

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 12, 13.4.2018

Etsi seuraavien differentiaaliyhtälöiden kaikki ratkaisut:

1. $y'' = \sin x + 2x - 1$.

Vastaus: Kertaalleen integroimalla saadaan

$$y' = -\cos x + x^2 - x + C_1,$$

ja toinen integrointi tuottaa vastauksen

$$y = -\sin x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

2. $y'' = xe^{-x}$.

Vastaus: Ensimmäinen integrointi antaa

$$y' = -(x+1)e^{-x} + C_1$$

ja toinen

$$y = (x+2)e^{-x} + C_1x + C_2.$$

3. $y' = y^2x^3$.

Vastaus: DY on separoituva ja ratkaisu saadaan seuraavasti:

$$\frac{dy}{dx} = y^2x^3 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} dy = x^3 dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{4}x^4 + C,$$

josta $y = -\frac{1}{\frac{1}{4}x^4 + C}$. Jos kuitenkin $y = 0$ on vakio, ei jakaminen onnistu mutta voidaan todeta että $y = 0$ on myös ratkaisu

4. $y' = xe^{-y}$.

Vastaus: DY on separoituva ja ratkaisu saadaan seuraavasti:

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-y} \Leftrightarrow e^y dy = x dx \Leftrightarrow \int e^y dy = \int x dx \Leftrightarrow e^y = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

josta $y = \ln(\frac{1}{2}x^2 + C)$.

5. $y' = (x+1)(y+1)$

Vastaus:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x+1)(y+1) \Leftrightarrow \frac{1}{y+1} dy = (x+1) dx \\ &\Leftrightarrow \int \frac{1}{y+1} dy = \int (x+1) dx + C \Leftrightarrow \ln|y+1| = \frac{1}{2}x^2 + x + C. \end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$|y+1| = e^{\frac{1}{2}x^2 + x + C},$$

joten mikäli $y > -1$, on

$$y = -1 + e^{\frac{1}{2}x^2 + x + C}.$$

Jos taas $y < -1$, on

$$y = -1 - e^{\frac{1}{2}x^2 + x + C}$$

Jos $y = -1$ on vakio, ei jakaminen alussa onnistu mutta voidaan todeta että $y = -1$ on kuitenkin ratkaisu.

6. $y' = y^2 + 1$

Vastaus:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2 + 1} dy = dx \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \int dx + C \Leftrightarrow \arctan y = x + C.$$

7. $y' - \frac{1}{x}y = 1$

Vastaus: Vasen puoli ei ole määritelty, jos $x = 0$, ja oletetaan aluksi että $x > 0$. Ratkaistaan ensin homogeeninen yhtälö

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{x}y &= 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln |y| = \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \ln |y| &= \ln x + C_0 \Leftrightarrow |y| = e^{C_0}x \Leftrightarrow y = Cx, \end{aligned}$$

Missä $C = \pm e^{C_0}$ (kaksi eri ratkaisua). Lisäksi huomataan, että vakioratkaisu $y = 0$ voidaan myös esittää tässä muodossa kun valitaan $C = 0$.

Tämän jälkeen alkuperäisen differentiaaliyhtälön ratkaisut saadaan vakion variaionnilla: $y = C(x)x$, josta $y' = C'(x)x + C(x)$, joka sijoittamalla saadaan

$$C'(x)x - C(x) + \frac{1}{x}C(x)x = 1 \Leftrightarrow C'(x)x = 1 \Leftrightarrow C'(x) = \frac{1}{x}.$$

Tästä $C(x) = \ln x + C$ ja edelleen $y = x \ln x + Cx$.

Tapaus $x < 0$ käsitellään samoin, Tällöin homogeenisen yhtälön ratkaisu on sama kuin edellä, $C(x) = \ln |x| + C$ ja tästä $y = x \ln |x| + Cx$. Ratkaisut voidaan yhdistää viimeisimpään muotoon.

8. $y' + 2y = 1 + e^{3x}$.

Vastaus: Homogeenisen yhtälön $y' + 2y = 0$ ratkaisut saadaan yritteellä $y = e^{\lambda t}$, josta saadaan algebrallinen yhtälö $\lambda + 2 = 0$. Täten homogeenisen yhtälön kaikki ratkaisut ovat muotoa $y = Ce^{-2x}$.

Yksittäisratkaisu voidaan löytää vakion variaionnilla: Olkoon $y = C(x)e^{-2x}$, joka alkuperäiseen yhtälöön sijoittamalla tuottaa

$$C'(x)e^{-2x} = 1 + e^{3x} \Rightarrow C'(x) = e^{2x} + e^{5x},$$

josta

$$C(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{5}e^{5x} + C,$$

ja näin ollen

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}e^{3x} + Ce^{-2x}.$$

9. $y'' - 6y' + 9y = 1$.

Vastaus: Homogeenisen yhtälön ratkaisut saadaan karakteristisen yhtälön $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0$ avulla: yleinen homogeenisen yhtälön ratkaisu on muotoa

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x},$$

ja yksittäisratkaisu saadaan yritteellä $y = A$ (vakio), joka yhtälöön sijoitettuna antaa $9A = 1$, siis $A = \frac{1}{9}$. Näin ollen yhtälön yleinen ratkaisu on muotoa

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{9}.$$