

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 11, 13.4.2018

Huomautus: Demotehtävissä voidaan viitata luentomonisteen lisäksi luentoruutuihin 21 ja 22.

1. Arvioi kuinka monta sarjan

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

termiä tarvitaan, että $\ln 2$ voidaan laskea tarkkuudella 10^{-9} .

2. Etsi funktiolle $-\ln(1-x)$ Maclaurinin sarja ja arvioi montako tämän sarjan termiä tarvitaan jotta $\ln 2$ voidaan laskea tarkkuudella 10^{-9} .
3. Etsi funktiolle $f(x) = \sinh x$ Maclaurinin sarja ja selvitä sen suppenemissäde.
4. Selvitä onko funktiolla

$$f(x) = \cos x + \sin \frac{x^2}{2} + \sqrt{1 - \frac{x^4}{12}}$$

origossa lokaali ääriarvo.

5. Etsi funktiolle

$$\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma_0(t) dt$$

polynomiesitys väleillä $[0, 1]$, $[1, 2]$ ja $[2, 3]$. Laske lisäksi $\int_0^1 \sigma_1(x) dx$.

6. Osoita Euler-Maclaurinin summakaavan avulla että

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

missä γ on vakio. Päättelä tästä jo ennestään tuttu johtopäätös jonka mukaan harmoninen sarja hajaantuu.

7. Riemannin ζ -funktio määritellään sarjana

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Tunnetusti tämä sarja suppenee, kun $s > 1$. Käytä Euler-Maclaurinin summa-kaavaa osasummaan

$$\sum_{n=1}^M \frac{1}{n^s}$$

ja etsi tuloksen avulla ζ -funktion määritelmä välille $(0, 1)$.