

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Määritelmä

Jos $F'(x) = f(x)$, sanotaan, että $F(x)$ on funktion $f(x)$ antiderivaatta (kantafunktio, primitiivifunktio, määräämätön integraali)

Kertausta: Antiderivaatta

Määritelmä

Jos $F'(x) = f(x)$, sanotaan, että $F(x)$ on funktion $f(x)$ antiderivaatta (kantafunktio, primitiivifunktio, määräämätön integraali)

Määritelmä

Funktion $f(x)$ antiderivaatasta käytetään merkintää

$$\int f(x) dx$$

tai

$$\int f,$$

funktiota f kutsutaan integrandiksi ja tätä merkintää kutsutaan *määräämättömäksi integraaliksi*.

Lause 1.2.

Jos F on funktion f jokin antiderivaatta välillä I , niin kaikki antiderivaatat ovat muotoa $F + C$, missä C on vakio.

Lause 1.2.

Jos F on funktion f jokin antiderivaatta välillä I , niin kaikki antiderivaatat ovat muotoa $F + C$, missä C on vakio.

Huomautus

Jokainen derivointisääntö $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ tuottaa säännön antiderivaatan löytämiseksi:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Huomautus

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

ja

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Osittaisintegrointi

Koska

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Osittaisintegrointi

Koska

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

on

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Sijoitusmenetelmä

Jos

$$F(x) = \int f(x) dx$$

on vaikea määrittää, on kuitenkin $F'(x) = f(x)$ ja siten

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = f(g(t))g'(t).$$

Sijoitusmenetelmä

Jos

$$F(x) = \int f(x) dx$$

on vaikea määrittää, on kuitenkin $F'(x) = f(x)$ ja siten

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = f(g(t))g'(t).$$

Tällöin

$$F(g(t)) = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

Sijoitusmenetelmä

Jos

$$F(x) = \int f(x) dx$$

on vaikea määrittää, on kuitenkin $F'(x) = f(x)$ ja siten

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = f(g(t))g'(t).$$

Tällöin

$$F(g(t)) = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

Tällöin jää vielä yleensä selvitettäväksi miten funktiosta $F(g(t))$ saadaan $F(x)$.

Muistisääntö sijoitukseen

Laskettaessa antiderivaattaa

$$\int f(x) dx$$

voidaan sijoittaa $x = g(t)$, jolloin $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ ja siis

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

Esimerkkejä

- Esimerkit 1.9 – 1.17