

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Analyysin peruslause

Oletetaan että f on integroituva välillä $[a, b]$. Funktion f integraalifunktio

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

on derivoituva sellaisissa pisteissä missä f on jatkuva. Näissä pisteissä on lisäksi voimassa

$$F'(x) = f(x).$$

Seuraus: Newtonin-Leibnizin kaava

Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja F jokin sen antiderivaatta, on

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Seuraus: Newtonin-Leibnizin kaava

Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja F jokin sen antiderivaatta, on

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Merkintöjä

$$F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b = \left|_a^b F(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

Osittaisintegrointi

Jos f ja g ovat derivoituvia jatkuvia välillä $[a, b]$, on

$$\int_a^b fg' = \left[fg \right]_a^b - \int_a^b f'g$$

Sijoitus integraaliin

Oletetaan, että f on jatkuva välillä I ja $[a, b] \subseteq I$. Oletetaan lisäksi, että g on välillä $[\alpha, \beta]$ määritelty derivoittuinen jatkuva funktio, jolle

- $g([\alpha, \beta]) \subseteq I$
- $g(\alpha) = a$ ja $g(\beta) = b$.

Tällöin

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt.$$

Sijoitus integraaliin

Oletetaan, että f on jatkuva välillä I ja $[a, b] \subseteq I$. Oletetaan lisäksi, että g on välillä $[\alpha, \beta]$ määritelty derivoittuun jatkuva funktio, jolle

- $g([\alpha, \beta]) \subseteq I$
- $g(\alpha) = a$ ja $g(\beta) = b$.

Tällöin

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt.$$

Esimerkkejä

- Esimerkki 2.37
- Esimerkki 2.38
- Esimerkki 2.39
- Esimerkki 2.40

Parilliset ja parittomat funktiot

- Funktio f on pariton, jos $f(-x) = -f(x)$.
- Funktio f on parillinen, jos $f(-x) = f(x)$.

Parilliset ja parittomat funktiot

- Funktio f on pariton, jos $f(-x) = -f(x)$.
- Funktio f on parillinen, jos $f(-x) = f(x)$.
- $f(x) = x^{2k}$ on parillinen ja $f(x) = x^{2k+1}$ pariton.
- Jokainen välillä $[-a, a]$ määritelty funktio voidaan esittää parillisen ja parittoman summana:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{parillinen}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{pariton}}.$$

Lause 2.41

Olkoon f integroituva välillä $[-a, a]$.

- Jos f on parillinen, on $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$
- Jos f on pariton, on $\int_{-a}^a f = 0$.

Lause 2.41

Olkoon f integroituva välillä $[-a, a]$.

- Jos f on parillinen, on $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$
- Jos f on pariton, on $\int_{-a}^a f = 0$.

Esimerkkejä

- Esimerkki 2.42
- Esimerkki 2.43
- Esimerkki 2.44

Lause 2.45

Jos f on ω -jaksollinen integroituva funktio, niin

$$\int_a^b f = \int_{a+k\omega}^{b+k\omega} f$$

Lause 2.45

Jos f on ω -jaksollinen integroituva funktio, niin

$$\int_a^b f = \int_{a+k\omega}^{b+k\omega} f$$

Esimerkkejä

- Esimerkki 2.46
- Esimerkki 2.47
- Esimerkki 2.48
- Esimerkki 2.49