

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Rationaalifunktio

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx?$$

Rationaalifunktio

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx?$$

Derivointisääntöjä

- $\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)^n} = -\frac{nf'(x)}{f(x)^{n+1}}$
- $\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2 + 1}.$

Osamurtohajotelmat

- Jos osoittaja ainakin yhtä korkeaa astetta kuin nimittäjä, voidaan suorittaa jakolasku

$$\frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

missä $a(x)$ on polynomi ja $r(x)$ on alempaa astetta kuin $q(x)$.

- Jaetaan $q(x)$ (reaalisiin) alkutekijöihin (joko 1. tai 2. astetta).

Osamurtohajotelmat

- Jos osoittaja ainakin yhtä korkeaa astetta kuin nimittäjä, voidaan suorittaa jakolasku

$$\frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

missä $a(x)$ on polynomi ja $r(x)$ on alempaa astetta kuin $q(x)$.

- Jaetaan $q(x)$ (reaalisiin) alkutekijöihin (joko 1. tai 2. astetta). Jokaista q :n reaalijuurta a vastaa 1. asteen tekijä $x - a$ ja jokaista kompleksijuurta c vastaa toisen asteen tekijä $(x - c)(x - \bar{c}) = x^2 - (c + \bar{c})x + c\bar{c}$.

Osamurtohajotelmat

- Jokainen nimittäjän tekijä $(x - a)^k$ tuottaa hajotelmaan termit

$$\frac{A_j}{(x - a)^j},$$

missä $1 \leq j \leq k$ ja A_j ovat vakioita.

- Jokainen nimittäjän tekijä $(x^2 + px + q)^k$ tuottaa hajotelmaan termit

$$\frac{B_j + C_j x}{(x^2 + px + q)^j},$$

missä $1 \leq j \leq k$ ja B_j, C_j ovat vakioita.

Osamurtohajotelmat

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln |x-a| + C$$

Osamurtohajotelmat

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln |x-a| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^k} dx = -\frac{1}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C,$$

jos $k \geq 2$.

Osamurtohajotelmat

Tekemällä määräämättömään integraaliin

$$I = \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} dx$$

sijoitus $t = x + \frac{p}{2}$ tuottaa muotoa

$$I_1 = \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^m} dt$$

ja

$$I_2 = \int \frac{2t}{(t^2 + a^2)^m} dt$$

olevat osaintegraalit.

Antiderivaatta I_2

$$\int \frac{2t}{t^2 + a^2} dt = \ln |t^2 + a^2| + C$$

ja

$$\int \frac{2t}{(t^2 + a^2)^k} = -\frac{1}{k-1} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{k-1}} + C,$$

kun $k > 1$.

Antiderivaatta I_1

$$\int \frac{1}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C,$$

ja kun $k \geq 2$, on

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^k} dt &= \frac{1}{2(k-1)a^2} \frac{t}{(t^2 + a^2)^{k-1}} \\ &+ \frac{2k-3}{2k-2} \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^{k-1}} dt \end{aligned}$$

Esimerkkejä

- 1.22
- 1.23
- 1.24

Varhaisvaiheet

- Eudoksos Knidoslainen (410 tai 408 eKr–355 tai 347 eKr)
- Arkhimedes Syrakusalainen (n.287 eKr–n.212 eKr)

Varhaisvaiheet

- Eudoksos Knidoslainen (410 tai 408 eKr–355 tai 347 eKr)
- Arkhimedes Syrakusalainen (n.287 eKr–n.212 eKr)

Uusi aika

- Isaac Newton (1642–1727)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Varhaisvaiheet

- Eudoksos Knidoslainen (410 tai 408 eKr–355 tai 347 eKr)
- Arkhimedes Syrakusalainen (n.287 eKr–n.212 eKr)

Uusi aika

- Isaac Newton (1642–1727)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Linkki differentiaalilaskentaan

Newtonin-Leibnizin kaava

Nykyaikainen muotoilu

- Bernhard Riemann (1826–1866)

Nykyaikainen muotoilu

- Bernhard Riemann (1826–1866)
- Jean Gaston Darboux (1842–1917)

Nykyaikainen muotoilu

- Bernhard Riemann (1826–1866)
- Jean Gaston Darboux (1842–1917)
- Johtavat samaan integraalikäsitteeseen, Darboux'n esitys yksinkertaisempi

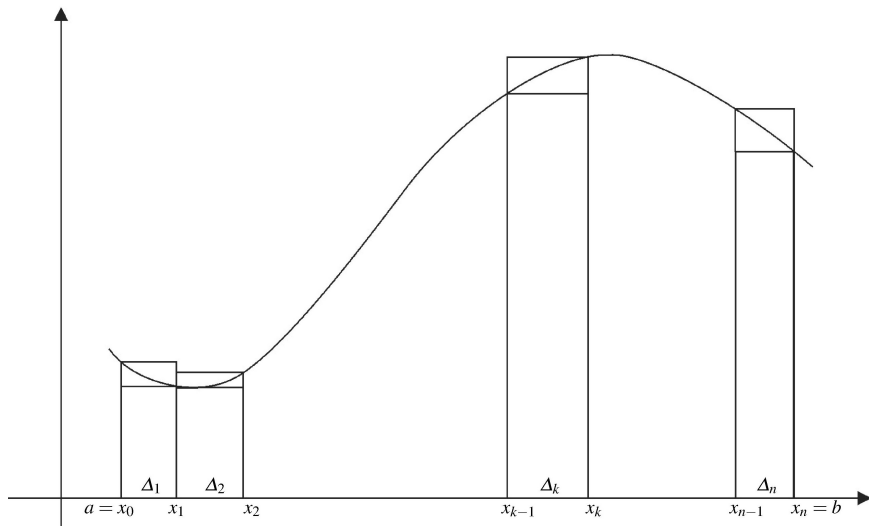
Nykyaikainen muotoilu

- Bernhard Riemann (1826–1866)
- Jean Gaston Darboux (1842–1917)
- Johtavat samaan integraalikäsitteeseen, Darboux'n esitys yksinkertaisempi

Yleistyksiä (ei kuulu kurssiin)

- Stieltjesin integraali
- Lebesguen integraali
- Haarin integraali

Darboux'n integraali



Taustaoletus

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty rajoitettu funktio.

Taustaoletus

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty rajoitettu funktio.

Merkintöjä

- Välin $[a, b]$ jako on äärellinen joukko $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, missä $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_k < x_{k+1}$.

Taustaoletus

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty rajoitettu funktio.

Merkintöjä

- Välin $[a, b]$ jako on äärellinen joukko $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, missä $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_k < x_{k+1}$.
- $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ on jaon k :s väli

Taustaoletus

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty rajoitettu funktio.

Merkintöjä

- Välin $[a, b]$ jako on äärellinen joukko $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, missä $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_k < x_{k+1}$.
- $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ on jaon k :s väli
- $\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$ on k :nnen välin pituus

Taustaoletus

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty rajoitettu funktio.

Merkintöjä

- Välin $[a, b]$ jako on äärellinen joukko $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, missä $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_k < x_{k+1}$.
- $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ on jaon k :s väli
- $\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$ on k :nnen välin pituus
- $M_k = \sup\{f(x) \mid x \in \Delta_k\}$

Taustaoletus

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty rajoitettu funktio.

Merkintöjä

- Välin $[a, b]$ jako on äärellinen joukko $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, missä $x_0 = a$, $x_n = b$ ja $x_k < x_{k+1}$.
- $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ on jaon k :s väli
- $\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$ on k :nnen välin pituus
- $M_k = \sup\{f(x) \mid x \in \Delta_k\}$
- $m_k = \inf\{f(x) \mid x \in \Delta_k\}$

Määritelmä

Välin $[a, b]$ jakoon D liittyvä funktion f Darboux'n yläsumma on

$$\overline{S}_D = \sum_{k=1}^n M_k \Delta_k x$$

ja alasumma

$$\underline{S}_D = \sum_{k=1}^n m_k \Delta_k x$$

Määritelmä

Välin $[a, b]$ jakoon D liittyvä funktion f Darboux'n yläsumma on

$$\overline{S}_D = \sum_{k=1}^n M_k \Delta_k x$$

ja alasumma

$$\underline{S}_D = \sum_{k=1}^n m_k \Delta_k x$$

Lemma

Jokaiselle jaolle D pätee

$$\underline{S}_D \leq \overline{S}_D.$$

Määritelmä

Jos D_1 ja D_2 ovat molemmat välin $[a, b]$ jakoja, sanotaan, että D_2 on D_1 :n tihennys, jos $D_1 \subseteq D_2$.

Darboux'n integraali

Määritelmä

Jos D_1 ja D_2 ovat molemmat välin $[a, b]$ jakoja, sanotaan, että D_2 on D_1 :n tihennys, jos $D_1 \subseteq D_2$.

Huomautus

Koska jaot ovat äärellisiä joukkoja, saadaan D_2 joukosta D_1 lisäämällä äärellinen määrä pisteitä.

Darboux'n integraali

Määritelmä

Jos D_1 ja D_2 ovat molemmat välin $[a, b]$ jakoja, sanotaan, että D_2 on D_1 :n tihennys, jos $D_1 \subseteq D_2$.

Huomautus

Koska jaot ovat äärellisiä joukkoja, saadaan D_2 joukosta D_1 lisäämällä äärellinen määrä pisteitä.

Lemma 2.4.

Jos D_2 on jaon D_1 tihennys, niin

$$\underline{S}_{D_1} \leq \underline{S}_{D_2} \leq \overline{S}_{D_2} \leq \overline{S}_{D_1}.$$

Darboux'n integraali

Määritelmä

Jos D_1 ja D_2 ovat molemmat välin $[a, b]$ jakoja, sanotaan, että D_2 on D_1 :n tihennys, jos $D_1 \subseteq D_2$.

Huomautus

Koska jaot ovat äärellisiä joukkoja, saadaan D_2 joukosta D_1 lisäämällä äärellinen määrä pisteitä.

Lemma 2.4.

Jos D_2 on jaon D_1 tihennys, niin

$$\underline{S}_{D_1} \leq \underline{S}_{D_2} \leq \overline{S}_{D_2} \leq \overline{S}_{D_1}.$$

Lemma 2.5.

Mikään alasumma ei voi ylittää mitään yläsummaa, siis $\underline{S}_{D_1} \leq \overline{S}_{D_2}$ kaikille jaoille D_1 ja D_2 .

Huomautus

Välin $[a, b]$ jako $D_0 = \{a, b\}$ tuottaa ylä- ja alasummat $\bar{S}_{D_0} = M(b - a)$ ja $\underline{S}_{D_0} = m(b - a)$, missä M ja m ovat funktion f supremum- ja infimum koko välillä $[a, b]$.

Huomautus

Välin $[a, b]$ jako $D_0 = \{a, b\}$ tuottaa ylä- ja alasummat $\bar{S}_{D_0} = M(b - a)$ ja $\underline{S}_{D_0} = m(b - a)$, missä M ja m ovat funktion f supremum- ja infimum koko välillä $[a, b]$.

Lemma

Alasummien joukko on on ylhäältä rajoitettu ja yläsummien alhaalta rajoitettu.

Määritelmä

Funktion f yläintegraali välillä $[a, b]$ on

$$\int_a^b f = \inf\{\overline{S}_D \mid D \text{ on välin } [a, b] \text{ jako}\}$$

ja alaintegraali

$$\int_a^b f = \sup\{\underline{S}_D \mid D \text{ on välin } [a, b] \text{ jako}\}$$

Huomautus

Rajoitetulle funktiolle f ylä- ja alaintegraali ovat aina olemassa. Lisäksi Lemmasta 2.5. seuraa, että

$$\int_a^b f \leq \int_a^b f$$

Huomautus

Rajoitetulle funktiolle f ylä- ja alaintegraali ovat aina olemassa. Lisäksi Lemmasta 2.5. seuraa, että

$$\int_{\frac{a}{-}}^b f \leq \int_a^{\frac{b}{-}} f$$

Määritelmä

Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio on Darboux-integroituva (ja samalla Riemann-integroituva), mikäli

$$\int_a^{\frac{b}{-}} f = \int_{\frac{a}{-}}^b f.$$

Määritelmä

Jos f on integroituva, ylä- ja alaintegraalin yhteistä arvoa kutsutaan funktion f (Darboux- tai Riemann-) integraaliksi välillä $[a, b]$ ja siitä käytetään merkintöjä

$$\int_a^b f \quad \text{ja} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Lukuja a ja b kutsutaan integrointivälin tai integraalin ala- ja ylärajoiksi ja funktiota f integrandiksi. $R([a, b])$ tarkoittaa kaikkien välillä $[a, b]$ integroituvien funktioiden joukkoa.

Darboux'n integraali

Määritelmä

Jos f on integroituva, ylä- ja alaintegraalin yhteistä arvoa kutsutaan funktion f (Darboux- tai Riemann-) integraaliksi välillä $[a, b]$ ja siitä käytetään merkintöjä

$$\int_a^b f \quad \text{ja} \quad \int_a^b f(x) dx.$$

Lukuja a ja b kutsutaan integrointivälin tai integraalin ala- ja ylärajoiksi ja funktiota f integrandiksi. $R([a, b])$ tarkoittaa kaikkien välillä $[a, b]$ integroituvien funktioiden joukkoa.

Esimerkkejä

- Esimerkki 2.7.
- Esimerkki 2.8.