

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Lause 3.1

Jos f ja g ovat välillä $[a, b]$ integroituvia funktioita ja $f(x) \geq g(x)$, on funktioiden kuvaajien ja suorien $x = a$ ja $x = b$ väliin jäävä pinta-ala

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Lause 3.1

Jos f ja g ovat välillä $[a, b]$ integroituvia funktioita ja $f(x) \geq g(x)$, on funktioiden kuvaajien ja suorien $x = a$ ja $x = b$ väliin jäävä pinta-ala

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Napakoordinaattimuoto

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} dA = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Lause 3.1

Jos f ja g ovat välillä $[a, b]$ integroituvia funktioita ja $f(x) \geq g(x)$, on funktioiden kuvaajien ja suorien $x = a$ ja $x = b$ väliin jäävä pinta-ala

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Napakoordinaattimuoto

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} dA = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Parametrimuoto

$$\int_a^b y dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt.$$

Ala napakoordinaattimuodon kautta

Parametrimuodolle $\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$ saadaan napakoordinaattimuoto: $r^2 = x(t)^2 + y(t)^2$ ja $\theta = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$ (oletetaan kasvavaksi). Tällöin

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta(t_1)}^{\theta(t_2)} r^2 d\theta,$$

johon tehdään sijoitus $\theta = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$. Tällöin saadaan

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (xy' - yx') dt.$$

Ala napakoordinaattimuodon kautta

Parametrimuodolle $\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$ saadaan napakoordinaattimuoto: $r^2 = x(t)^2 + y(t)^2$ ja $\theta = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$ (oletetaan kasvavaksi). Tällöin

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta(t_1)}^{\theta(t_2)} r^2 d\theta,$$

johon tehdään sijoitus $\theta = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$. Tällöin saadaan

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (xy' - yx') dt.$$

Esimerkki

Esimerkki 3.9

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat ja sileä, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat ja sileä, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds$$

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat ja sileä, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat ja sileä, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Määritelmä

Tasokäyrä on funktio $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$. Käyrä Γ on jatkuva jos x ja y ovat ja sileä, jos x' ja y' ovat jatkuvia.

Intuitio:

Käyrän pituus L saadaan summaamalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista pituusalkiota ds :

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

(Parametrimuoto)

Eksplisiittimuoto $y = f(x)$

Merkitään $x = t$, $y = f(t)$, jolloin kaarenpituudeksi saadaan

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Napakoordinaattimuoto

Merkitään $x = r \cos \theta$ ja $y = r \sin \theta$, jolloin

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2$$

Napakoordinaattimuoto

Merkitään $x = r \cos \theta$ ja $y = r \sin \theta$, jolloin

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = (r' \cos \theta - r \sin \theta)^2 + (r' \sin \theta + r \cos \theta)^2$$

Napakoordinaattimuoto

Merkitään $x = r \cos \theta$ ja $y = r \sin \theta$, jolloin

$$\begin{aligned} x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 &= (r' \cos \theta - r \sin \theta)^2 + (r' \sin \theta + r \cos \theta)^2 \\ &= r'^2 \cos^2 \theta - 2r'r \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &+ r'^2 \sin^2 \theta + 2r'r \sin \theta \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

Napakoordinaattimuoto

Merkitään $x = r \cos \theta$ ja $y = r \sin \theta$, jolloin

$$\begin{aligned} x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 &= (r' \cos \theta - r \sin \theta)^2 + (r' \sin \theta + r \cos \theta)^2 \\ &= r'^2 \cos^2 \theta - 2r'r \cos \theta \sin \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &\quad + r'^2 \sin^2 \theta + 2r'r \sin \theta \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta \\ &= r'^2 + r^2, \end{aligned}$$

joten

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta.$$

Esimerkkejä

- Esimerkki 3.10
- Esimerkki 3.11
- Esimerkki 3.12

Intuitio

Tilavuus saadaan laskemalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista tilavuusalkiota:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x) dx$$

Intuitio

Tilavuus saadaan laskemalla yhteen äärettömän monta infinitesimaalista tilavuusalkiota:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x) dx$$

Esimerkki

Kartion tilavuus

Lause 3.13

Välille $[a, b]$ rajoitetun käyrän $y = f(x)$ pyöräyttäessä x -akselin ympäri muodostuu kappale, jonka tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Lause 3.13

Välille $[a, b]$ rajoitetun käyrän $y = f(x)$ pyöräyttäessä x -akselin ympäri muodostuu kappale, jonka tilavuus on

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Esimerkki

Esimerkki 3.14

Määritelmä

Pyörähdyskappaleen vaipalla tarkoitetaan pintaa lukuunottamatta päätyjä.

Määritelmä

Pyörähdyskappaleen vaipalla tarkoitetaan pintaa lukuunottamatta päätyjä.

Vaipan ala

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Määritelmä

Pyörähdyskappaleen vaipalla tarkoitetaan pintaa lukuunottamatta päätyjä.

Vaipan ala

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Esimerkkejä

- Esimerkki 3.15
- Esimerkki 3.16
- Esimerkki 3.17