derivoimalla tämä termeittäin saadaan

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

ja kertomalla

$$\frac{(1+x)x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n. \quad (2)$$

Sijoitus $x = \frac{1}{3}$ yhtälöön (1) tuottaa

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{4}$$

ja yhtälöön (2) puolestaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}.$$

Laskemalla nämä yhteen saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n}{3^n} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = 3 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4}.$$

5. Määritä sarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)5^n}$$

summa. Ohje: Aloita integroimalla funktion $\frac{1}{1-x}$ geometrinen sarja termeittäin yli sopivan välin.

Vastaus: Lasketaan puolittain integraali ($|x| < 1$)

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt,$$

jolloin saadaan

$$\int_0^x -\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{1}{n+1} t^{n+1},$$

toisin sanoen

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Integroidaan edelleen näin saatu sarja ($|x| < 1$):

$$\begin{aligned} \int_0^x -\ln(1-t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{1}{n} t^n dt \\ \Leftrightarrow \int_0^x (1-t) \ln(1-t) + t &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^x \frac{1}{n+1} t^{n+1} \\ \Leftrightarrow (1-x) \ln(1-x) + x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1} \\ \Leftrightarrow \frac{(1-x) \ln(1-x)}{x} + 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n. \end{aligned}$$

Sijoittamalla $x = -\frac{1}{5}$ viimeisimpään yhtälöön saadaan

$$-6 \ln \frac{6}{5} + 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{-1}{5}\right)^n.$$

6. Etsi funktiolle

$$\frac{1}{1-x}$$

potenssisarja pisteen $x = \frac{1}{2}$ ympäristössä. Mikä on sarjan suppenemissäde?

Ohje: $x = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

Vastaus:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}} = \frac{2}{1-2(x-\frac{1}{2})} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(2(x-\frac{1}{2})\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} \left(x-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Sarja suppenee, kun $|2(x-\frac{1}{2})| < 1$, ts. $|x-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$, jolloin siis suppenemissäde on $\frac{1}{2}$.

7. Etsi funktiolle

$$A(x) = \frac{5x}{6x^2 - x - 1}$$

Potenssisarja pisteen $x = 0$ ympäristössä. Mikä on sarjan suppenemissäde? Ohje: Etsi ensin osamurtohajotelma ja käytä sitten geometrisia sarjoja.

Vastaus: Nimittäjän nollakohdat ovat $\frac{1}{2}$ ja $-\frac{1}{3}$, joten nimittäjä jakautuu tekijöihin

$$6x^2 - x - 1 = 6(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{3}) = (2x - 1)(3x + 1).$$

Osamurtohajotelma on siis muotoa

$$\frac{5x}{6x^2 - x - 1} = \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{3x + 1},$$

josta kertoimiksi A ja B saadaan $A = -1$ ja $B = 1$. Näin ollen

$$\frac{5x}{6x^2 - x - 1} = \frac{1}{1 + 3x} - \frac{1}{1 - 2x}.$$

Kummallekin osamurtohajotelman termille saadaan geometrinen sarja, joista ensimmäinen suppenee kun $|-3x| < 1$ ja jälkimmäinen kun $|2x| < 1$. Näin ollen yhteinen suppenemissäde on $\frac{1}{3}$ ja sarjaesitys on

$$\frac{5x}{6x^2 - x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} ((-3)^n - 2^n) x^n.$$