

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Demonstraatio 13, 27.4.2018

1. Etsi differentiaaliyhtälölle

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + 9x^2 - 3x + 5$$

jokin yksittäinen ratkaisu.

Vastaus: Etsitään ensin differentiaaliyhtälön

$$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 3x + 5$$

jokin yksittäinen ratkaisu. Tämä voidaan löytää yrittellä $y = Ax^2 + Bx + C$, jolloin $y' = 2Ax + B$ ja $y'' = 2A$. Sijoittamalla nämä differentiaaliyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} 2A - 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx + C) &= 9x^2 - 3x + 5 \\ \Leftrightarrow 9Ax^2 + (9B - 12A)x + 2A - 6B + 9C &= 9x^2 - 3x + 5, \end{aligned}$$

josta $9A = 1$, $9B - 12A = -3$ ja $2A - 6B + 9C = 5$. Näistä yhtälöistä ratkeaa $A = 1$, $B = 1$ ja $C = 1$.

Etsitään seuraavaksi differentiaaliyhtälön

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$$

jokin ratkaisu. Yritteestä $y = Ae^{3x}$ kuitenkin huomataan, että se on vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisu. Samoin on yrittteen $y = Axe^{3x}$ laita, joten koetetaan yrittää $y = Ax^2e^{3x}$. Tästä saadaan $y' = 2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x} = A(2x + 3x^2)e^{3x}$ ja edelleen $y'' = A(2 + 6x)e^{3x} + 3A(2x + 3x^2)e^{3x} = A(9x^2 + 12x + 2)e^{3x}$.

Sijoittamalla nämä differentiaaliyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} A(9x^2 + 12x + 2)e^{3x} - 6A(2x + 3x^2)e^{3x} + 9Ax^2e^{3x} &= e^{3x} \\ \Leftrightarrow 2Ae^{3x} &= e^{3x}, \end{aligned}$$

josta saadaan $A = \frac{1}{2}$. Differentiaaliyhtälön lineaarisuuden vuoksi kysytty yksittäinen ratkaisu saadaan laskemalla saadut yksittäisratkaisut yhteen, siis

$$y_0 = \frac{1}{2}x^2e^{3x} + x^2 + x + 1.$$

2. Etsi differentiaaliyhtälön

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + 9x^2 - 3x + 5$$

kaikki ratkaisut ja sellainen ratkaisu, että $y(0) = y'(0) = 2$.

Vastaus: Etsitään homogeenisen DY:n $y'' - 6y' + 9y = 0$ kaikki ratkaisut ja lisätään niihin tehtävässä 1 saatu yksittäinen ratkaisu. Homogeenisen DY:n ratkaisut saadaan yrittellä $y = e^{\lambda x}$, josta saadaan karakteristinen yhtälö

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0.$$

Näin ollen karakteristisella yhtälöllä on kaksinkertainen juuri $\lambda = 3$ ja täten homogeenisen DY:n kaikki ratkaisut ovat

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}.$$

DY:n kaikki ratkaisut ovat siis

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{2} x^2 e^{3x} + x^2 + x + 1.$$

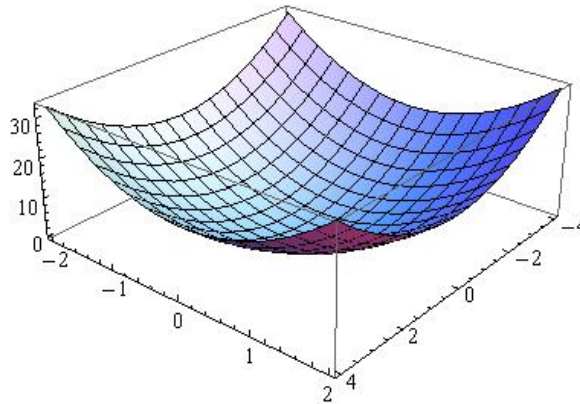
Tästä nähdään, että

$$y' = 3C_1 e^{3x} + C_2(1 + 3x)e^{3x} + (x + \frac{3}{2}x^2)e^{3x} + 2x + 1.$$

Näin ollen $2 = y(0) = C_1 + 1$ ja $2 = y'(0) = 3C_1 + C_2 + 1$, josta saadaan $C_1 = 1$ ja $C_2 = -2$.

3. Yhtälö $z = 1 + x^2 + 4y^2$ määrittelee pinnan avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Hahmottele pinta koordinaatistoon ja määritä pinnalle tangenttitason yhtälö pisteessä $(2, -1, 9)$.

Vastaus:



Tapa 1:

Tangenttitaso saadaan tarkastelemalla funktion muutosta pisteen $(2, -1)$ lähistöllä:

$$\begin{aligned} f((2, -1) + (h_1, h_2)) - f(2, -1) &= 1 + (2 + h_1)^2 + 4(-1 + h_2)^2 - 9 \\ &= 1 + 4 + 4h_1 + h_1^2 + 4 - 8h_2 + 4h_2^2 - 9 = 4h_1 - 8h_2 + h_1^2 + 4h_2^2, \end{aligned}$$

ja leikkaamalla tästä korkeamman asteen termit pois saadaan tangenttitaso

$$z(2 + h_1, -1 + h_2) - 9 = 4h_1 - 8h_2,$$

josta merkitsemällä $x = 2 + h_1$ ja $y = -1 + h_2$ saadaan muoto

$$z = z(x, y) = 9 + 4(x - 2) - 8(y + 1) = -7 + 4x - 8y.$$

Tapa 2:

Käyttämällä luentomonisteen kaavaa saadaan tangenttitason yhtälöksi

$$z - 9 = \frac{\partial z}{\partial x}(2, -1) \cdot (x - 2) + \frac{\partial z}{\partial y}(2, -1) \cdot (y + 1).$$

Laskemalla osittaisderivaatat ja sijoittamalla lukuarvot tästä saadaan

$$z - 9 = 4(x - 2) - 8(y + 1) \Leftrightarrow z = -7 + 4x - 8y$$

4. Etsi funktion

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y$$

lokaalit ääriarvokohdat ja satulapistet.

Vastaus: Mahdolliset ääriarvokohdat löytyvät pisteistä, joissa funktion f gradientti on nollavektori.

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 2xy, x^2 - 2y - 4),$$

josta mahdolliset ääriarvokohdat saadaan yhtälöparin

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy = 0 \\ x^2 - 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

ratkaisuista. Jos $x = 0$, ylempi yhtälö toteutuu kaikilla y :n arvoilla mutta tällöin alemman yhtälön mukaan $y = -2$. Jos $x \neq 0$, saadaan ylemmästä yhtälöstä jakamalla $3x + 2y = 0$, josta $y = -\frac{3}{2}x$. Sijoittamalla tämä alempaan yhtälöön saadaan $x^2 + 3x - 4 = 0$, jonka ratkaisut ovat $x = -4$ ja $x = 1$. Näistä saadaan gradientin nollakohdat $(0, -2)$, $(-4, 6)$ ja $(1, -\frac{3}{2})$.

Funktion f toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

Lauseen 6.39 merkintöjen mukaisesti pisteessä $(0, -2)$ on $A = -4$, $B = 0$, $C = -2$ ja siis $D = AC - B^2 = 8 > 0$, mikä yhdessä ehdon $A < 0$ kanssa merkitsee sitä, että $(0, -2)$ on funktion f lokaali maksimikohta.

Pisteessä $(-4, 6)$ taas $A = -12$, $B = -8$, $C = -2$, ja siis $D = AC - B^2 = -40 < 0$. Tällöin siis kyseinen piste on satulapiste.

Pisteessä $(1, -\frac{3}{2})$ edelleen on $A = 3$, $B = 2$ ja $C = -2$. Tällöin $D = AC - B^2 = -10 < 0$, joten kyseessä funktion f satulapiste.

5. Oletetaan, että $x, y, z > 0$. Arvioi usean muuttujan differentiaalilaskentaa käyttämällä kuinka paljon funktion $f(x, y, z) = x^2z + 3xy^2 - zy^2 - 4z^3$ arvo muuttuu, kun x kasvaa 2%, y vähenee 3% ja z kasvaa 1%

Vastaus: Arvoidaan funktion f muutosta kokonaisdifferentiaalin avulla. Kun dx , dy ja dz ovat pieniä, on muutos likimain

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= (2xz + 3y^2) dx + (6xy - 2zy) dy + (x^2 - y^2 - 12z^2) dz. \end{aligned}$$

Muutokset ovat $dx = \frac{2}{100}x$, $dy = -\frac{3}{100}y$ ja $dz = \frac{1}{100}z$, joten arvioksi saadaan

$$\frac{-12xy^2 + 5x^2z + 5y^2z - 12z^3}{100}$$

6. Laske integraali

$$\int_T xy \, dA,$$

missä T on kolmio, jonka kärkipisteet ovat $(0, 0)$, $(1, 0)$ ja $(0, 1)$.

Vastaus: Pisteitä $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ yhdistää jana $y = 1 - x$, joten kyseinen integraali voidaan laskea seuraavasti:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} xy \, dy \, dx &= \int_{x=0}^1 \left/ \int_0^{1-x} \frac{1}{2} xy^2 \, dy \right. dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x(1-x)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) \, dx = \frac{1}{2} \left/ \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right) \right. = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

7. Laske integraali

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=x}^1 e^{-y^2} \, dy \, dx.$$

Vastaus: Sisemmän integraalin määrittäminen Newtonin-Leibnizin kaavan perusteella on hankalaa, koska integrandille ei löydy antiderivaattaa alkeisfunktioiden avulla. Lasketaan integraali siksi toisessa järjestyksessä. Tätä varten voidaan ensiksi todeta, että integrointialue on kolmio, jota rajoittavat pisteet $(0, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1, 1)$. Jana pisteestä $(0, 0)$ pisteeseen $(1, 1)$ on muotoa $y = x$, joten integraali toisessa järjestyksessä laskettuna saa muodon

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^y e^{-y^2} \, dx \, dy = \int_{y=0}^1 \left/ \int_0^y e^{-y^2} \, dx \right. dy = \int_{y=0}^1 y e^{-y^2} \, dy = \left/ \int_0^1 -\frac{1}{2} e^{-y^2} \right. = \frac{e-1}{2e}.$$