

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Lause 2.9 (Riemannin integroituvuusehto)

Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio f on integroituva tarkalleen silloin, kun jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen jako D_ϵ , että

$$\overline{S}_{D_\epsilon} - \underline{S}_{D_\epsilon} = d(\overline{S}_{D_\epsilon}, \underline{S}_{D_\epsilon}) \leq \epsilon.$$

Lause 2.9 (Riemannin integroituvuusehto)

Välillä $[a, b]$ rajoitettu funktio f on integroituva tarkalleen silloin, kun jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen jako D_ϵ , että

$$\overline{S}_{D_\epsilon} - \underline{S}_{D_\epsilon} = d(\overline{S}_{D_\epsilon}, \underline{S}_{D_\epsilon}) \leq \epsilon.$$

Huomautus

Integroituvuusehdon toteutuessa on voimassa

$$\underline{S}_{D_\epsilon} \leq \int_a^b f \leq \overline{S}_{D_\epsilon}$$

Lause 2.13

Oletetaan, että f ja g integroituvia välillä $[a, b]$. Tällöin myös funktiot cf ($c \in \mathbb{R}$) ja $f + g$ ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f,$$
$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Lause 2.13

Oletetaan, että f ja g integroituvia välillä $[a, b]$. Tällöin myös funktiot cf ($c \in \mathbb{R}$) ja $f + g$ ovat integroituvia välillä $[a, b]$ ja

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f,$$
$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Huomautus

Summille pätee analogiset yhtälöt

$$\sum_{k=1}^n cf_k = c \sum_{k=1}^n f_k \quad \text{ja} \quad \sum_{k=1}^n (f_k + g_k) = \sum_{k=1}^n f_k + \sum_{k=1}^n g_k.$$

Lauseen 2.13 seuraus (induktiolla)

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n c_k f_k = \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b f_k$$

Lauseen 2.13 seuraus (induktiolla)

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n c_k f_k = \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b f_k$$

Seuraus 2.14

Funktion integroituvuus säilyy ja integraalin arvo ei muutu jos funktion arvoa muutetaan äärellisen monessa välin $[a, b]$ pisteessä.

Määritelmä

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty funktio. Määritellään funktion f *positiivinen osa* f^+ ja *negatiivinen osa* f^- seuraavasti:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jos } f(x) \geq 0, \text{ ja} \\ 0, & \text{jos } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{jos } f(x) < 0, \text{ ja} \\ 0, & \text{jos } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Selvästi $f = f^+ - f^-$ ja $|f| = f^+ + f^-$.

Määritelmä

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty funktio. Määritellään funktion f *positiivinen osa* f^+ ja *negatiivinen osa* f^- seuraavasti:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jos } f(x) \geq 0, \text{ ja} \\ 0, & \text{jos } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{jos } f(x) < 0, \text{ ja} \\ 0, & \text{jos } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Selvästi $f = f^+ - f^-$ ja $|f| = f^+ + f^-$.

Lause 2.15

Jos f on integroituva, niin ovat myös f^+ , f^- ja $|f|$.

Lause 2.16

Jos f on integroituva välillä $[a, b]$ ja $c \in (a, b)$, niin

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Lause 2.16

Jos f on integroituva välillä $[a, b]$ ja $c \in (a, b)$, niin

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Huomautus

Ylläolevan kaavan analogia summille on

$$\sum_{k=1}^n f_k = \sum_{k=1}^m f_k + \sum_{k=m+1}^n f_k.$$

Määritelmä

Jos $a < b$ ja f on integroituva välillä $[a, b]$, määritellään

$$\int_b^a f = - \int_a^b f \quad \text{ja} \quad \int_a^a f = 0.$$

Määritelmä

Jos $a < b$ ja f on integroituva välillä $[a, b]$, määritellään

$$\int_b^a f = - \int_a^b f \quad \text{ja} \quad \int_a^a f = 0.$$

Huomautus

Ylläolevasta määritelmästä seuraa, että yhtälö

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

on tosi riippumatta lukujen a , b ja c keskinäisestä järjestyksestä.

Lause 2.18

Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$, on se myös integroituva välillä $[a, b]$.

Lauseen 2.18 todistus

- Sanotaan, että f on *tasaisesti jatkuva* joukossa I , jos $(\forall \epsilon > 0)$
 $(\exists \delta > 0)$ siten, että $(\forall x, y \in I)$
 $d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Lauseen 2.18 todistus

- Sanotaan, että f on *tasaisesti jatkuva* joukossa I , jos $(\forall \epsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ siten, että $(\forall x, y \in I)$
 $d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$.
- Oletetaan ensin, että f on tasaisesti jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$.

Lauseen 2.18 todistus

- Sanotaan, että f on *tasaisesti jatkuva* joukossa I , jos $(\forall \epsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ siten, että $(\forall x, y \in I)$
 $d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$.
- Oletetaan ensin, että f on tasaisesti jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$.
- Valitaan sellainen välin $[a, b]$ jako D , että pisinkin jakoväli on korkeintaan δ :n mittainen.

Lauseen 2.18 todistus

- Sanotaan, että f on *tasaisesti jatkuva* joukossa I , jos $(\forall \epsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ siten, että $(\forall x, y \in I)$
 $d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$.
- Oletetaan ensin, että f on tasaisesti jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$.
- Valitaan sellainen välin $[a, b]$ jako D , että pisinkin jakoväli on korkeintaan δ :n mittainen.
- Tällöin mille hyvänsä jakovälille Δ_k pätee
 $M_k - m_k = f(x_M) - f(x_m) < \epsilon$.

Lauseen 2.18 todistus

- Sanotaan, että f on *tasaisesti jatkuva* joukossa I , jos $(\forall \epsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ siten, että $(\forall x, y \in I)$
 $d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$.
- Oletetaan ensin, että f on tasaisesti jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$.
- Valitaan sellainen välin $[a, b]$ jako D , että pisinkin jakoväli on korkeintaan δ :n mittainen.
- Tällöin mille hyvänsä jakovälille Δ_k pätee
 $M_k - m_k = f(x_M) - f(x_m) < \epsilon$.
- Näin ollen

$$\bar{S}_D - \underline{S}_D = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta_k x \leq \sum_{k=1}^n \epsilon \Delta_k x = \epsilon(b - a) \text{ ja}$$

integroituvuus seuraa Riemannin integroituvuusehdosta.

Lauseen 2.18 todistus

- Osoitetaan lopuksi, että suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.

Lauseen 2.18 todistus

- Osoitetaan lopuksi, että suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.
- Olkoon $\epsilon > 0$ ja $x \in I$. Koska f on jatkuva pisteessä I , on $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$, kunhan $d(x, y) < 2\delta_x$.

Lauseen 2.18 todistus

- Osoitetaan lopuksi, että suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.
- Olkoon $\epsilon > 0$ ja $x \in I$. Koska f on jatkuva pisteessä x , on $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$, kunhan $d(x, y) < 2\delta_x$.
- Avoimet välit $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ peittävät suljetun välin $I = [a, b]$.

Lauseen 2.18 todistus

- Osoitetaan lopuksi, että suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.
- Olkoon $\epsilon > 0$ ja $x \in I$. Koska f on jatkuva pisteessä I , on $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$, kunhan $d(x, y) < 2\delta_x$.
- Avoimet välit $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ peittävät suljetun välin $I = [a, b]$.
- Heine-Borelin lause $\Rightarrow$ Äärellinen kokoelma $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}$ myös peittää välin I .

Lauseen 2.18 todistus

- Osoitetaan lopuksi, että suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.
- Olkoon $\epsilon > 0$ ja $x \in I$. Koska f on jatkuva pisteessä I , on $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$, kunhan $d(x, y) < 2\delta_x$.
- Avoimet välit $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ peittävät suljetun välin $I = [a, b]$.
- Heine-Borelin lause $\Rightarrow$ Äärellinen kokoelma $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}$ myös peittää välin I . Valitaan $\delta = \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}\}$.

Lauseen 2.18 todistus

- Osoitetaan lopuksi, että suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.
- Olkoon $\epsilon > 0$ ja $x \in I$. Koska f on jatkuva pisteessä I , on $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$, kunhan $d(x, y) < 2\delta_x$.
- Avoimet välit $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ peittävät suljetun välin $I = [a, b]$.
- Heine-Borelin lause $\Rightarrow$ Äärellinen kokoelma $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}$ myös peittää välin I . Valitaan $\delta = \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}\}$.
- Oletetaan sitten, että $x, y \in I$ ja $d(x, y) \leq \delta$. Joka tapauksessa $x \in I_{x_j}$ jollekin j :lle joten $d(x_j, x) \leq \delta < 2\delta \leq 2\delta_{x_j}$ ja $d(y, x_j) \leq d(y, x) + d(x, x_j) \leq \delta + \delta = 2\delta \leq 2\delta_{x_j}$

Lauseen 2.18 todistus

- Osoitetaan lopuksi, että suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.
- Olkoon $\epsilon > 0$ ja $x \in I$. Koska f on jatkuva pisteessä I , on $d(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$, kunhan $d(x, y) < 2\delta_x$.
- Avoimet välit $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ peittävät suljetun välin $I = [a, b]$.
- Heine-Borelin lause $\Rightarrow$ Äärellinen kokoelma $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}$ myös peittää välin I . Valitaan $\delta = \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}\}$.
- Oletetaan sitten, että $x, y \in I$ ja $d(x, y) \leq \delta$. Joka tapauksessa $x \in I_{x_j}$ jollekin j :lle joten $d(x_j, x) \leq \delta < 2\delta \leq 2\delta_{x_j}$ ja $d(y, x_j) \leq d(y, x) + d(x, x_j) \leq \delta + \delta = 2\delta \leq 2\delta_{x_j}$, joten $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), f(y)) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Esimerkki 2.19

Jos f on rajoitettu välillä $[a, b]$ ja jatkuva pistettä $c \in [a, b]$ lukuunottamatta, on f integroituva välillä $[a, b]$.

Lause 2.20

Olkoot $f, g \in R([a, b])$. Tällöin

- Jos $m \leq f(x) \leq M$ välillä $[a, b]$, on

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

Lause 2.20

Olkoot $f, g \in R([a, b])$. Tällöin

- Jos $m \leq f(x) \leq M$ välillä $[a, b]$, on

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

- Jos $f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$, on $\int_a^b f \geq 0$

Lause 2.20

Olkoot $f, g \in R([a, b])$. Tällöin

- Jos $m \leq f(x) \leq M$ välillä $[a, b]$, on

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

- Jos $f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$, on $\int_a^b f \geq 0$
- Jos $f(x) \geq g(x)$ välillä $[a, b]$, on $\int_a^b f \geq \int_a^b g$

Lause 2.20

Olkoot $f, g \in R([a, b])$. Tällöin

- Jos $m \leq f(x) \leq M$ välillä $[a, b]$, on

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

- Jos $f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$, on $\int_a^b f \geq 0$
- Jos $f(x) \geq g(x)$ välillä $[a, b]$, on $\int_a^b f \geq \int_a^b g$
- Kolmioepäyhtälö:

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \quad \text{ja} \quad \left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right| \quad \text{jos } a > b.$$

Huomautus

Esimerkin 2.12 perusteella $\int_a^b f = 0$ on mahdollista, vaikka $f(x) \geq 0$ koko välillä $[a, b]$ ja $f(c) > 0$ ainakin yhdessä välin $[a, b]$ pisteessä.

Huomautus

Esimerkin 2.12 perusteella $\int_a^b f = 0$ on mahdollista, vaikka $f(x) \geq 0$ koko välillä $[a, b]$ ja $f(c) > 0$ ainakin yhdessä välin $[a, b]$ pisteessä. Jos edellisten lisäksi oletetaan funktion f jatkuvuus, on $\int_a^b f > 0$ (Harjoitustehtävä).

Huomautus

Esimerkin 2.12 perusteella $\int_a^b f = 0$ on mahdollista, vaikka $f(x) \geq 0$ koko välillä $[a, b]$ ja $f(c) > 0$ ainakin yhdessä välin $[a, b]$ pisteessä. Jos edellisten lisäksi oletetaan funktion f jatkuvuus, on $\int_a^b f > 0$ (Harjoitustehtävä).

Integraalilaskennan väliarvolause

Oletetaan, että $a < b$ ja että f on jatkuva välillä $[a, b]$. Tällöin on olemassa $\xi \in [a, b]$, jolle

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

Huomautus

Jos f on integroituva välillä $[a, b]$, on se myös integroituva välillä $[a, x]$, kun $x \in [a, b]$ (Lause 2.16).

Huomautus

Jos f on integroituva välillä $[a, b]$, on se myös integroituva välillä $[a, x]$, kun $x \in [a, b]$ (Lause 2.16).

Määritelmä

Funktion f *integraalifunktio* välillä $[a, b]$ määritellään

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t) dt.$$