

Analyysi II (sivuaineopiskelijoille)

Mika Hirvensalo
mikhirve@utu.fi

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Turun yliopisto

2018

Esimerkki

- Gammafunktio:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

suppenee kun $x > 0$ (vrt. Esimerkki 3.26).

Esimerkki

- Gammafunktio:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

suppenee kun $x > 0$ (vrt. Esimerkki 3.26).

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{ja} \quad \Gamma(1) = 1$$

Esimerkki

- Gammafunktio:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

suppenee kun $x > 0$ (vrt. Esimerkki 3.26).

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{ja} \quad \Gamma(1) = 1$$

- Esimerkki 3.37

Esimerkki

- Gammafunktio:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

suppenee kun $x > 0$ (vrt. Esimerkki 3.26).

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{ja} \quad \Gamma(1) = 1$$

- Esimerkki 3.37
- Esimerkki 3.39

Lause 3.41

Oletetaan, että f on integroituva eikä sillä esiinny epäoleellisuuksia välin $[a, b]$ osaväleillä. Jos $\int_a^b |f|$ suppenee, niin myös $\int_a^b f$ suppenee. Huom: Tässä voi olla $a = -\infty$ tai $b = \infty$.

Yleinen epäoleellinen integraali

Lause 3.41

Oletetaan, että f on integroituva eikä sillä esiinny epäoleellisuuksia välin $[a, b]$ osaväleillä. Jos $\int_a^b |f|$ suppenee, niin myös $\int_a^b f$ suppenee. Huom: Tässä voi olla $a = -\infty$ tai $b = \infty$.

Todistus

Koska $|f| = f^+ + f^-$, on $f^+, f^- \leq |f|$ joten integraalit $\int_a^b f^\pm$ suppenevat majoranttiperiaatteen nojalla. Väite seuraa nyt siitä, että $f = f^+ - f^-$.

Määritelmä 3.40

- Jos $\int_a^b |f|$ suppenee, sanotaan, että $\int_a^b f$ suppenee itseisesti.
- Jos $\int_a^b |f|$ hajaantuu $\int_a^b f$ suppenee, sanotaan että jälkimmäinen suppenee ehdollisesti.

Määritelmä 3.40

- Jos $\int_a^b |f|$ suppenee, sanotaan, että $\int_a^b f$ suppenee itseisesti.
- Jos $\int_a^b |f|$ hajaantuu $\int_a^b f$ suppenee, sanotaan että jälkimmäinen suppenee ehdollisesti.

Esimerkki 3.42

Integraali

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

suppenee ehdollisesti.

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Sarja

- $$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
- Mitä "ääretön summa" tarkoittaa?

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
- Mitä "ääretön summa" tarkoittaa?

Vertaa:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) dx.$$

Sarja

- $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
- Mitä "ääretön summa" tarkoittaa?

Vertaa:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) dx.$$

Sarja määritellään analogisesti.

Osasummat

$$S_1 = a_1$$

Osasummat

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

Osasummat

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots \quad \quad \vdots$$

Osasummat

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_M = \sum_{n=1}^M a_n$$

Osasummat

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_M = \sum_{n=1}^M a_n$$

Osasummat muodostavat lukujonon $S_1, S_2, S_3, \dots$

Osasummat

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_M = \sum_{n=1}^M a_n$$

Osasummat muodostavat lukujonon $S_1, S_2, S_3, \dots$

Määritelmä 4.1.

Lukujonoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ liittyvää osasummien jonoa $S_1, S_2, S_3, \dots$ kutsutaan sarjaksi ja merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ lukujono ja $S_M = \sum_{n=1}^M a_n$ sen osasummien jono.

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ lukujono ja $S_M = \sum_{n=1}^M a_n$ sen osasummien jono.

Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim_{M \rightarrow \infty} S_M$ on äärellisenä

olemassa.

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ lukujono ja $S_M = \sum_{n=1}^M a_n$ sen osasummien jono.

Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim_{M \rightarrow \infty} S_M$ on äärellisenä

olemassa. Muutoin sarja *hajaantuu* (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$).

Määritelmä

Olkoon $a_1, a_2, a_3, \dots$ lukujono ja $S_M = \sum_{n=1}^M a_n$ sen osasummien jono.

Sanotaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \downarrow$), jos $S = \lim_{M \rightarrow \infty} S_M$ on äärellisenä

olemassa. Muutoin sarja *hajaantuu* (merkitään $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \uparrow$). Jos sarja suppenee, sanotaan, että sen *summa* on $S = \lim S_n$.

Huomautus 4.2

Sarja voidaan indeksoida alkamaan mistä tahansa luvusta k ja tällöin siis

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^M a_n$$

Huomautus 4.2

Sarja voidaan indeksoida alkamaan mistä tahansa luvusta k ja tällöin siis

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^M a_n$$

Esimerkki 4.3.

Jokainen päättymätön desimaalikehitelmä edustaa sarjaa: esim.

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \dots$$

Esimerkki 4.4.

Olkoon c vakio. Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} c = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^M c = \lim_{M \rightarrow \infty} Mc = \begin{cases} \infty, & \text{jos } c \neq 0 \\ 0, & \text{jos } c = 0 \end{cases}$$

Esimerkki 4.4.

Olkoon c vakio. Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} c = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^M c = \lim_{M \rightarrow \infty} Mc = \begin{cases} \infty, & \text{jos } c \neq 0 \\ 0, & \text{jos } c = 0 \end{cases}$$

Esimerkki 4.5

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Esimerkki 4.4.

Olkoon c vakio. Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} c = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^M c = \lim_{M \rightarrow \infty} Mc = \begin{cases} \infty, & \text{jos } c \neq 0 \\ 0, & \text{jos } c = 0 \end{cases}$$

Esimerkki 4.5

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Lause 4.6. (Hajaantumistarkastin)

Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Esimerkki 4.4.

Olkoon c vakio. Tällöin

$$\sum_{n=1}^{\infty} c = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^M c = \lim_{M \rightarrow \infty} Mc = \begin{cases} \infty, & \text{jos } c \neq 0 \\ 0, & \text{jos } c = 0 \end{cases}$$

Esimerkki 4.5

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Lause 4.6. (Hajaantumistarkastin)

Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suppenee, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Jos siis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, niin sarja hajaantuu.

Esimerkki 4.7 (Geometrisen sarja)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Esimerkki 4.7 (Geometrisen sarja)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Määritelmä

Lattiafunktio $\lfloor x \rfloor$ katkaisee luvun desimaaliosan ja määritellään

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Esimerkki 4.7 (Geometrisen sarja)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Määritelmä

Lattiafunktio $\lfloor x \rfloor$ katkaisee luvun desimaaliosan ja määritellään

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Lattiafunktio tunnetaan myös hakasfunktiona, mihin liittyvä vaihtoehtoinen merkintä on $[x]$.

Määritelmä

Jos $a_1, a_2, a_3, \dots$ on jokin reaalilukujono, määritellään siihen liittyvä *porrasfunktio* $a : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$a_p(x) = a_{[x]}.$$

Määritelmä

Jos $a_1, a_2, a_3, \dots$ on jokin reaalilukujono, määritellään siihen liittyvä *porrasfunktio* $a : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$a_p(x) = a_{\lfloor x \rfloor}.$$

Huomautus

Kun $x \in [1, 2)$, on $a_p(x) = a_1$, kun $x \in [2, 3)$, on $a_p(x) = a_2$, jne.

Määritelmä

Jos $a_1, a_2, a_3, \dots$ on jokin reaalilukujono, määritellään siihen liittyvä *porrasfunktio* $a : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$a_p(x) = a_{[x]}.$$

Huomautus

Kun $x \in [1, 2)$, on $a_p(x) = a_1$, kun $x \in [2, 3)$, on $a_p(x) = a_2$, jne.

Huomautus

$$\int_n^{n+1} a_p(x) dx = \int_n^{n+1} a_n dx = a_n,$$

mistä seuraa, että

$$S_M = a_1 + a_2 + \dots + a_M = \int_1^{M+1} a_p(x) dx.$$