

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^{\infty} f =$$

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on äärellisenä olemassa.

Kertausta: I lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on äärellisenä olemassa. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_a^\infty f$ suppenee ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

Määritelmä

Olkoon f on integroituva kaikilla välin $[a, \infty)$ äärellisillä osaväleillä. Tällöin

$$\int_a^\infty f = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^M f,$$

jos raja-arvo on äärellisenä olemassa. Tällöin sanotaan, että integraali $\int_a^\infty f$ suppenee ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \downarrow$$

Jos raja-arvoa ei ole äärellisenä, sanotaan että integraali hajaantuu ja merkitään

$$\int_a^\infty f \quad \uparrow$$

Esimerkki 3.21

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} dx = \frac{1}{k} \text{ kun } k > 0 \text{ ja integraali hajaantuu kun } k \leq 0$$

Esimerkki 3.21

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} dx = \frac{1}{k} \text{ kun } k > 0 \text{ ja integraali hajaantuu kun } k \leq 0$$

Esimerkki 3.22

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{s-1} \text{ kun } s > 1 \text{ ja integraali hajaantuu kun } s \leq 1.$$

Lause 3.24 (Vertailutarkastin, Majoranttiperiaate)

Olkoon $0 \leq g \leq f$ kun $x \geq a$, f ja g integroituvia kaikilla väleillä $[a, M]$, kun $M \geq a$. Tällöin

- $\int_a^\infty f \downarrow \Rightarrow \int_a^\infty g \downarrow$
- $\int_a^\infty g \uparrow \Rightarrow \int_a^\infty f \uparrow$

Lisäksi sanotaan että g on f :n minorantti ja että f on g :n majorantti.

Esimerkkejä

- Esimerkki 3.26
- Esimerkki 3.27

Esimerkkejä

- Esimerkki 3.26
- Esimerkki 3.27

Huomautus 3.28

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

suppenee ainakin, kun $x > 1$.

II lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a + \epsilon, b]$, mutta ei rajoitettu väleillä $(a, a + \epsilon)$ ($\epsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f =$$

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a + \epsilon, b]$, mutta ei rajoitettu väleillä $(a, a + \epsilon)$ ($\epsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\epsilon}^b f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa.

II lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a + \epsilon, b]$, mutta ei rajoitettu väleillä $(a, a + \epsilon)$ ($\epsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\epsilon}^b f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Käsitteet suppeneminen ja hajaantuminen määritellään kuten I lajin epäoleellisille integraaleille.

II lajin epäoleellinen integraali

Määritelmä

Oletetaan, että f on rajoitettu jokaisella välin $[a, b]$ osavälillä $[a + \epsilon, b]$, mutta ei rajoitettu väleillä $(a, a + \epsilon)$ ($\epsilon > 0$). Tällöin määritellään

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\epsilon}^b f,$$

mikäli raja-arvo on äärellisenä olemassa. Käsitteet suppeneminen ja hajaantuminen määritellään kuten I lajin epäoleellisille integraaleille.

Integraali, jossa f ei ole rajoitettu ylärajan b ympäristössä, määritellään analogisesti:

$$\int_a^b f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\epsilon} f.$$

Huomautus 3.30

Funktion f ei tarvitse olla määritelty integrointivälin päätepisteessä, jotta epäoleellinen integraali $\int_a^b f$ olisi olemassa.

Huomautus 3.30

Funktion f ei tarvitse olla määritelty integrointivälin päätepisteessä, jotta epäoleellinen integraali $\int_a^b f$ olisi olemassa.

Esimerkkejä

- Esimerkki 3.31
- Esimerkki 3.32
- Esimerkki 3.33
- Esimerkki 3.34

Yleinen epäoleellinen integraali

Yleinen periaate

Integrointiväli jaetaan niin moneen osaväliin, että kullakin esiintyy vain yksi epäoleellisuus päätepisteessä. Jos yksikin osista hajaantuu, sanotaan integraalin hajaantuvan.

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu kaikkialla muualla paitsi pisteen $c \in (a, \infty)$ ympäristössä. Valitaan $d > c$ ja tällöin

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^\infty f.$$

Kaksi ensimmäistä integraalia ovat II lajin epäoleellisia, viimeisin I lajin.

Yleinen epäoleellinen integraali

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu koko reaaliakselilla. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^0 f + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f$$

Yleinen epäoleellinen integraali

Esimerkki

Olkoon f rajoitettu koko reaaliakselilla. Tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^0 f + \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M f$$

Määritelmä

Integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} f$ Cauchyn pääarvo määritellään

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f$$

ja tästä käytetään myös yleensä merkintää $\int_{-\infty}^{\infty} f$ tai $P \int_{-\infty}^{\infty} f$.

Esimerkki

- Esimerkki 3.35

Esimerkki

- Esimerkki 3.35
- Esimerkki 3.36:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

suppenee kun $x > 0$ (vrt. Esimerkki 3.26).

Esimerkki

- Esimerkki 3.35
- Esimerkki 3.36:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

suppenee kun $x > 0$ (vrt. Esimerkki 3.26).

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{ja} \quad \Gamma(1) = 1$$