

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Intuitio (Newton ja Leibniz):

Integraali vastaa äärettömän monen "äärettömän kapean"
(infinitesimaalisen) pinta-ala -alkion $dA = f(x) dx$ summaamista

Pinta-ala

Intuitio (Newton ja Leibniz):

Integraali vastaa äärettömän monen "äärettömän kapean" (infinitesimaalisen) pinta-ala -alkion $dA = f(x) dx$ summaamista

xy-muoto

$$A = \int_a^b dA$$

Intuitio (Newton ja Leibniz):

Integraali vastaa äärettömän monen "äärettömän kapean" (infinitesimaalisen) pinta-ala -alkion $dA = f(x) dx$ summaamista

xy-muoto

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x) dx$$

Intuitio (Newton ja Leibniz):

Integraali vastaa äärettömän monen "äärettömän kapean" (infinitesimaalisen) pinta-ala -alkion $dA = f(x) dx$ summaamista

xy-muoto

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x) dx$$

Lause 3.1

Jos f ja g ovat välillä $[a, b]$ integroituvia funktioita ja $f(x) \geq g(x)$, on funktioiden kuvaajien ja suorien $x = a$ ja $x = b$ väliin jäävä pinta-ala

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Esimerkkejä

- Esimerkki 3.2
- Esimerkki 3.3
- Esimerkki 3.4

Intuitio (Newton ja Leibniz):

Pinta-ala -alkiot muodostuvat "äärettömän kapeista" ympyräsektoreista, joiden kulma $d\theta$ on infinitesimaalinen ja ala $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$

Intuitio (Newton ja Leibniz):

Pinta-ala -alkiot muodostuvat "äärettömän kapeista" ympyräsektoreista, joiden kulma $d\theta$ on infinitesimaalinen ja ala $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$

Napakoordinaattimuoto

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} dA = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

Intuitio (Newton ja Leibniz):

Pinta-ala -alkiot muodostuvat "äärettömän kapeista" ympyräsektoreista, joiden kulma $d\theta$ on infinitesimaalinen ja ala $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$

Napakoordinaattimuoto

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} dA = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

Esimerkkejä

- Esimerkki 3.6

Parametrimuoto

Oletetaan, että alueen reunakäyrä on annettu muodossa $\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$ ja tarkastellaan tapausta, jossa alue jää käyrän ja x -akselin väliin.

Parametrimuoto

Oletetaan, että alueen reunakäyrä on annettu muodossa $\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$ ja tarkastellaan tapausta, jossa alue jää käyrän ja x -akselin väliin.

Intuitio: Alue koostuu "äärettömän kapeista" pylväistä, joiden korkeus on $y(t)$ ja leveys $dx = x'(t) dt$. Pinta-ala voidaan esittää integraalina

$$\int_a^b y \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) \, dt.$$

Parametrimuoto

Oletetaan, että alueen reunakäyrä on annettu muodossa $\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$ ja tarkastellaan tapausta, jossa alue jää käyrän ja x -akselin väliin.

Intuitio: Alue koostuu "äärettömän kapeista" pylväistä, joiden korkeus on $y(t)$ ja leveys $dx = x'(t) dt$. Pinta-ala voidaan esittää integraalina

$$\int_a^b y \, dx = \int_\alpha^\beta y(t) x'(t) \, dt.$$

Näin saatava integraali voi kuitenkin esittää alan vastalukua jos alue jää x -akselin alapuolelle tai mikäli $x(t)$ on vähenevä.

Esimerkkejä

- Esimerkki 3.7.
- Esimerkki 3.8.