

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.
- Yleistystä väleille $[a, \infty)$ tai $(-\infty, b]$ kutsutaan I lajin epäoleelliseksi integraaliksi

Integraalikäsite ja sen yleistystä

- Riemann-integraali on määritelty välillä $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) rajoitetuille funktioille.
- Yleistystä väleille $[a, \infty)$ tai $(-\infty, b]$ kutsutaan I lajin epäoleelliseksi integraaliksi
- Yleistystä funktioille, jotka eivät ole rajoitettuja kutsutaan II lajin epäoleelliseksi integraaliksi.

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^{\infty} f =$$

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^{\infty} f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on äärellisenä olemassa.

I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on äärellisenä olemassa. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_a^\infty f$ suppenee ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Olkoon f on integroitava kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on äärellisenä olemassa. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_a^\infty f$ suppenee ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

Jos raja-arvoa ei ole äärellisenä, sanotaan että integraali hajaantuu ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \uparrow$$

Huomautus

Integraali $\int_{-\infty}^b f$ määritellään analogisesti, mutta integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f$$

määritelmään pitää kiinnittää enemmän huomiota ja sitä pitää tarkastella yksityiskohtaisemmin.

I lajin epäoleellinen integraali

Huomautus

Integraali $\int_{-\infty}^b f$ määritellään analogisesti, mutta integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f$$

määritelmään pitää kiinnittää enemmän huomiota ja sitä pitää tarkastella yksityiskohtaisemmin.

Esimerkki

Esimerkit 3.19–3.22.

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Oletetaan, että f on integroituva yli kaikkien välien

$[a, M] \subseteq [a, \infty)$, Tällöin integraali $\int_a^\infty f$ suppenee tarkalleen silloin

kun $\int_b^\infty f$ suppenee kaikilla $b > a$. Suppenevassa tapauksessa pätee lisäksi

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f.$$

I lajin epäoleellinen integraali

Lause

Oletetaan, että f on integroitava yli kaikkien välien

$[a, M] \subseteq [a, \infty)$, Tällöin integraali $\int_a^\infty f$ suppenee tarkalleen silloin

kun $\int_b^\infty f$ suppenee kaikilla $b > a$. Suppenevassa tapauksessa pätee lisäksi

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f.$$

Lause 3.23.

$$\int_a^\infty (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^\infty f + \beta \int_a^\infty g,$$

mikäli oikean puolen integraalit suppenevat (On mahdollista, että vasemman puolen integraali suppenee, vaikka oikean puolen eivät).

Lause 3.24 (Vertailutarkastin, Majoranttiperiaate)

Olkoon $0 \leq g \leq f$ kun $x \geq a$, f ja g integroituvia kaikilla väleillä $[a, M]$, kun $M \geq a$. Tällöin

- $\int_a^\infty f \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty g \downarrow$
- $\int_a^\infty g \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty f \uparrow$

Lisäksi sanotaan että g on f :n minorantti ja että f on g :n majorantti.

Todistuksen idea (Lause 3.24)

- $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ on kasvava: jos $c_2 > c_1$, on

$$G(c_2) - G(c_1) = \int_a^{c_2} g(t) dt - \int_a^{c_1} g(t) dt$$

Todistuksen idea (Lause 3.24)

- $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ on kasvava: jos $c_2 > c_1$, on

$$\begin{aligned} G(c_2) - G(c_1) &= \int_a^{c_2} g(t) dt - \int_a^{c_1} g(t) dt \\ &= \int_a^{c_1} g(t) dt + \int_{c_1}^{c_2} g(t) dt - \int_a^{c_1} g(t) dt \geq 0. \end{aligned}$$

Todistuksen idea (Lause 3.24)

- $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ on kasvava: jos $c_2 > c_1$, on

$$\begin{aligned} G(c_2) - G(c_1) &= \int_a^{c_2} g(t) dt - \int_a^{c_1} g(t) dt \\ &= \int_a^{c_1} g(t) dt + \int_{c_1}^{c_2} g(t) dt - \int_a^{c_1} g(t) dt \geq 0. \end{aligned}$$

- $G(x) \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^\infty f(t) dt.$

Todistuksen idea (Lause 3.24)

- $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ on kasvava: jos $c_2 > c_1$, on

$$\begin{aligned} G(c_2) - G(c_1) &= \int_a^{c_2} g(t) dt - \int_a^{c_1} g(t) dt \\ &= \int_a^{c_1} g(t) dt + \int_{c_1}^{c_2} g(t) dt - \int_a^{c_1} g(t) dt \geq 0. \end{aligned}$$

- $G(x) \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^\infty f(t) dt.$
- $G = \sup\{G(x) \mid x \geq a\}$ on olemassa

Todistuksen idea (Lause 3.24)

- $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ on kasvava: jos $c_2 > c_1$, on

$$\begin{aligned} G(c_2) - G(c_1) &= \int_a^{c_2} g(t) dt - \int_a^{c_1} g(t) dt \\ &= \int_a^{c_1} g(t) dt + \int_{c_1}^{c_2} g(t) dt - \int_a^{c_1} g(t) dt \geq 0. \end{aligned}$$

- $G(x) \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^\infty f(t) dt.$
- $G = \sup\{G(x) \mid x \geq a\}$ on olemassa
- $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = G$ seuraa samoin kuin lukujonoille (Analyysi I).

Esimerkkejä

- Esimerkki 3.25
- Esimerkki 3.26